HEINZ-CHRISTIAN SCHALK
GERALD F. STEINER

und Hans Peter Aubauer, Andreas Bolhar-Nordenkampf, Christian Dorninger, Manfred Gurtner-Würl, Siegfried Nöbauer, Andreas Plihal, Gerhard Spitzer

unter Mitarbeit der Verlagsredaktion Mathematik

MATHE-MATIK 3

Verlag Hölder • Pichler • Tempsky, Wien
www.verlaghpt.at

Dieses Schulbuch wurde auf der Grundlage der Verordnung des Bundesministers für Unterricht und kulturelle Angelegenheiten über die Lehrpläne für Höhere technische und gewerbliche Lehranstalten (= "Rahmenlehrpläne", d. h. die Auswahl und die Gewichtung der Inhalte erfolgt durch die Lehrkräfte), BGBl. II Nr. 302/1997 in der Fassung der Verordnung BGBl. II Nr. 382/1998, erstellt und mit Bescheid des Bundesministeriums für Unterricht und kulturelle Angelegenheiten vom 26. April 1999, GZ 41.546/1-III/D/13/98, als für den Unterrichtsgebrauch an Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten für den III. Jahrgang im Unterrichtsgegenstand Angewandte Mathematik geeignet erklärt.

Es wurde weiters vom Bundesministerium für Unterricht und kulturelle Angelegenheiten als für den Unterrichtsgebrauch an folgenden Schularten im Unterrichtsgegenstand Mathematik und angewandte Mathematik geeignet erklärt:

– Höhere land- und forstwirtschaftliche Lehranstalten für den III. Jahrgang

Mit freundlicher Genehmigung des Bundesministeriums für Unterricht und kulturelle Angelegenheiten (früher: Bundesministerium für Unterricht und Kunst bzw. Bundesministerium für Unterricht, Kunst und Sport) wurden Inhalte aus der zweiten Experimentalfassung der Lehrzielbank für das berufsbildende Schulwesen (Mathematik für berufsbildende mittlere und höhere Schulen) entnommen.

Mit freundlicher Genehmigung der Texas Instruments Incorporated wurden Abbildungen und Texte aus dem TI-92 MINI HANDBUCH sowie aus dem TI-92 HANDBUCH entnommen. Für die diesen Werken entnommenen Teile gilt: Copyright © 1995 Texas Instruments Incorporated. Autoren und Verlag danken der Texas Instruments Incorporated für die gute Zusammenarbeit.

Schulbuch-Nr. 5599

Bildquellennachweis:

1 — aus: Neugebauer; Mathematische Keilschrift-Texte, Hrsg. u. bearb.v. O. Neugebauer, Kopenhagen, Zweiter Teil, Register, Glossar, Nachträge, Tafeln © 1935 Springer Verlag Berlin-Heidelberg
3/oben — Bildarchiv der Österreichischen Nationalbibliothek (ÖNB) Wien
3/unten — Bildarchiv der ÖNB Wien
25 — Foto Naturhistorisches Museum Wien
32 — Foto Burger / Reniets Verlag GmbH
33 — CBS Schallplatten GmbH
35/Aufgabe 132 — Leitz-Austria Friedrich von Rosen & Co. KG
35/Aufgabe 133 — Hewlett-Packard GmbH
40 — Deutsches Museum München
41 — Bildarchiv der ÖNB Wien
42 — Bildarchiv der ÖNB Wien
47 — Foto Oberst W. Pflegerl
48 — Deutsches Museum München
54 — Foto Watzlawek / Reniets Verlag GmbH
55/Aufgabe 226 — Werkbilder Centra-Honeywell
55/Aufgabe 227 — Foto Feigl
56/Aufgabe 229 — Foto Dr. G. Spitzer / Institut für Zoologie
56/Aufgabe 230 — Foto Dr. L. Moczar / Budapest, bereitgestellt vom Naturhistorischen Museum Wien
57/oben — Foto Dr. H. Schifter / Naturhistorisches Museum Wien
57/unten — Bildarchiv der ÖNB Wien
63 — Bayer AG Pharma Wiss. Zentralstelle Foto Nr. 10.257
71 — Botschaft der UdSSR
72/Aufgabe 300 — United States Information Agency
72/Aufgabe 302 — Gletscherbahn Kaprun AG
76/oben — Fremdenverkehrsverband Inner-Ötztal
76/unten — Fremdenverkehrsverband Inner-Ötztal
78 — Adam Opel AG
83 — Bildarchiv der ÖNB Wien
87 — Foto Becvar
89 — Foto Filser / MPG-Spiegel 6/87
106/Aufgabe 467 — Messerschmitt-Bolkow-Blohm GmbH
106/Aufgabe 468 — European Space Agency
107 — Grafik von G. Otto / DFVLR / Köln
123 — Foto Kluger / aus der Tageszeitung KURIER
127 — Eternit-Werke Ludwig Hatschek AG
134/Aufgabe 627 — Foto Schweitzer
134/Aufgabe 628 — Grundig Austria GmbH
137/Aufgabe 633 — Foto Feigl
137/Aufgaben 635 und 636 — Fotos Rosner
139 — Bildarchiv der ÖNB Wien
143 — Deutsches Museum München
178 — Bildarchiv der ÖNB Wien
182 — Foto Becvar
187 — Foto Burger / Reniets Verlag GmbH
189/Aufgabe 870 — Foto Burger / Reniets Verlag GmbH
189/Aufgabe 871 — Foto Watzlawek / Reniets Verlag GmbH
197/oben — Universitätsbibliothek München
197/unten — ÖFA-Akkumulatoren GmbH
229ff. — mit freundlicher Genehmigung der Texas Instruments Incorporated
243 — Bildarchiv der ÖNB Wien

Schulbuchvergütung/Bildrechte: © VBK/Wien

An der Zusammenstellung des vorliegenden Bandes nach dem HTL-Lehrplan 1997 haben Anton BURGER und Monika WATZLAWEK mitgewirkt.

Einband: IBM Computerkunst, Komposition von Jean-Claude HALGAND (Frankreich)

Lektorat: Karl PUFLER

Autoren und Verlag danken Brigitta HAVLIK für die Überlassung von Aufgabenmaterial.

3. Auflage, Nachdruck 2008 (3,01).

Alle Drucke der 3. Auflage können im Unterricht nebeneinander verwendet werden.

Satz, Computergrafik, Druck und Bindung: ERNST BECVAR GMBH, Wien

ISBN 978-3-230-02679-8

INHALTSVERZEICHNIS

Zur Selbstkontrolle

Heinz-Christian Schalk
Gerald F. Steiner

Mathematik 3 Lösungen

bearbeitet von Andreas Plihal und der Verlagsredaktion Mathematik

Das Lösungsheft enthält die Lösungen (Endresultate) zu den Aufgaben dieses Lehrbuchs.

Zu den mit ▢ gekennzeichneten Aufgaben bzw. Aufgabenteilen wird der Lösungsweg ausführlich dargestellt.

Das Lösungsheft ist im Anhang zur Schulbuchliste enthalten, kann aber auch außerhalb der Schulbuchaktion über den Buchhandel bezogen werden.

Schulbuchnummer: 5600
ISBN 978-3-230-02680-4

Unser Service-Team:

FOLGEN UND REIHEN

1. Einführung

Aus einer Rätselzeitschrift:

2 4 8 ?

Welche Zahl folgt als nächste? Dieses Rätsel ist gar nicht so einfach! Denn ein „logisches" Argument, welche Zahl für das rote Fragezeichen zu setzen ist, gibt es nicht.

Bei den üblichen Zahlenrätseln kann man im Allgemeinen folgende Begründung geben: Die Reihenfolge der Zahlen gehorcht einer bestimmten Funktionsgleichung, in das die natürlichen Zahlen — meistens mit 1 beginnend — eingesetzt werden.

So liefert z. B. die Gleichung $y = 2x + 1$ die Zahlen

$$3 \quad 5 \quad 7 \quad 9 \ldots \quad \text{für } x \in \mathbb{N}^*.$$

Oder für $y = x^2$ erhalten wir

$$1 \quad 4 \quad 9 \quad 16 \ldots \quad \text{für } x \in \mathbb{N}^*.$$

Es gilt also — durch Probieren oder Intuition — eine Funktionsgleichung, ein **Bildungsgesetz** zu finden.

Für unser eingangs gebrachtes Problem gibt es unter diesem Gesichtspunkt beliebig viele Lösungen:

$$16 \ldots\ldots \text{ für das Bildungsgesetz } y = 2^x,\ x \in \mathbb{N}^*$$

$$14 \ldots\ldots \text{ für das Bildungsgesetz } y = x^2 - x + 2,\ x \in \mathbb{N}^*$$

Nach dem Ausflug in die Rätselecke wollen wir uns mit dem für die Mathematik Wesentlichen befassen. Bei unserem Rätsel 2 4 8 ? wurden Zahlenwerte in einer bestimmten Reihenfolge aneinander gesetzt.

In der Mathematik spricht man von einer **„Zahlenfolge"** und schreibt die Glieder der Folge in Winkelklammern.

Z. B.: $\langle 2, 4, 8, 16, 32, 64 \rangle$, $\langle 3, 15, 2, 10, 1 \rangle$, $\langle 1, 2, 3 \rangle$ usw.

allgemein: $\langle a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \rangle$

Man bezeichnet a_1 als **Anfangsglied** und a_n als **n-tes Glied** der Folge.

Die Darstellung einer Folge durch einen Funktionsterm wird **explizite Darstellung** genannt.

Beschreibt man jedoch eine Folge durch die Abhängigkeit zwischen den Folgengliedern, spricht man von einer **rekursiven Darstellung**. Bei einer rekursiven Darstellung ist zusätzlich die Angabe des 1. Glieds erforderlich.

Zahlenfolgen finden sich bereits auf den babylonischen Tontafeln, die vor vier Jahrtausenden entstanden sind. Das folgende Foto zeigt eine solche Tafel mit mathematischem Keilschrift-Text aus dem 14. Jahrhundert v. Chr., der am Hof des Assur-Tempels gefunden wurde. Auf ihm sind die Quadratzahlen von 1 bis 18 noch erhalten. Die Tafelgröße lässt vermuten, dass die Zahlenfolge ursprünglich bis 30^2 gereicht hat.
1 4 9 16 … 289 324 …

(BM) K 2069

Ist. A 20 + VAT 9734

Strssbg. 362

Es ist gleichgültig, in welcher Reihenfolge die Elemente einer **Zahlenmenge** angeschrieben werden, z. B.: $\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\} = \{3, 2, 1\}$ usw.
Wenn man aber die Elemente in einer bestimmten Reihenfolge anordnet, spricht man von einer **Folge**.

Definition:

Eine **unendliche (endliche) Folge** ist darstellbar durch eine Funktion, deren Definitionsmenge die Menge $\mathbb{N}^*$ (die Menge $\{1, 2, 3, \ldots, k\}$, $k \in \mathbb{N}^*$) ist.

Betrachten wir die nachstehenden Zahlenfolgen:

(1) $\langle 1, 2, 3, 4, 5 \rangle$
$\langle 2, 4, 6, 8, 10 \rangle$
$\langle 2, 0, -2, -4, -6 \rangle$

(2) $\langle 1, 2, 4, 8, 16, 32 \rangle$
$\langle 8, 4, 2, 1, 0{,}5, 0{,}25 \rangle$
$\langle 1, -2, 4, -8, 16, -32 \rangle$

Welcher Unterschied besteht zwischen den in **(1)** und den in **(2)** angeführten Folgen?

Definition:

Eine **arithmetische Folge (AF)** ist eine Folge, bei der die **Differenz** zweier Nachbarglieder konstant ist.

Warum spricht man von einer „arithmetischen" Folge? Nun: Jedes „innere" Glied einer arithmetischen Folge ist das **arithmetische Mittel** seiner beiden Nachbarglieder:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Offensichtlich bestehen gewisse Abhängigkeiten zwischen den Folgengliedern:

— In **(1)** liegen Folgen vor, bei denen das nächste Glied aus seinem Vorgänger durch Addition einer konstanten Größe entsteht. (**Arithmetische Folgen!**)

— In **(2)** liegen Folgen vor, bei denen das nächste Glied aus seinem Vorgänger durch Multiplikation mit einem konstanten Faktor entsteht. (**Geometrische Folgen!**)

Arithmetische Folge: $a_1 \xrightarrow{+d} a_2 \xrightarrow{+d} a_3 \xrightarrow{+d} a_4 \xrightarrow{+d} a_5 \xrightarrow{+d}$

Geometrische Folge: $b_1 \xrightarrow{\cdot q} b_2 \xrightarrow{\cdot q} b_3 \xrightarrow{\cdot q} b_4 \xrightarrow{\cdot q} b_5 \xrightarrow{\cdot q}$

Definition:

Eine **geometrische Folge (GF)** ist eine Folge, bei der der **Quotient** zweier Nachbarglieder konstant ist.

Der Betrag von jedem „inneren" Glied einer geometrischen Folge ist das **geometrische Mittel** der Beträge seiner beiden Nachbarglieder:

$$|b_n| = \sqrt{|b_{n-1}| \cdot |b_{n+1}|}$$

Die Glieder einer endlichen Folge können zu einer (nicht ausgerechneten) Summe zusammengefasst werden. Man spricht dann von einer **Reihe**.

Anders formuliert: Ein Term der Gestalt $a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ heißt **endliche Reihe** mit k Gliedern,

z. B.: (1) $2+4+8+16+32+64$ (2) $2-2+2-2+2-2$
(3) $1+0{,}5+0{,}25+0{,}125$ (4) $1+2+3+4$

Es gibt auch **unendliche Reihen** (z. B.: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$). Man überlegt sich leicht, dass diese unendliche Reihe sogar eine Summe hat, nämlich 1. Man denke sich ein Blatt Papier zerschnitten in die Hälfte, geviertelt usw. und addiere alle Teile.

2. Arithmetische Folgen

Die Folge $\langle 2, 5, 8, 11 \rangle$ ist eine arithmetische Folge. Die Differenz d der Folge ist 3. Es gilt:

$$a_1 = 2$$
$$a_2 = a_1 + d = 2 + 3 = 5$$
$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d = 2 + 6 = 8$$
$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d = 2 + 9 = 11$$

Allgemein: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ (explizite Darstellung)

Die **rekursive Darstellung** einer arithmetischen Folge lautet bei gegebenem 1. Glied a_1 allgemein:

$$a_n = a_{n-1} + d$$

Beispiel:
Gegeben: arithmetische Folge $a_1 = 4$, $d = 2$
Gesucht: a_6

Lösung:
$a_6 = a_1 + 5d = 4 + 10 = 14$ $a_6 = 14$

Eine oft wiederholte Anekdote berichtet, dass dem neunjährigen **Carl Friedrich GAUSS** in der Grundschule die Aufgabe gestellt wurde, alle ganzen Zahlen von 1 bis 100 zu addieren. Innerhalb sehr kurzer Zeit hatte GAUSS das richtige Ergebnis 5050 durch folgende Überlegung herausgefunden:

$$\begin{array}{r} 1 \\ +2 \\ +3 \\ +4 \\ \vdots \\ +97 \\ +98 \\ +99 \\ +100 \\ \hline 5050 \end{array} = 50 \cdot 101 \qquad \underbrace{101+101+101+101+\cdots}_{50 \text{ Summanden}}$$

Carl Friedrich GAUSS
(1777—1855)

Dieser Gedankengang findet auch Anwendung bei der Ableitung der **Summenformel** für eine endliche arithmetische Folge (AF).

Bezeichnet man mit s_n die Summe der ersten n Summanden einer arithmetischen Folge, so gilt:

$$s_{100} = 1 + 2 + \cdots + 100$$

$$\begin{array}{rcrcl} 1 & + & 100 & = & 101 \\ 2 & + & 99 & = & 101 \\ 3 & + & 98 & = & 101 \\ \ldots & & \ldots & & \ldots \\ 99 & + & 2 & = & 101 \\ 100 & + & 1 & = & 101 \end{array}$$

$$s_{100} + s_{100} = 2s_{100} = 101 \cdot 100$$

$$s_{100} = \frac{100}{2} \cdot 101 = 5050$$

Allgemeine Herleitung:

$$\left.\begin{array}{l} s_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n \\ s_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \cdots + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1 \end{array}\right\} +$$

$$2s_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n) = n \cdot (a_1 + a_n)$$

$$2s_n = n \cdot (a_1 + a_n)$$

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

$$\boxed{s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)}$$

Summe einer arithmetischen Folge:

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n) \text{ bzw.}$$

$$s_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

Die Summe einer arithmetischen Folge mit n Gliedern ist gleich dem n-fachen arithmetischen Mittel aus dem ersten und dem letzten Glied der Folge.

Beispiel:

Man berechne s_{11} einer arithmetischen Folge, wenn $a_1 = 9$ und $d = 5$ ist.

Lösung:

$$s_{11} = \frac{11}{2}(a_1 + a_{11}) = \frac{11}{2}(a_1 + a_1 + 10d) = \frac{11}{2}(2 \cdot 9 + 10 \cdot 5) = 374 \qquad s_{11} = 374$$

Beispiel:
Gegeben: arithmetische Folge $s_n = 220$, $a_3 = 17$, $a_6 = 38$.
Gesucht: n

Lösung:

$$
\begin{array}{lrcl}
(1) & 220 & = & \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] \\
(2) & 17 & = & a_1 + 2d \quad |\cdot(-1) \\
(3) & 38 & = & a_1 + 5d \quad (+) \\
\hline
(4) & 21 & = & 3d \\
 & 7 & = & d \\
(2) & 17 & = & a_1 + 14 \\
 & 3 & = & a_1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcl}
(1) & 220 & = & \frac{n}{2}[6 + (n-1)\cdot 7] \\
 & 440 & = & n(7n-1) \\
 & 0 & = & 7n^2 - n - 440 \\
 & n_{1,2} & = & \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4\cdot 7\cdot 440}}{2\cdot 7} \\
 & n_{1,2} & = & \frac{1 \pm 111}{14} \\
 & n_1 & = & 8 \\
 & n_2 & = & \frac{-55}{7} \notin \mathbb{N}^*\text{, scheidet daher als Lösung aus.}
\end{array}
$$

Die Folge hat 8 Glieder.

Beispiel:
Die Seitenlängen eines rechtwinkeligen Dreiecks bilden eine arithmetische Folge. Die Höhe auf die Hypotenuse ist 24 cm lang. Es ist der Umfang u zu berechnen.

Lösung:

$$
\begin{array}{lrcl}
(1) & b & = & a - d \\
(2) & c & = & a + d \\
(3) & c^2 & = & a^2 + b^2 \\
(4) & h & = & \frac{ab}{c} \\
(5) & u & = & a + b + c^{1)} \\
\hline
(3) & (a+d)^2 & = & a^2 + (a-d)^2 \\
 & a^2 + 2ad + d^2 & = & a^2 + a^2 - 2ad + d^2 \\
 & 2ad & = & a^2 - 2ad \\
 & 0 & = & a(a - 4d) \\
 & a & = & 4d \quad \text{(Die Lösung } a = 0 \text{ ist unbrauchbar.)} \\
(1) & b & = & 3d \\
(2) & c & = & 5d \\
(4) & h & = & \frac{4d\cdot 3d}{5d} \\
 & 24 & = & \frac{12d}{5} \Leftrightarrow d = 10 \\
(5) & u & = & 4d + 3d + 5d \\
 & u & = & 12d \Rightarrow u = 120
\end{array}
$$

Der Umfang beträgt 120 cm.

C, b, a, h, A, c, B

$$A = \frac{ab}{2} = \frac{ch}{2} \Rightarrow h = \frac{ab}{c}$$

[1] Die Verwendung der Summenformel wäre zwar richtig, aber ein übertriebener Aufwand.

AUFGABEN

1. Die folgende Tabelle ist zu vervollständigen:

	a_1	d	n	a_n	s_n
a)	4	5	6		
b)	3	2		19	
c)	−30	5			−75
d)	$\frac{1}{5}$		12	5,7	
e)	$\frac{1}{4}$		16		44
f)	4			−7,8	−114
g)		−3	4	−9	
h)		−2	24		72

2. Man berechne a_1, d und s_n: **a)** $a_{12}=42$, $a_8=66$, $n=4$ **b)** $a_8=-16$, $s_5=-30$, $n=8$ **c)** $a_6=15$, $s_3=-9$, $n=6$ **d)** $s_4=\frac{1}{3}$, $s_7=-\frac{7}{6}$, $n=3$

3. **Lineare Interpolation:** Zwischen zwei Zahlen a und b sind m Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_m$ so einzuschalten, dass sie mit den Zahlen a und b eine arithmetische Folge bilden.

a) Man berechne die Differenz d und die Werte a_n, m, $n \in \mathbb{N}^*$ und $n \leq m$, allgemein!

b) $a=8$, $b=22$, $m=3$. Gesucht: a_n, $n \in \{1, 2, 3\}$

c) $a=\frac{1}{3}$, $b=-2$, $m=5$. Gesucht: a_n, $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

d) $a=16$, $b=-11$, $a_1+a_2+\dots+a_m=20$. Gesucht: a_n, m, $n \in \mathbb{N}^*$ und $n \leq m$

Anleitung: Durch das Einschalten der m Zahlen entsteht die arithmetische Folge $\langle a, a_1, a_2, \dots, a_m, b\rangle$ mit $m+2$ Gliedern. Aus dem Anfangsglied a und dem Endglied b berechne man mit Hilfe des Bildungsgesetzes der arithmetischen Folge die Differenz d und setze diesen Wert sowie den Wert der ersten eingeschalteten Zahl a_1 in das Bildungsgesetz der arithmetischen Folge ein. Die auf diese Weise in **a)** ermittelte Formel wende man in **b)** und **c)** an. In **d)** setze man $b=a+(m+1)d$ und $a_1+a_2+\dots+a_m = \frac{m}{2}(a_1+a_m)=\frac{m}{2}(a+d+b-d)=\frac{m}{2}(a+b)$.

4. In einer arithmetischen Folge ist die Summe aus dem dritten und dem 11. Glied 12, das Quadrat des 4. Glieds ist 9. Die Summe der ersten 10 Glieder dieser Folge ist zu berechnen.

5. Die Zahl 21 soll so in drei natürliche Summanden zerlegt werden, dass die Teile eine arithmetische Folge bilden. Das Quadrat des ersten Glieds dieser Folge ist um 68 kleiner als das Produkt der zwei anderen Glieder. Wie lauten die drei Summanden?

6. Drei Zahlen bilden eine arithmetische Folge. Ihre Summe ist 18, die Summe der reziproken Werte ist $\frac{23}{30}$. Wie lautet die Folge?

Anleitung: $a_1=a_2-d$ und $a_3=a_2+d$

7. 4 Zahlen bilden eine arithmetische Folge. Ihre Summe ist 16, die Summe ihrer Quadrate ist 84. Wie lautet die Folge?

Anleitung: $a_1 = x - \frac{3}{2}d,\ a_2 = x - \frac{d}{2},\ a_3 = x + \frac{d}{2},\ a_4 = x + \frac{3}{2}d$

8. Die Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks bilden eine arithmetische Folge. Die Höhe beträgt 2,4 cm. Die Seitenlängen sind zu berechnen.

9. Die Längen der Kanten eines Quaders bilden eine arithmetische Folge mit der Differenz 3. Die Oberfläche beträgt 276 cm^2. Wie groß ist das Volumen?

3. Geometrische Folgen

Die Folge $\langle 3, -6, 12, -24 \rangle$ ist eine geometrische Folge. Der Quotient q der Folge ist -2. Es gilt:

$$b_1 = 3$$
$$b_2 = b_1 \cdot q = 3 \cdot (-2) = -6$$
$$b_3 = b_2 \cdot q = b_1 \cdot q^2 = 3 \cdot (-2)^2 = 12$$
$$b_4 = b_3 \cdot q = b_1 \cdot q^3 = 3 \cdot (-2)^3 = -24$$

Allgemein: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ (explizite Darstellung)

Die **rekursive Darstellung** einer geometrischen Folge lautet allgemein:

$$b_n = b_{n-1} \cdot q$$

Beispiel:
Gegeben: geometrische Folge, $b_1 = 2$, $b_5 = 162$
Gesucht: q

Lösung:

$$b_5 = b_1 \cdot q^4 \Leftrightarrow q = \pm \sqrt[4]{\frac{b_5}{b_1}} = \pm \sqrt[4]{\frac{162}{2}} = \pm \sqrt[4]{81} = \pm 3 \quad q = \pm 3$$

Ähnlich wie bei der arithmetischen Folge gibt es auch bei der geometrischen Folge eine allgemeine Summenformel:

$$s_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad (q \neq 1)$$

Beweis:

$s_n = b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + \dots + b_1 \cdot q^{n-1}$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit q und erhalten

$s_n \cdot q = b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + \dots + b_1 \cdot q^n$.

Subtrahiert man die zweite Gleichung von der ersten, so ergibt sich:

$$s_n - s_n \cdot q = b_1 - b_1 \cdot q^n \Leftrightarrow s_n \cdot (1-q) = b_1 \cdot (1-q^n) \Leftrightarrow s_n = b_1 \frac{1-q^n}{1-q} = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Summe einer geometrischen Folge:

$$s_n = b_1 \frac{1-q^n}{1-q} = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Es ist günstig, die erste Formel für $q < 1$, die zweite Formel für $q > 1$ anzuwenden.

Für $q = 1$ sind die obigen Formeln nicht definiert, in diesem Fall gilt:

$$s_n = n \cdot b_1$$

Beispiel:
Von einer geometrischen Folge kennt man $b_1 = 3$ und $b_4 = 24$. Man berechne s_6.

Lösung:

$$b_4 = b_1 \cdot q^3 \Rightarrow q = \sqrt[3]{\frac{b_4}{b_1}} = \sqrt[3]{\frac{24}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2 \qquad s_6 = 3 \cdot \frac{2^6 - 1}{2 - 1} = 189 \qquad s_6 = 189$$

Beispiel:
Gegeben: geometrische Folge, $b_5 + b_6 = 144$, $b_4 = 24$, $b_n = 384$
Gesucht: n, q

Lösung:

$$(1)\quad b_5 + b_6 = b_1 \cdot q^4 + b_1 \cdot q^5$$
$$(2)\quad b_4 = b_1 \cdot q^3$$
$$(3)\quad b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

$$(1)\quad 144 = b_1 \cdot (q^4 + q^5)$$
$$(2)\quad 24 = b_1 \cdot q^3$$

} Nun wird Gleichung **(1)** durch Gleichung **(2)** dividiert!

$$(4)\quad 6 = q + q^2$$
$$0 = q^2 + q - 6$$
$$q_{1,\,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 6}}{2}$$
$$q_{1,\,2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$
$$q_1 = 2$$
$$q_2 = -3$$
$$(2)\quad b_1 = \frac{24}{q^3}$$
$$(b_1)_1 = 3$$
$$(b_1)_2 = -\frac{8}{9}$$
$$(3)\quad 384 = 3 \cdot 2^{n-1}$$
$$128 = 2^{n-1}$$
$$2^7 = 2^{n-1}$$
$$n = 8$$

$q_2 = -3$ und $(b_1)_2 = -\frac{8}{9}$ müssen ausgeschieden werden, weil sich Folgendes ergibt:

$$(3)\quad 384 = -\frac{8}{9}(-3)^{n-1}$$
$$-432 = (-3)^{n-1} \Rightarrow \text{ da } n \in \mathbb{N}_g \Rightarrow (-1)^{n-1} = -1$$
$$(-1) \cdot 432 = (-1)^{n-1} \cdot 3^{n-1}$$
$$432 = 3^{n-1} \qquad |\text{ Logarithmieren}$$
$$\ln 432 = (n-1) \cdot \ln 3$$
$$n = \frac{\ln 432}{\ln 3} + 1$$
$$n = 6{,}52\ldots \notin \mathbb{N}^*$$

Die Folge besteht aus 8 Gliedern, der Quotient beträgt 2.

Beispiel:
22000 Einwohner leben in einer Stadt, der jährliche Bevölkerungsrückgang beträgt 3 %. Nehmen wir an, dieser Rückgang ist konstant. Nach wie vielen Jahren ist dann mit einem Einwohnerstand von 10000 zu rechnen?

Lösung:
Eine **Abnahme um 3 %** bedeutet das selbe wie ein **Sinken auf 97 %** des vorhergehenden Wertes.
Es gilt: $b_1 = 22000$, $b_n = 10000$, $q = 0{,}97$. Gesucht: n

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$
$$\frac{b_n}{b_1} = q^{n-1} \qquad |\text{ Logarithmieren}$$
$$\ln \frac{b_n}{b_1} = (n-1) \cdot \ln q$$
$$n = \frac{\ln \frac{b_n}{b_1}}{\ln q} + 1$$
$$n = \frac{\ln \frac{10\,000}{22\,000}}{\ln 0{,}97} + 1 = \frac{\ln 5 - \ln 11}{\ln 0{,}97} + 1 \qquad n \approx 26{,}89$$

Nach ca. 27 Jahren ist mit einem Einwohnerstand von 10000 Bürgern zu rechnen.

AUFGABEN

10. Die folgende Tabelle ist zu vervollständigen:

	b_1	q	n	b_n	s_n
a)	6	2	4		
b)	$\frac{1}{3}$	2		$\frac{8}{3}$	
c)	8	-3			-1456
d)	$\frac{1}{5}$		5	125	
e)	$\frac{1}{12}$			$\frac{27}{4}$	$\frac{121}{12}$
f)		-7	3	784	
g)		$\frac{1}{2}$	5		$\frac{31}{4}$
h)		7		-4116	-4800

11. Man berechne b_1, q und s_n: **a)** $b_3 = 4$, $b_6 = 32$, $n = 6$ **b)** $b_3 = 1$, $b_5 = \frac{1}{4}$, $n = 3$ **c)** $b_2 = 1$, $b_5 = \frac{1}{27}$, $n = 4$ **d)** $b_2 = \frac{1}{9}$, $b_7 = 27$, $n = 5$

12. Zwischen zwei Zahlen a und b sollen m weitere Zahlen $b_1, b_2, \ldots, b_m$ so eingeschaltet werden, dass sie mit a und b eine geometrische Folge bilden.

a) Man berechne den Quotienten q und die Werte b_n, $m, n \in \mathbb{N}^*$ und $n \leqslant m$, allgemein!

Anleitung: Durch das Einschalten der m Zahlen entsteht die geometrische Folge $\langle a, b_1, b_2, \ldots, b_m, b \rangle$ mit $m + 2$ Gliedern. Aus dem Anfangsglied a und dem Endglied b berechne man mit Hilfe des Bildungsgesetzes der geometrischen Folge den Quotienten q und setze diesen Wert sowie den Wert der ersten eingeschalteten Zahl b_1 in das Bildungsgesetz der geometrischen Folge ein.

b) Ein Unternehmen stellt 6 Typen von Kränen her. Die Tragkraft der Typen T_n, $n \in \mathbb{N}^*$ und $n \leqslant 6$, soll so abgestuft sein, dass sie annähernd eine geometrische Folge bilden. Die geringste Tragkraft soll $T_1 = 10$ kN, die größte $T_6 = 1000$ kN sein. Die Tragkräfte T_2 bis T_5 sind zu berechnen[1)].

c) $a = 7$, $b = 18$, $m = 5$. Gesucht: b_n, $n \in \mathbb{N}^*$ und $n \leqslant 5$.

d) Um die gleichschwebend-temperierte Stimmung zu erhalten, schaltet man zwischen die Töne einer Oktave 11 weitere Töne so ein, dass das Verhältnis der Frequenzen zweier aufeinander folgender Töne gleichbleibt. Es ist der Quotient der auf diese Weise gebildeten geometrischen Folge der Frequenzen zu bilden, wenn das Frequenzverhältnis der Oktave 1 : 2 lautet!

13. Das zweite Glied einer geometrischen Folge ist um 4 größer als das erste und das dritte um 9 kleiner als das vierte. Wie lautet die Folge?

14. In einer geometrischen Folge mit 5 Gliedern ist die Summe der geradstelligen Glieder 30, die Summe der ungeradstelligen 63. Wie lautet die Folge?

[1)] In der Normung versucht man Größenabstufungen zu finden, die bei einer minimalen Anzahl von Stufen den Erfordernissen der Praxis weitestgehend Rechnung tragen. In Technik und Wirtschaft bedient man sich dazu oft der geometrischen Folge, z. B. bei den Papierformaten, bei der Stückelung von Münzen und Banknoten usw.

15. In einer geometrischen Folge ist die Summe der ersten drei Glieder 26. Das dritte Glied ist um 16 kleiner als das erste. Wie lautet die Folge?

16. Drei Personen teilen sich den Betrag von 8052,— Euro so, dass die Teile eine geometrische Folge bilden und der erste um 3828,— Euro weniger bekommt als die zwei anderen zusammen bekommen. Wie viel erhält jeder?

17. Die Summe der drei Glieder einer geometrischen Folge ist 63. Die Summe der ersten zwei Glieder verhält sich zur Summe der letzten zwei wie 1 : 4. Wie lautet die Folge?

18. Die Summe der drei Glieder einer geometrischen Folge ist 39. Die Summe ihrer Quadrate ist 741. Wie lautet die Folge?

19. Die Summe der drei Glieder einer geometrischen Folge ist 19, ihr Produkt ist 216. Wie lautet die Folge?

20. Die Zahl 111 soll so in drei Teile geteilt werden, dass die Teile eine geometrische Folge bilden und ihr Produkt 46656 beträgt. Wie lauten die drei Zahlen?

21. Drei Zahlen bilden eine arithmetische Folge mit der Summe 60. Vermindert man das zweite Glied um 8, so erhält man eine geometrische Folge. Wie lauten die drei Zahlen?

22. Drei Zahlen bilden eine geometrische Folge. Vermindert man das letzte Glied um 4, so erhält man eine arithmetische Folge. Vergrößert man in dieser Folge das erste Glied um 2, so entsteht eine geometrische Folge. Wie lautet die ursprüngliche geometrische Folge?

23. Ein Kapital ergibt in 8 Jahren bei einem Jahreszinssatz von 5 % samt Zinseszinsen den Betrag von 12468,— Euro. Wie groß war das Kapital am Beginn der 8 Jahre?

24. Eine Schuld von 40000,— Euro soll bei einem Jahreszinssatz von 10 % durch 8 gleichbleibende Zahlungen jeweils am Ende eines jeden der folgenden Jahre beglichen werden. Wie groß ist dieser jährlich zu zahlende Betrag?

25. Der Erfinder des Schachspiels soll folgenden Lohn verlangt haben: für das erste Feld ein Reiskorn und für jedes folgende Feld doppelt soviel wie für das jeweils vorhergehende. Wie viele Reiskörner wären auf diese Art zusammen gekommen?

26. Unter dem Titel *„Als Großvater freien ging"* erzählt **Peter ROSEGGER** (1843—1918) unter anderem darüber, wie sein Großvater von einem schielenden, weißhaarigen Männlein eine Uhr kaufte. Diese Uhr besaß eine Schildkrötenschale am Rücken und war ringsum mit Silbernieten besetzt.

„. . ., ‚siehst du die Silbernieten da am Rand herum?'
‚Sind nicht übel,' entgegnete mein Großvater.
‚Übel oder nicht,' rief der schielende Weißkopf, ‚nach diesen Nieten zahlt mir die Uhr. – Für die erste Niete gibst mir ein Haferkorn, für die zweite gibst mir zwei Haferkörner, für die dritte vier, für die vierte acht, gehört dein mitsamt der Silberkette und dem Frauentaler, der dran hängt.'
‚Gilt schon!' lachte mein Großvater, bei sich bedenkend, daß er für eine solche Uhr eine Handvoll Hafer leicht geben könne.
Der Kreuzwirt hatte im selben Augenblick meinen Großvater noch heimlich in die Seite gestoßen, der aber hielt das für lustige Beistimmung und schlug seine Rechte in die des Alten. ‚Es gilt, und alle Männer, die beim Tisch sitzen, sind Zeugen!' [. . .]
Zuerst wurden die Nieten gezählt, die um das Schildkrötenblatt herumliefen; es waren deren gerade siebzig."[1]

Wie viele Haferkörner wären für die Uhr zu „bezahlen" gewesen?

---

[1]) Aus „Das Krieglacher Waldheimatbuch", herausgegeben vom Roseggerbund „Waldheimat" Krieglach.

4. Monotone[1] und beschränkte Folgen

Betrachten wir die Folge

$\langle 1, 2, 3, 4, \ldots\rangle$

$\langle 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots\rangle$

so erkennen wir:

Jedes Glied ist **größer** als das unmittelbar vorhergehende. So ist z. B. $2 > 1$, $3 > 2$ usw.

Jedes Glied ist **kleiner** als das unmittelbar vorhergehende. So ist z. B. $\frac{1}{10} < 1$, $\frac{1}{100} < \frac{1}{10}$ usw.

Wegen dieser Eigenschaft spricht man von einer

streng monoton wachsenden Folge.

Definition:

Eine Folge $\langle a_n\rangle$ heißt **monoton wachsend**, wenn jedes ihrer Glieder **größer** als das unmittelbar vorhergehende oder diesem gleich ist, d. h. wenn für alle $n \in \mathbb{N}^*$ gilt: $a_{n+1} \geqq a_n$ [2].

streng monoton fallenden Folge.

Definition:

Eine Folge $\langle a_n\rangle$ heißt **monoton fallend**, wenn jedes ihrer Glieder **kleiner** als das unmittelbar vorhergehende oder diesem gleich ist, d. h. wenn für alle $n \in \mathbb{N}^*$ gilt: $a_{n+1} \leqq a_n$ [2].

Weitere Beispiele für

monoton wachsende (steigende) Folgen:

$\langle a_n\rangle = \langle 1+2n\rangle = \langle 3, 5, 7, 9, \ldots\rangle$

$\langle a_n\rangle = \langle n^2\rangle = \langle 1, 4, 9, 16, \ldots\rangle$

monoton fallende Folgen:

$\langle a_n\rangle = \left\langle \frac{1}{n^2}\right\rangle = \left\langle 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots\right\rangle$

$\langle a_n\rangle = \left\langle \frac{n}{n^2+2}\right\rangle = \left\langle \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{11}, \frac{2}{9}, \frac{5}{27}, \ldots\right\rangle$

Nicht immer lässt sich sofort sagen, welche Art der Monotonie vorliegt. Oft ist eine genaue Untersuchung notwendig.

Beispiel:

Man ermittle, welche Art der Monotonie bei der unendlichen Folge mit dem Bildungsgesetz $\langle a_n\rangle = \left\langle \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}\right\rangle$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ vorliegt.

Lösung:

Zunächst berechnen wir einige Glieder der Folge: $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{3}{4}$, $a_3 = \frac{5}{9}$, $a_4 = \frac{7}{16}$, …, $a_8 = \frac{15}{64}$

Wir vermuten, dass eine streng monoton fallende Folge vorliegt. Es müsste also $a_{n+1} < a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$ gelten.

$$a_{n+1} < a_n$$

$$\frac{2}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} \quad | \cdot n^2(n+1)^2$$

$$2n^2(n+1) - n^2 < 2n(n+1)^2 - (n+1)^2$$

$$2n^3 + 2n^2 - n^2 < 2n^3 + 4n^2 + 2n - n^2 - 2n - 1$$

$$0 < 2n^2 - 1$$

$$\frac{1}{2} < n^2$$

$$L = \mathbb{N}^*$$

Die vorkommenden Nenner sind für alle $n \in \mathbb{N}^*$ positiv. Daher ist die gezeigte Umformung der Ungleichung zulässig.

Unsere Vermutung hat sich bewahrheitet, denn da die letzte Ungleichung für alle $n \in \mathbb{N}^*$ eine wahre Aussage darstellt, muss auch die Ausgangsgleichung für alle $n \in \mathbb{N}^*$ erfüllt sein.

Somit gilt: **Die Folge $\langle a_n\rangle = \left\langle \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}\right\rangle$ ist eine streng monoton fallende Folge.**

[1]) monoton (griech.): eintönig, zugehöriges Hauptwort: Monotonie, die.

[2]) Wird das Gleichheitszeichen ausgeschlossen, spricht man von einer **streng monoton wachsenden Folge** bzw. von einer **streng monoton fallenden Folge**.

Auch andere Arten (Sonderformen) der Monotonie sind möglich. Denken wir an konstante Folgen wie z. B. $\langle 4, 4, 4, 4, 4, 4, \ldots \rangle$: Diese Folge ist sowohl monoton wachsend als auch monoton fallend. Strenge Monotonie liegt allerdings nicht vor.

Die Glieder der monoton fallenden Folge $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{1}{n} \right\rangle = \left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \right\rangle$ liegen sicher im Intervall [0,1]. Es besteht also die Beziehung $0 \leqslant a_n \leqslant 1$.

0 wird als **untere Schranke**, 1 als **obere Schranke** bezeichnet. Jede Zahl, die größer als eine obere Schranke B ist, ist gleichfalls eine obere Schranke. Entsprechendes gilt für untere Schranken.

Eine sogenannte **„beschränkte" Folge** (vgl. Definition in der Außenspalte) besitzt unendlich viele obere und untere Schranken.

Eine Folge $\langle a_n \rangle$ heißt **unbeschränkt**, wenn sie keine obere oder untere Schranken besitzt.

Beispiele für Folgen und deren obere bzw. untere Schranken:

(1) $\langle 5 - 3n \rangle = \langle 2, -1, -4, -7, -10, \ldots \rangle$, z.B. $B = 3$

(2) $\langle 2 + 3n \rangle = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, z.B. $b = 4$

(3) $\left\langle \frac{n}{n+1} \right\rangle = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, z.B. $b = 0$, $B = 1$

(4) $\left\langle \frac{(-1)^n}{n}(n+1) \right\rangle = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, z.B. $b = -3$, $B = 2$

Definition:

Eine Folge $\langle a_n \rangle$ heißt **beschränkt**, wenn es zwei reelle Zahlen b und B gibt, so dass die Ungleichung $b \leqslant a_n \leqslant B$ für jedes Glied $\langle a_n \rangle$ der Folge erfüllt ist. b wird als **untere Schranke**, B als **obere Schranke** der Folge bezeichnet.

Die größte untere Schranke heißt **Infimum**.

Die kleinste obere Schranke heißt **Supremum**.

Beispiel:

Gegeben ist die monoton steigende Folge $\left\langle \frac{3n+1}{n+1} \right\rangle$. Es ist zu ermitteln, ob **a)** $\frac{5}{2}$ **b)** 4 eine obere Schranke dieser Folge ist.

Lösung:

a)

$a_n \leqslant B$

$\frac{3n+1}{n+1} \leqslant \frac{5}{2} \quad | \cdot 2 \cdot (n+1)$

$6n + 2 \leqslant 5n + 5$

$n \leqslant 3$

$L = \{1, 2, 3\} \; (\neq \mathbb{N}^*)$

$\frac{5}{2}$ **ist keine obere Schranke.**

b)

$a_n \leqslant B$

$\frac{3n+1}{n+1} \leqslant 4 \quad | \cdot (n+1)$ Der Nenner ist für alle $n \in \mathbb{N}^*$ positiv.

$3n + 1 \leqslant 4n + 4$

$0 \leqslant n + 3$

$L = \mathbb{N}^*$

4 ist eine obere Schranke. (Es ist zu vermuten, dass es noch weitere obere Schranken gibt, die kleiner als 4 sind.)

Beispiel:

Es ist zu untersuchen, welche Glieder der Folge $\left\langle \frac{5n - 40}{1 - 2n} \right\rangle$ kleiner als 6 sind.

Lösung:

$\frac{5n - 40}{1 - 2n} < 6 \quad | \cdot (1 - 2n)$ Der Nenner ist für alle $n \in \mathbb{N}^*$ negativ. Es ist daher die Ordnungsrelation umzukehren.

$5n - 40 > 6 - 12n$

$17n > 46$

$n > 2,7$

a_3 und alle folgenden Glieder sind kleiner als 6.

AUFGABEN

27. Welche dieser Folgen sind monoton?

a) $\langle 1, 3, 5, 7, \ldots\rangle$ **b)** $\langle 1, -2, 3, -4, \ldots\rangle$ **c)** $\langle -1, -3, -5, -7, \ldots\rangle$

d) $\left\langle 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots\right\rangle$ **e)** $\langle 2, 2, 2, 2, \ldots\rangle$ **f)** $\langle 2, -2, 2, -2, \ldots\rangle$

28. Welche Art von Monotonie liegt vor?

a) $\langle a_n\rangle = \left\langle \frac{n}{n+1}\right\rangle$ **b)** $\langle a_n\rangle = \langle 3-2n\rangle$ **c)** $\langle a_n\rangle = \left\langle \frac{3n}{2n+1}\right\rangle$

d) $\langle a_n\rangle = \left\langle \frac{2n}{n^2+2}\right\rangle$ **e)** $\langle a_n\rangle = \left\langle \frac{n^2}{2n+3}\right\rangle$ **f)** $\langle a_n\rangle = \left\langle \frac{3n+1}{n}\right\rangle$

29. Man untersuche die Monotonie der

a) arithmetischen Folge für die Fälle $d<0$, $d \leqslant 0$, $d=0$, $d \geqslant 0$ und $d>0$.

b) geometrischen Folge mit $b_1>0$ für die Fälle $q<0$, $0<q<1$, $q=1$ und $q>1$.

c) geometrischen Folge mit $b_1<0$ für die Fälle $q<0$, $0<q<1$, $q=1$ und $q>1$.

30. Es ist festzustellen, ob die Werte b bzw. B untere bzw. obere Schranken der Folgen $\langle a_n\rangle$ sind.

a) $b=1$, $B=\frac{3}{2}$, $\langle a_n\rangle = \left\langle \frac{3n}{2n+1}\right\rangle$ **b)** $b=-\frac{5}{2}$, $B=-2$, $\langle a_n\rangle = \left\langle \frac{4n-1}{1-2n}\right\rangle$

c) $b=\frac{1}{2}$, $B=\frac{3}{2}$, $\langle a_n\rangle = \left\langle \frac{2n-1}{n+1}\right\rangle$ **d)** $b=\frac{5}{4}$, $B=\frac{3}{2}$, $\langle a_n\rangle = \left\langle \frac{1+2^n}{2^n}\right\rangle$

e) $b=-2$, $B=1$, $\langle a_n\rangle = \left\langle \frac{3n+2}{4n-1}(-1)^n\right\rangle$ **f)** $b=-\frac{1}{2}$, $B=\frac{2}{3}$, $\langle a_n\rangle = \left\langle \frac{2n}{3n+1}(-1)^n\right\rangle$

31. Es ist für die Folgen $\langle a_n\rangle$ je eine untere und eine obere Schranke zu ermitteln:

a) $\langle a_n\rangle = \left\langle \frac{2n}{n+1}\right\rangle$ **b)** $\langle a_n\rangle = \left\langle \frac{1-3n}{2n-1}\right\rangle$ **c)** $\langle a_n\rangle = \left\langle \frac{1}{n^2+1}\right\rangle$

d) $\langle a_n\rangle = \left\langle \frac{n^2+2}{3n^2}\right\rangle$ **e)** $\langle a_n\rangle = \left\langle \frac{n-1}{n+1}\right\rangle$ **f)** $\langle a_n\rangle = \left\langle \frac{2n-1}{n+1}\right\rangle$

32. Man berechne das Glied der Folge $\langle a_n\rangle$ mit dem kleinsten Index, welches die daneben angeführte Beziehung erfüllt.

a) $\langle a_n\rangle = \left\langle \frac{3n+2}{1-2n}\right\rangle$, $a_n>-2$ **b)** $\langle a_n\rangle = \left\langle \frac{1-3n}{2n-1}\right\rangle$, $a_n>-\frac{17}{11}$ **c)** $\langle a_n\rangle = \left\langle \frac{3n+1}{n}\right\rangle$, $a_n<\frac{7}{2}$

d) $\langle a_n\rangle = \left\langle \frac{n^2}{2n+3}\right\rangle$, $a_n>1000$ **e)** $\langle a_n\rangle = \left\langle \frac{2n}{n^2+2}\right\rangle$, $a_n<\frac{1}{100}$ **f)** $\langle a_n\rangle = \left\langle \frac{3n+1}{n^2}\right\rangle$, $a_n<\frac{1}{10}$

33. Es ist zu zeigen, dass die angegebenen Werte b bzw. B Infimum bzw. Supremum der nachstehenden Folgen sind.

a) $\langle a_n\rangle = \left\langle \frac{1}{n}\right\rangle$, $b=0$ **b)** $\langle a_n\rangle = \left\langle \frac{3n-1}{2n+3}\right\rangle$, $B=\frac{3}{2}$ **c)** $\langle a_n\rangle = \left\langle \frac{5n+1}{2n-1}\right\rangle$, $b=\frac{5}{2}$

d) $\langle a_n\rangle = \left\langle \frac{7n-4}{3n+2}\right\rangle$, $B=\frac{7}{3}$ **e)** $\langle a_n\rangle = \left\langle \frac{1}{2^n}\right\rangle$, $b=0$ **f)** $\langle a_n\rangle = \langle \sqrt[n]{2}\rangle$, $b=1$

Anleitung: Zunächst weise man nach, dass b eine untere bzw. B eine obere Schranke ist. Dann nehme man an, es gäbe eine um $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ größere untere bzw. kleinere obere Schranke und zeige, dass diese Annahme auf einen Widerspruch führt.

34. Infimum und Supremum der Folgen $\langle a_n \rangle$ sind zu ermitteln.

a) $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{n}{n+1} \right\rangle$ **b)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{2n+1}{3n-1} \right\rangle$ **c)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{4n-3}{n+1} \right\rangle$ **d)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{9n+5}{3n-2} \right\rangle$

Anleitung: Man berechne zunächst einige Glieder der Folge und weise ein Monotonieverhalten nach. Unter Beachtung des nachstehenden Satzes ist der gesuchte Wert zu ermitteln:

> Bei einer monoton wachsenden (fallenden) Folge ist das erste Glied zugleich die größte untere (kleinste obere) Schranke.

35. Es ist zu zeigen, dass es für die nachstehenden Folgen keine obere Schranke gibt.

a) $\langle a_n \rangle = \langle n^2 \rangle$ **b)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{n+1}{2} \right\rangle$ **c)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{2n-1}{3} \right\rangle$

d) $\langle a_n \rangle = \langle \sqrt{n} \rangle$ **e)** $\langle a_n \rangle = \langle 2^n \rangle$ **f)** $\langle a_n \rangle = \left\langle 1+\frac{n}{2} \right\rangle$

Anleitung: Man zeige, dass es für jede noch so große obere Schranke B jeweils eine Gliednummer $n \in \mathbb{N}^*$ gibt, sodass die Ungleichung $a_n > B$ gilt.

36. Man zeige, dass es für die nachstehenden Folgen keine untere Schranken gibt.

a) $\langle a_n \rangle = \langle -n^2 \rangle$ **b)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{1-n}{2} \right\rangle$ **c)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{1-3n}{3} \right\rangle$

d) $\langle a_n \rangle = \langle -\sqrt{n} \rangle$ **e)** $\langle a_n \rangle = \left\langle 1-\frac{n}{2} \right\rangle$ **f)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{2-n}{3} \right\rangle$

Anleitung: Man zeige, dass es für jede noch so kleine untere Schranke b jeweils eine Gliednummer $n \in \mathbb{N}^*$ gibt, sodass die Ungleichung $a_n < b$ gilt.

37. Es ist zu zeigen, dass die nachstehenden Folgen weder obere noch untere Schranken besitzen.

a) $\langle a_n \rangle = \langle 1+n(-1)^n \rangle$ **b)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{n^2(-1)^n}{2n-1} \right\rangle$ **c)** $\langle a_n \rangle = \langle 2^n(-1)^n \rangle$

Anleitung: Man unterscheide die Fälle $n \in \mathbb{N}_g \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{N}_u$.

38. Intervallschachtelung: Mit Hilfe der Zahlenfolge $\langle l_n \rangle$ und $\langle r_n \rangle$ kann eine Folge von abgeschlossenen Intervallen $[l_n; r_n]$ festgelegt werden. Man stelle die ersten Glieder dieser Intervallfolge auf der Zahlengeraden dar und zeige, dass jedes Intervall **Obermenge**[1] aller nachfolgenden Intervalle ist!

a) $\langle l_n \rangle = \left\langle 1-\frac{1}{n} \right\rangle, \langle r_n \rangle = \left\langle 1+\frac{1}{n} \right\rangle$ **b)** $\langle l_n \rangle = \left\langle \frac{3n-1}{2n} \right\rangle, \langle r_n \rangle = \left\langle \frac{3n+1}{2n} \right\rangle$

c) $\langle l_n \rangle = \left\langle \frac{5n}{2n+1} \right\rangle, \langle r_n \rangle = \left\langle \frac{5n}{2n-1} \right\rangle$ **d)** $\langle l_n \rangle = \left\langle 1-\frac{1}{2^n} \right\rangle, \langle r_n \rangle = \left\langle 1+\frac{1}{2^n} \right\rangle$

e) $\langle l_n \rangle = \left\langle \frac{n^2-2n+1}{2n^2+1} \right\rangle, \langle r_n \rangle = \left\langle \frac{n^2+2n+1}{2n^2+1} \right\rangle$ **f)** $\langle l_n \rangle = \left\langle \frac{3n^2-n+3}{n^2+1} \right\rangle, \langle r_n \rangle = \left\langle \frac{3n^2+n+3}{n^2+1} \right\rangle$

Anleitung: Man zeige, dass die Folge der linken Intervallgrenzen $\langle l_n \rangle$ eine monoton wachsende, die der rechten $\langle r_n \rangle$ eine monoton fallende Folge ist und dass für jedes $n \in \mathbb{N}^*$ die linke Grenze kleiner als die rechte ist.

---

[1]) Ist die Menge A Teilmenge der Menge B, so nennt man B auch **Obermenge** von A.

5. Grenzwert — Konvergenz — Divergenz

Folgen wie (1) $\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle = \left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \right\rangle$, (2) $\left\langle \frac{1}{n+1} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots \right\rangle$ oder (3) $\left\langle \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right\rangle = \left\langle 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots \right\rangle$ heißen **Nullfolgen**, da sich die Glieder der angeführten Folgen mit wachsender Gliednummer immer mehr der Zahl Null nähern, ohne sie allerdings jemals zu erreichen.

Man sagt: Die Folgen **„konvergieren"** gegen Null bzw. die Folgen haben den **„Grenzwert"** Null.

Definition:

Unter der **ε-Umgebung**[1] der reellen Zahl a (abgekürzt: U (a,ε)) verstehen wir das offene Intervall $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$:

$$U(a,\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid a-\varepsilon < x < a+\varepsilon\}$$

Wir wollen uns nicht mit einer nur vagen Umschreibung von für den Aufbau der Mathematik maßgeblichen Begriffen begnügen. Um kurz und anschaulich definieren zu können, muss zunächst der **„Umgebungsbegriff"** eingeführt werden:

(1) $U\left(2, \frac{1}{2}\right) = \left]\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right[$ ist eine $\frac{1}{2}$-Umgebung von $a = 2$ mit $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

(2) $U\left(0, \frac{1}{100}\right) = \left]-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}\right[$ ist eine $\frac{1}{100}$-Umgebung von $a = 0$ mit $\varepsilon = \frac{1}{100}$.

Nebenstehende Figur lässt uns eine zu

$$U(a,\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid a-\varepsilon < x < a+\varepsilon\}$$

gleichwertige Umgebungsdefinition erkennen: $U(a,\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < \varepsilon\}$

Beispiel:

Man berechne, wie viele Glieder der Folge mit dem Bildungsgesetz $\left\langle \frac{1}{n+1} \right\rangle$ außerhalb der Umgebung $U\left(0, \frac{1}{10}\right)$ liegen.

Lösung:

$\left\langle \frac{1}{n+1} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots \right\rangle$

Je größer der Index n (= Gliednummer) des Folgenglieds a_n ist, desto kleiner wird der Abstand zwischen 0 und einem Glied a_n, obwohl kein Glied der Folge den Wert 0 annimmt!

Aus $|a_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{n+1} - 0\right| < \frac{1}{10}$ ergibt sich durch Äquivalenzumformung (Bitte selbstständig durchführen!) $n > 9$, d. h. die ersten neun Glieder liegen außerhalb, ab dem zehnten Glied liegen alle nachfolgenden Glieder innerhalb der Umgebung $U\left(0, \frac{1}{10}\right)$.

Definition:

Eine Aussage über **fast alle** Glieder einer unendlichen Folge ist eine Aussage, die nur für endlich viele Glieder dieser Folge **nicht** gilt.

Im obigen Beispiel gibt es außerhalb der ε-Umgebung nur **endlich** viele Elementwerte der Folge, nämlich $a_1, a_2, \ldots, a_9$. Liegen in einem Intervall $I =]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ unendlich viele Glieder einer Folge, außerhalb von I aber nur endlich viele, so sagt man in I liegen **fast alle** Glieder der Folge. In I liegen daher alle Glieder mit höchstens endlich vielen Ausnahmen.

Wählen wir im obigen Beispiel einen beliebig kleinen Wert für ε, etwa $\varepsilon = \frac{1}{1000000}$, so liegen dennoch **fast alle** Glieder im Intervall $]-\varepsilon, \varepsilon[= \left]-\frac{1}{1000000}, \frac{1}{1000000}\right[$.

[1]) Die Verwendung des griechischen Buchstabens Epsilon (ε) führte für die mit der grundsätzlich positiven reellen Zahl ε angestellten Überlegungen und Beweise auf den Namen **Epsilontik**.

Beispiel:
Es ist zu zeigen, dass die Folge mit dem Bildungsgesetz $\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle$ eine Nullfolge ist.

Lösung:

Eine Folge mit dem Grenzwert (vgl. nebenstehende Definition) $\alpha = 0$ nennt man **Nullfolge**.

Wir müssen zeigen, dass in jeder ε-Umgebung von $\alpha = 0$ fast alle Glieder der Folge liegen, d. h. dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Gliednummer N gibt, von der an alle Glieder im Intervall $]-\varepsilon, \varepsilon[$ liegen:

$|a_n - \alpha| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$, also N = erste ganze — und wegen $\varepsilon > 0$ auch natürliche — Zahl, die größer als $\frac{1}{\varepsilon}$ ist.

Für $\varepsilon = \frac{3}{500}$ wäre N somit gleich 167.

Für jede Zahl $\varepsilon > 0$, **und sei ε noch so klein**, gibt es daher eine Platznummer N, ab der gilt: $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$, sofern $n \geqslant N$. Die Folge $\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle$ ist daher eine Nullfolge.

Bemerkung: Wir bezeichnen die Gliednummer mit N. a_N ist das N-te Glied der Folge $\langle a_n \rangle$.

Definition:
Die Zahl α heißt **Grenzwert der Folge** $\langle a_n \rangle$, wenn in jeder ε-Umgebung von α fast alle Glieder der Folge liegen:
$|a_n - \alpha| < \varepsilon$ gilt für fast alle Glieder der Folge $\langle a_n \rangle$.

Betrachten wir nachstehende unendliche Folgen:

(1) $\left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \right\rangle$ $\quad$ (2) $\langle 2, 4, 8, 16, \ldots \rangle$

$\langle 1{,}1,\ 1{,}01,\ 1{,}001, \ldots \rangle$ $\quad$ $\langle 10, 100, 1000, 10000, \ldots \rangle$

Welcher Unterschied besteht zwischen den in **(1)** und **(2)** angeführten Folgen?

Nun: Bei **(1)** handelt es sich um **konvergente Folgen**, bei **(2)** um **divergente Folgen** — vgl. die Definition in der Außenspalte.

Für den **Grenzwert einer konvergenten Folge** $\langle a_n \rangle$ verwendet man das Zeichen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Will man z. B. ausdrücken, dass die Folge $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{1}{n} \right\rangle = \left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \right\rangle$ den Grenzwert 0 hat, so schreibt man kurz: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ (gesprochen: **Limes**[3] $\frac{1}{n}$ für n gegen unendlich gleich 0).

Folgendes ist wichtig: Da unter den Gliednummern einer Folge $\langle a_n \rangle$ kein größter Index n^* auftreten kann, gibt es auch kein letztes Glied a_n der Folge. Schließlich bedeutet die Schreibweise $n \to \infty$ ja nicht, dass die Folge den Index ∞ erreicht und dann abbricht.

Der Grenzwert α wird nie erreicht, er gehört im Allgemeinen selbst nicht zur Folge[4].

Definition:
Eine **unendliche Folge**, die einen Grenzwert hat, heißt **konvergent**[1].
Eine **unendliche Folge**, die keinen Grenzwert hat, heißt **divergent**[2].

Wie lässt sich die Konvergenz einer Folge bestimmen? Gefühlsentscheidungen sind in der Mathematik gefährlich. Nun gibt es den **„Hauptsatz über monotone Folgen"**, der in vielen Fällen hilfreich ist und durch nüchterne Klarheit besticht:

Eine monoton wachsende (fallende) Folge in ℝ ist genau dann konvergent in ℝ, wenn sie nach oben (unten) beschränkt ist.

Das bedeutet: Um die Konvergenz einer monotonen Folge zu zeigen genügt es, ihre Beschränktheit nachzuweisen.

---

[1]) Hauptwort: Konvergenz, die.

[2]) Hauptwort: Divergenz, die.

[3]) Das Wort **Limes** kommt aus dem Lateinischen und ist ein sinnverwandtes Wort unseres Begriffs „Grenzwert". Der Limes war ein römischer Grenzwall vom Rhein bis zur Donau.

[4]) Es gibt auch Ausnahmen von dieser Regel: Konstante Folgen, z. B. $\langle 3, 3, 3, 3, \ldots \rangle$, sind Beispiele für Folgen, in denen der Grenzwert selbst zur Folge gehört.

AUFGABEN

39. Welche Folgen sind Nullfolgen?

a) $\langle 1, 0, 1, 0, \ldots \rangle$ **b)** $\langle 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, \ldots \rangle$

c) $\langle 0, 0, 0, 0, \ldots \rangle$ **d)** $\left\langle 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots \right\rangle$

e) $\left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots \right\rangle$ **f)** $\left\langle -3, 1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots \right\rangle$

40. Man zeige, dass die nachstehenden Folgen Nullfolgen sind, und berechne die Anzahl der Glieder, die außerhalb der ε-Umgebung von $\alpha = 0$ liegen.

a) $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{1}{4n^2} \right\rangle,\ \varepsilon = \frac{1}{100}$ **b)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{1}{n^2+1} \right\rangle,\ \varepsilon = \frac{1}{10}$

c) $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \right\rangle,\ \varepsilon = \frac{1}{5}$ **d)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{1}{2n+6} \right\rangle,\ \varepsilon = \frac{1}{1000}$

e) $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{n^2+36}} \right\rangle,\ \varepsilon = \frac{1}{10}$ **f)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{1}{3^n} \right\rangle,\ \varepsilon = \frac{1}{100}$

41. Es ist zu zeigen, dass die nachstehenden Folgen den Grenzwert α besitzen. Die Anzahl der Glieder, die außerhalb der ε-Umgebung des Grenzwerts α liegen, ist zu berechnen.

a) $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{3n+2}{2n-1} \right\rangle,\ \alpha = \frac{3}{2},\ \varepsilon = \frac{1}{10}$ **b)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{n^2-1}{n^2+1} \right\rangle,\ \alpha = 1,\ \varepsilon = \frac{1}{100}$

c) $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{2n+1}{3n-1} \right\rangle,\ \alpha = \frac{2}{3},\ \varepsilon = \frac{1}{50}$ **d)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{3n^2-2n}{n^2} \right\rangle,\ \alpha = 3,\ \varepsilon = \frac{1}{10}$

e) $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{4n^2+5}{7n^2-2} \right\rangle,\ \alpha = \frac{4}{7},\ \varepsilon = \frac{1}{1000}$ **f)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{3-4n+n^2}{2+3n-n^2} \right\rangle,\ \alpha = -1,\ \varepsilon = \frac{1}{200}$

42. Die beiden Umgebungsdefinitionen $U(a;\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid a-\varepsilon < x < a+\varepsilon\}$ und $U(a;\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < \varepsilon\}$ sind gleichwertig. Beweis?

6. Grenzwertsätze, Grenzwertberechnung

Zur Erleichterung der Berechnung von Grenzwerten bringen wir (ohne Beweise) die wichtigsten Regeln, die sogenannten **Grenzwertsätze**, die in Zeichen Folgendermaßen lauten:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n},\ (\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0,\ b_n \neq 0).$

Konvergieren die Folgen $\langle a_n \rangle$ und $\langle b_n \rangle$ gegen die Grenzwerte α bzw. β, so gilt:

(1) Die Summenfolge $\langle a_n + b_n \rangle$ konvergiert gegen die Summe der Grenzwerte $\alpha + \beta$.

(2) Die Differenzfolge $\langle a_n - b_n \rangle$ konvergiert gegen die Differenz der Grenzwerte $\alpha - \beta$.

(3) Die Produktfolge $\langle a_n b_n \rangle$ konvergiert gegen das Produkt der Grenzwerte $\alpha \cdot \beta$.

(4) Die — nur für $b_n \neq 0$ definierte — Quotientenfolge $\left\langle \frac{a_n}{b_n} \right\rangle$ konvergiert, sofern $\beta \neq 0$ gilt, gegen den Quotienten der Grenzwerte $\frac{\alpha}{\beta}$.

Beispiel:

Man berechne $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{n}\right)$!

Lösung:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 3 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 3 - 0 = \mathbf{3}$$

Beispiel:

Man berechne $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2-4n+5}{2n^2+6n-1}$!

Lösung:

In vielen Fällen ist es für die Berechnung des Grenzwerts vorteilhaft, Zähler und Nenner durch die höchste im Nennerpolynom vorkommende Potenz von n zu dividieren:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-4n+5}{2n^2+6n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3-\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}}{2+\frac{6}{n}-\frac{1}{n^2}} = \frac{3-0+0}{2+0-0} = \frac{3}{2}$$

AUFGABEN

Bei den folgenden Aufgaben ist der Grenzwert α der Folgen $\langle a_n \rangle$ zu ermitteln und anzugeben, ab welcher Gliednummer N alle Glieder der Folge in der Umgebung $U(\alpha, \varepsilon)$ liegen.

43. a) $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{1}{2n} \right\rangle$, $\varepsilon = \frac{1}{10}$ **b)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{1}{n+3} \right\rangle$, $\varepsilon = \frac{1}{100}$

44. a) $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{n-1}{n} \right\rangle$, $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ **b)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{2n}{n+2} \right\rangle$, $\varepsilon = \frac{1}{50}$

45. a) $\langle a_n \rangle = \left\langle 3 - \frac{1}{n+2} \right\rangle$, $\varepsilon = \frac{1}{20}$ **b)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{7n-1}{2n-2} \right\rangle$, $\varepsilon = \frac{1}{100}$

46. a) $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{2n-7}{3n-5} \right\rangle$, $\varepsilon = \frac{1}{4}$ **b)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{2n-1}{n^2+3} \right\rangle$, $\varepsilon = \frac{1}{10}$

47. a) $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{5n+30}{n^2-7} \right\rangle$, $\varepsilon = 1$ **b)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{n}{n^2+1} \right\rangle$, $\varepsilon = \frac{1}{100}$

48. a) $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{3n^2+5n}{n^3+2n^2} \right\rangle$, $\varepsilon = \frac{1}{10}$ **b)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{2^n}{3^n} \right\rangle$, $\varepsilon = \frac{1}{1000}$

49. a) $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{2n^2+(-1)^n \cdot 10n}{n^3} \right\rangle$, $\varepsilon = \frac{1}{50}$ **b)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{(-1)^n}{n^2+1} \right\rangle$, $\varepsilon = \frac{1}{3}$

Bei den folgenden Aufgaben ist der Grenzwert α der Folgen $\langle a_n \rangle$ mit Hilfe der Grenzwertsätze zu berechnen, falls α existiert.

50. a) $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{2n+1}{n^2} \right\rangle$ **b)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{n^2+4n-8}{3n+5} \right\rangle$

51. a) $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{n^2-1}{2n^2} \right\rangle$ **b)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{4n^3-3n^2+2n-1}{n^3+1} \right\rangle$

52. a) $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{n^2+3n-1}{n^3-2n+1} \right\rangle$ **b)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{3n^2+5n-7}{5n^2-n+2} \right\rangle$

53. a) $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{4n^2+2n+5}{n^3+n-7} \right\rangle$ **b)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{-4n+3}{n^3+1} \right\rangle$

54. a) $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{n^3+2n^2-n+9}{4n^3+5n+13} \right\rangle$ **b)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{n^4+7n^2}{n^5+3n^3+1} \right\rangle$

55. a) $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{2n^4-3n^2+n-2}{5n^4+6n^3-n+7} \right\rangle$ **b)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{3n^2+(-1)^n}{2n^3} \right\rangle$

56. a) $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{2n+(-1)^n \cdot 3}{n} \right\rangle$ **b)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{3-n(-1)^n}{10^n} \right\rangle$

57. Das Konvergenzverhalten der Folgen aus Aufgabe **28.** ist zu untersuchen.

58. Man zeige, dass die in Aufgabe **33.** gegebenen Schranken b bzw. B Grenzwerte der betreffenden Folgen sind.

59. Der Grenzwert jeder Folge aus Aufgabe **34.** ist zu ermitteln.

7. Unendliche Reihen

Was verstehen wir unter einer „unendlichen Reihe"? Rein formal ist eine **unendliche Reihe** ein Ausdruck der Form $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots$, wobei die Punkte andeuten sollen, dass der Ausdruck niemals abbricht. Was fangen wir damit an? Wir fragen nach dem Summenwert S, d. h.

$$S = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right) = ?$$

Sicher ist, dass man nicht unendlich viele Zahlen addieren kann. Auch wird man mit formal gebildeten unendlichen Summen nicht wie mit gewöhnlichen Summen rechnen können. Denn betrachten wir etwa die unendliche Reihe $1-1+1-1+1-1+1-\ldots$ so wären — wenn man mit dieser Reihe wie mit einer gewöhnlichen Summe rechnet — folgende zwei Möglichkeiten der Klammersetzung denkbar:

(1) $1-1+1-1+1-\ldots \quad = (1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots =$

$= 0+0+0+\ldots \Rightarrow S = 0$

(2) $1-1+1-1+1-\ldots \quad = 1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\ldots =$

$= 1-0-0-0-\ldots \Rightarrow S = 1$???

Bevor wir also versuchen, eine Summenformel herzuleiten, müssen wir klären, ob die „Summe" einer unendlichen Reihe überhaupt einen eindeutigen Wert hat. Dazu bilden wir aus den Gliedern $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ der Reihe, die Folge $\langle s_n \rangle$ ihrer **Teilsummen** oder **Partialsummen**.

$s_1 = a_1$
$s_2 = a_1 + a_2$
$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$
....
$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$
....

Wenn die Folge $\langle s_n \rangle$ der Partialsummen konvergiert, d. h. einen Grenzwert S hat, sagt man: Die Reihe konvergiert und hat die Summe S. Der Grenzwert S wird also dieser Reihe als Summenwert zugeschrieben. Durch diese Vorgangsweise können wir alle für Folgen bewiesenen Sätze übernehmen. Schließlich haben wir ja die Konvergenz von Reihen auf die Konvergenz von Folgen zurückgeführt. (Neue Probleme auf bereits gelöste zurückzuführen, ist ein bewährtes Erfolgsrezept in der Mathematik!) Zum besseren Verständnis die folgende Gegenüberstellung:

Definition:

Eine **unendliche Reihe** $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots$ heißt genau dann **konvergent**, wenn ihre Partialsummenfolge konvergiert.

Den Grenzwert S der Partialsummenfolge bezeichnet man als **Summe der Reihe**: $S = \lim_{n\to\infty} s_n$

Divergiert dagegen die Folge $\langle s_n \rangle$ der Partialsummen der gegebenen Reihe, so heißt diese **divergent**, sie hat keine Summe.

Die unendliche Reihe $1+3+5+7+\ldots$ ist divergent.:

Denn: $s_1 = 1$
$s_2 = 1+3 = 4$
$s_3 = 1+3+5 = 9$
....
$s_n = 1+3+5+7+\ldots+(2n-1)$
....

Die monoton wachsende Folge $\langle s_n \rangle$ der Partialsummen $\langle 1, 4, 9, 16, \ldots \rangle$ ist nicht beschränkt und daher divergent.

Somit ist die Reihe $1+3+5+7+\ldots$ divergent.

Die unendliche Reihe $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$ ist konvergent.

Denn: $s_1 = \frac{1}{2} = 1-\frac{1}{2}$
$s_2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4} = 1-\frac{1}{4}$
$s_3 = \frac{3}{4}+\frac{1}{8} = 1-\frac{1}{8}$
....
$s_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}$
....

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$ ist eine geometrische Reihe mit $b_1 = \frac{1}{2}$ und $q = \frac{1}{2}$.

$$s_n = b_1 \frac{q^n-1}{q-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2}-1} = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1-\frac{1}{2^n}$$

$$S = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = 1, \text{ weil } \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 0$$

Somit ist die Reihe $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$ konvergent und hat die Summe 1.

Die unendliche arithmetische Reihe ist divergent[1] und somit für unsere weiteren Betrachtungen bedeutungslos. Ähnlich verhält es sich mit der unendlichen geometrischen Reihe, wenn der Quotient $|q| \geq 1$ ist.

Was aber ist, wenn $|q| < 1$?

Wir formen $s_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + \ldots + b_1q^{n-1} = b_1\frac{1-q^n}{1-q}$ um.

$$s_n = b_1\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{b_1}{1-q} - \frac{b_1q^n}{1-q}$$

$$S = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_1}{1-q} - \frac{b_1q^n}{1-q}\right) = \frac{b_1}{1-q},$$

weil für $|q| < 1$ die Folge $\langle q^n \rangle = \langle q, q^2, q^3, \ldots \rangle$ eine Nullfolge ist.

Die unendliche geometrische Reihe $b_1 + b_1q + b_1q^2 + \ldots$ ist genau dann konvergent, wenn $|q| < 1$. In diesem Fall ist ihre Summe $S = \frac{b_1}{1-q}$.

Beispiel:

Man berechne die Summe der unendlichen geometrischen Reihe $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \ldots$.

Lösung:

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \ldots = -\frac{1}{3} \Rightarrow q = -\frac{1}{3}. \qquad S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

Beispiel:

Die unendliche periodische Dezimalzahl $0,\dot{4}\dot{5}$ ist in eine Bruchzahl umzuwandeln.

Lösung:

$$0,\dot{4}\dot{5} = 0,454545\ldots = \frac{45}{100} + \frac{45}{10\,000} + \frac{45}{1\,000\,000} + \ldots$$

$$b_1 = \frac{45}{100}, \quad q = \frac{1}{100}, \quad S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{\frac{45}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{45}{99} \qquad 0,\dot{4}\dot{5} = \frac{45}{99}$$

Beispiel:

Die Summe einer unendlichen geometrischen Reihe mit dem Quotienten $q = \frac{4}{5}$ ist um 525 größer als ihr zweites Glied. Man berechne die Reihe und ihre Summe.

Lösung:

Es gilt $b_2 = b_1q \Leftrightarrow b_1 = \frac{b_2}{q}$ und $S = 525 + b_2$

$$S = \frac{b_1}{1-q}$$

$$525 + b_2 = \frac{b_2}{\frac{4}{5}\left(1-\frac{4}{5}\right)}$$

$$525 + b_2 = \frac{25b_2}{4}$$

$$\vdots$$

$$b_2 = 100$$

$$b_1 = \frac{100}{\frac{4}{5}} = 125.$$ **Reihe: $125 + 100 + 80 + 64 + \ldots$**

$$S = 525 + 100 = 625$$

[1]) Ausnahme: $0 + 0 + 0 + \ldots = 0$

Beispiel:

Auf einer Geraden wird eine Strecke mit der Länge c ($c \in \mathbb{R}^+$) aufgetragen, anschließend an ihrem rechten Endpunkt nach rechts eine Strecke mit der Länge $\frac{c}{2}$, anschließend eine Strecke mit der Länge $\frac{c}{4}$ usw. Über allen Strecken werden abwechselnd Halbkreise gezeichnet — vgl. Figur in der Außenspalte.

a) Wie groß ist die Gesamtlänge ℓ der so entstehenden Schlangenlinie?

b) Welcher Flächeninhalt A wird von der Geraden und der Schlangenlinie eingeschlossen?

Lösung:

a) Der erste Halbkreisbogen hat die Länge $\frac{\pi c}{2} \Rightarrow b_1 = \frac{\pi c}{2}$.

Der zweite Halbkreisbogen hat die Länge $\frac{\pi c}{4} \Rightarrow b_2 = \frac{\pi c}{4}$. Jede Halbkreisbogenlänge wird gegenüber der vorangehenden mit demselben Faktor $\frac{b_2}{b_1} = q = \frac{\frac{\pi c}{4}}{\frac{\pi c}{2}} = \frac{1}{2}$ verkleinert.

Es liegt eine konvergente unendliche geometrische Reihe vor.

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{\frac{\pi c}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \pi c \qquad \ell = \pi c$$

b) $A_1 = \frac{\pi c^2}{8}$, $A_2 = \frac{\pi c^2}{32}$, $\frac{A_2}{A_1} = q_A = \frac{\frac{\pi c^2}{32}}{\frac{\pi c^2}{8}} = \frac{1}{4}$, $A = \frac{\frac{\pi c^2}{8}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\pi c^2}{6}$

Die Berechnung von q_A hätte wesentlich einfacher erfolgen können. Alle Kreise sind einander ähnlich. Der Faktor, nach dem die Flächeninhalte kleiner werden, ist das Quadrat des Faktors entsprechender Längen.

Also $q_A = q^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, $A = \frac{A_1}{1-q_A} = \frac{\frac{\pi c^2}{8}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\pi c^2}{6}$ $\qquad A = \frac{\pi c^2}{6}$

Bilden die Längen ähnlicher Figuren bzw. Körper eine geometrische Folge mit dem Quotienten q, so nehmen die Flächeninhalte mit dem Faktor $q_A = q^2$, die Rauminhalte mit dem Faktor $q_V = q^3$ ab (oder zu).

AUFGABEN

60. Ist die unendliche arithmetische Reihe im Allgemeinen konvergent?
Anleitung: Man untersuche das Konvergenzverhalten ihrer Partialsummenfolge.

61. Ist die unendliche geometrische Reihe im Allgemeinen konvergent?
Anleitung: Man unterscheide die Fälle $|q| < 1$, $|q| = 1$ und $|q| > 1$!

Bei den folgenden Aufgaben ist die Summe der unendlichen geometrischen Reihe zu berechnen:

62. a) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$ **b)** $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \ldots$ **c)** $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots$

63. a) $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \ldots$ **b)** $32 + 16 + 8 + \ldots$ **c)** $32 - 16 + 8 - \ldots$

64. a) $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \ldots$ **b)** $0{,}36 - 0{,}06 + 0{,}01 - \ldots$ **c)** $3 - 3 \cdot \frac{1}{5} + 3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 - \ldots$

65. a) $7 + 7 \cdot \frac{3}{4} + 7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \ldots$ **b)** $\frac{2}{1{,}01} + \frac{2}{1{,}01^2} + \frac{2}{1{,}01^3} + \ldots$ **c)** $3 - 3\left(\frac{1}{1{,}04}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{1{,}04}\right)^4 - \ldots$

66. a) $-4 - 4 \cdot \frac{1}{1{,}05} - 4 \cdot \frac{1}{1{,}05^2} - \ldots$ **b)** $6 + 3\sqrt{3} + \frac{9}{2} + \ldots$ **c)** $\sqrt{12} + \sqrt{6} + \sqrt{3} + \ldots$

67. a) $\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{4} + \ldots$ **b)** $\sqrt{2} - 1 + \ldots$ **c)** $\lg 2 + \lg\sqrt{2} + \ldots$

68. Die nachstehende Tabelle ist zu vervollständigen:

	b_1	q	S		b_1	q	S
a)	1	$\frac{2}{3}$		**b)**	-5	0,9	
c)	9	$-\frac{1}{4}$		**d)**	-6	$-\frac{2}{3}$	
e)		$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{2}$	**f)**		$\frac{1}{3}$	3
g)	24		30	**h)**	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{7}$

69. Die Summe einer unendlichen geometrischen Reihe ist 10, ihr zweites Glied ist $\frac{5}{2}$. Reihe?

70. Die Summe der ersten zwei Glieder einer unendlichen geometrischen Reihe ist drei, die Summe der zwei folgenden Glieder $\frac{4}{3}$. Reihe und ihre Summe?

71. Das Produkt des 2. und 4. Glieds einer unendlichen geometrischen Reihe ist $\frac{81}{4}$, die Summe des 3. und 5. Glieds ist $-\frac{225}{32}$. Reihe und ihre Summe?

72. Die Summe einer unendlichen geometrischen Reihe mit dem Quotienten $\frac{3}{4}$ ist um 48 größer als ihr erstes Glied. Reihe und ihre Summe?

73. Die Summe einer mit $\frac{1}{2}$ beginnenden unendlichen geometrischen Reihe ist um $\frac{5}{12}$ größer als ihr Quotient. Reihe und ihre Summe?

74. In welcher unendlichen geometrischen Reihe mit der Summe $\frac{10}{9}$ ist jedes Glied 9-mal so groß wie die Summe aller folgenden Glieder?

75. Welchen Wert in Abhängigkeit von k muss der Quotient einer unendlichen geometrischen Reihe haben, damit jedes Glied k-mal ($k \in \mathbb{N}^*$) so groß ist wie die Summe aller nachfolgenden Glieder?

76. Die Summe einer unendlichen geometrischen Reihe ist 32, die Summe der Quadrate der Glieder $\frac{1024}{3}$. Wie lautet die Reihe?

77. Die folgenden periodischen Dezimalzahlen sind in Brüche zu verwandeln!

a) $0,\dot{3}$ **b)** $0,\dot{7}$ **c)** $0,\dot{4}\dot{2}$ **d)** $0,\dot{7}\dot{6}$

e) $0,1\dot{2}$ **f)** $0,\dot{3}2\dot{4}$ **g)** $0,\dot{8}1\dot{3}$ **h)** $0,7\dot{1}3\dot{4}$

Bei den folgenden Aufgaben ist anzugeben, unter welchen Voraussetzungen die unendliche geometrische Reihe konvergiert. Man berechne ihre Summe.

78. **a)** $1+x+x^2+\ldots$ **b)** $(x+2)+x+\frac{x^2}{x+2}+\ldots$

79. **a)** $\frac{x}{y}+1+\frac{y}{x}+\ldots$ **b)** $x^2-y+\frac{y^2}{x^2}-\ldots$

80. **a)** $(1-x)+\frac{1-x}{x}+\frac{1-x}{x^2}+\ldots$ **b)** $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{4}+\ldots$

81. **a)** $\lg x-\lg\sqrt{x}+\ldots$ **b)** $\lg\sqrt[5]{x^2}+\lg\sqrt[25]{x^4}+\ldots$

82. **a)** $1+\sin x+\sin^2 x+\ldots,\ x\in[0,\ 2\pi[$ **b)** $1-\tan x+\tan^2 x-\ldots,\ x\in[0,\ 2\pi[$

Die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen ist in $\mathbb{R}$ zu bestimmen:

83. a) $1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}-\ldots=\frac{4}{x^2+1}$ **b)** $1-x+x^2-\ldots=\frac{1}{x^2+3x+2}$

84. a) $\frac{1}{2}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^4}-\ldots=\frac{x^4-x^2}{28x^2-76}$ **b)** $1+x+x^2+\ldots=\frac{4(1-x)}{3}$

85. a) $3^x+3^{x-1}+3^{x-2}+\ldots=\frac{1}{2}\sqrt{10\cdot 3^{x+1}-9}$ **b)** $2^x+2^{x-1}+2^{x-2}+\ldots=2^{x^2+3x+2}$

Bei den folgenden Aufgaben ist der nachstehende Satz zu beachten:

Bilden die Seitenlängen ähnlicher Figuren bzw. Körper eine geometrische Folge mit dem Quotienten q, so nehmen die Flächeninhalte mit dem Faktor $q_A = q^2$, die Rauminhalte mit dem Faktor $q_V = q^3$ ab (oder zu).

86. Einem Quadrat mit der Seitenlänge $a = 6$ cm wird ein Quadrat eingeschrieben, dessen Ecken in die Seitenmitten des ersten fallen. Diesem Quadrat ist in gleicher Weise ein drittes eingeschrieben usw.
Man berechne die Summe **a)** der ersten 8 **b)** aller (1) Quadratumfänge (2) Quadratflächeninhalte.

87. Einem Quadrat mit der Seitenlänge $a_1 = 7$ cm wird ein zweites so eingeschrieben, dass seine Ecken die Seiten des ersten Quadrats im Verhältnis 3 : 4 teilen usw.
Man berechne die Summe **a)** der ersten 8 **b)** aller (1) Quadratumfänge (2) Quadratflächeninhalte.
Anleitung: $a_2=\sqrt{3^2+4^2}$

88. Einem gleichschenkeligen Dreieck mit der Grundlinie $c = 6$ cm und der Höhe $h = 8$ cm werden aufeinander ruhende Quadrate eingeschrieben.
Man berechne die Summe **a)** der ersten 4 **b)** aller (1) Quadratumfänge (2) Quadratflächeninhalte.
Anleitung: $c : h = a_1 : (h - a_1)$

89. Einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge $a_1 = 6$ cm wird ein zweites gleichseitiges Dreieck so eingeschrieben, dass die Seiten des zweiten auf den Seiten des ersten senkrecht stehen. In gleicher Weise werden weitere gleichseitige Dreiecke eingeschrieben.
Man berechne die Summe **a)** der ersten 5 **b)** aller (1) Dreiecksumfänge (2) Dreiecksflächeninhalte.

Anleitung: $\frac{a_1}{2} : a_1 = x : (a_1 - x)$

$\overline{A_2C_2} = a_2 = \sqrt{(a_1-x)^2-x^2}$

90. Aus den Höhen eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge $a = 5\,\text{cm}$ bildet man ein weiteres gleichseitiges Dreieck, aus dessen Höhen wieder eines usw.

Man berechne die Summe **a)** der ersten 5 **b)** aller (1) Dreiecksumfänge (2) Dreiecksflächeninhalte.

91. Einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge $a = 8\,\text{cm}$ wird ein Kreis eingeschrieben, diesem ein gleichseitiges Dreieck, diesem wieder ein Kreis usw.

Man berechne die Summe **a)** der ersten 6 **b)** aller (1) Dreiecksumfänge (2) Kreisumfänge (3) Dreiecksflächeninhalte (4) Kreisflächeninhalte.

92. Einem Quadrat mit der Seitenlänge $a_1 = 8\,\text{cm}$, wird ein Kreis eingeschrieben, diesem Kreis wieder ein Quadrat usw.

Man berechne die Summe **a)** der ersten 4 **b)** aller (1) Quadratumfänge (2) Kreisumfänge (3) Quadratflächeninhalte (4) Kreisflächeninhalte.

93. Einem Halbkreis mit dem Radius $r_1 = 5\,\text{cm}$ wird ein Kreis eingeschrieben, der Hälfte dieses Kreises wiederum ein Kreis usw.

Man berechne die Summe **a)** der ersten 5 **b)** aller (1) Halbkreisumfänge (2) Halbkreisflächeninhalte.

94. Einem gleichschenkelig-rechtwinkeligen Dreieck mit der Kathete $a_1 = 7\,\text{cm}$ wird ein Kreis eingeschrieben. Der Hälfte des Kreises wird wieder ein gleichschenkelig-rechtwinkeliges Dreieck eingeschrieben, diesem wieder ein Kreis usw.

Man berechne die Summe **a)** der ersten 4 **b)** aller (1) Dreiecksumfänge (2) Kreisumfänge (3) Dreiecksflächeninhalte (4) Kreisflächeninhalte.

Anleitung: $h = \frac{7}{\sqrt{2}}$, $a_1 : h = (h - r_1) : r_1$, $a_2 = r_1\sqrt{2}$

95. Der Punkt A_1 liegt auf einem Schenkel des Winkels $\alpha = 20°$ und ist vom Scheitel $a_1 = 7\,\text{cm}$ entfernt. Durch diesen Punkt A_1 errichtet man auf dem zweiten Schenkel das Lot. Durch den Fußpunkt A_2 dieses Lots errichtet man wiederum ein Lot auf dem ersten Schenkel usw.

Es ist Folgendes zu berechnen:

a) Entfernung des Punkts A_8 vom Scheitel S des Winkels α.

b) Gesamtlänge der Verbindungslinie zwischen den ersten 8 aufeinander folgenden Punkten.

c) Summe der Flächeninhalte der ersten 7 Dreiecke, die von je zwei aufeinander folgenden Loten und einem Schenkel eingeschlossen werden.

d) Gesamtlänge aller Verbindungsstrecken zwischen zwei aufeinander folgenden Punkten.

e) Summe der Abstände aller Punkte A_i, $i \in \mathbb{N}^*$, vom Scheitel S des Winkels.

f) Summe der Inhalte aller von zwei aufeinander folgenden parallelen Loten und einem Schenkel eingeschlossenen Dreiecksflächen.

96. In einem rechtwinkeligen Dreieck mit den Katheten $a = 6\,\text{cm}$ und $b = 8\,\text{cm}$ fällt man vom Fußpunkt der Höhe auf c je ein Lot auf die beiden Katheten. Von den Fußpunkten dieser Lote fällt man wiederum jeweils ein Lot auf die Hypotenuse usw.

Man ermittle die Längen der dabei entstehenden Zickzacklinien, die beide beim Scheitel C des rechten Winkels beginnen und aus **a)** je 10 **b)** unendlich vielen Strecken bestehen sollen.

97. Die Punkte A_1 und B_1 liegen auf dem einen Schenkel des Winkels $\alpha = 40°$ und sind vom Scheitel S $a_1 = 6\,\text{cm}$ bzw. $b_1 = 9\,\text{cm}$ entfernt. Durch die beiden Punkte A_1 und B_1 errichtet man Lote auf den zweiten Schenkel. Die Fußpunkte A_2 und B_2 dieser Lote sind vom Scheitel a_2 bzw. b_2 entfernt. Durch diese Punkte A_2 und B_2 werden auf den ersten Schenkel wiederum Lote errichtet usw.

Man berechne die Summe der **a)** Längen der Strecken A_iB_i, $i \in \mathbb{N}^*$ und $i \leq 10$ **b)** Längen aller Strecken A_iB_i, $i \in \mathbb{N}^*$ **c)** Flächeninhalte **(1)** der ersten 10 **(2)** aller Trapeze, die von zwei zusammengehörigen Loten und den Winkelschenkeln gebildet werden.

98. Den beiden Schenkeln eines rechten Winkels wird ein Kreis mit dem Radius $r_1 = 4\,\text{cm}$ eingeschrieben. Zwischen Winkelscheitel und Kreislinie wird ein weiterer Kreis eingeschrieben usw.

Man berechne die Summe **a)** der ersten 6 **b)** aller **(1)** Kreisumfänge **(2)** Kreisflächeninhalte.

Anleitung: $r_1 : r_1\sqrt{2} = r_2 : (r_1\sqrt{2} - r_1 - r_2)$

99. Text wie in Aufgabe **98.**, aber für den Winkel $\alpha = 60°$ an Stelle des rechten Winkels!

Anleitung: $r_1 : x = r_2 : (x - r_1 - r_2)$, wobei $x = 2r_1$ gilt. (Erinnern wir uns an das gleichseitige Dreieck!)

100. Einem Quadrat mit der Seitenlänge $a = 8\,\text{cm}$ wird ein Kreis eingeschrieben. In den 4 Ecken des Quadrats werden 4 Kreise so eingeschrieben, dass sie den ersten Kreis und die Seiten des Quadrats berühren, die an die betreffende Ecke angrenzen. Diese Kreise werden von 4 weiteren auf die gleiche Weise eingeschriebenen Kreisen berührt usw.

Man berechne die Summe **a)** der ersten 17 **b)** aller **(1)** Kreisumfänge **(2)** Kreisflächeninhalte.

Anleitung: Der Quotient ist wie in Aufgabe **98.** zu ermitteln. Jeweils 4 Kreise entsprechen einem Glied der geometrischen Reihe. Der erste Kreis ist gesondert zu behandeln.

101. Durch 18 Strahlen, die vom Punkt A ausgehen, wird der volle Winkel in 18 gleiche Teile geteilt. Der Punkt B befindet sich auf einem dieser Strahlen im Abstand $b_1 = 6$ cm vom Punkt A entfernt. Durch diesen Punkt B errichtet man auf den nächsten der im Gegenuhrzeigersinn gelegenen Strahl das Lot. Durch den Fußpunkt dieses Lots errichtet man auf dem nächsten Strahl das Lot usw. **a)** Man berechne die Länge der auf diese Weise entstehenden „Spirale", die 4-mal um den Punkt A herumlaufen soll. **b)** Text wie in a), der volle Winkel soll aber in 12 gleiche Teile geteilt werden. **c)** Summe der Flächeninhalte der Dreiecke, die von den Strahlen und den ersten 18 Loten gebildet werden bei einer Teilung des vollen Winkels in 18 gleiche Teile? **d)** Text wie in c), der volle Winkel soll aber in 12 gleiche Teile geteilt werden! **e)** Man ermittle die Gesamtlänge der „Spirale" bei einer Teilung des vollen Winkels in (1) 18 gleiche Teile (2) 12 gleiche Teile! **f)** Es ist zu zeigen, dass die beiden Spiralen dem Punkt A zustreben!

Bemerkung: Die Flugbahnen von Nachtfaltern, die ein Licht anfliegen, entsprechen solchen „gleichwinkeligen Spiralen". Normalerweise wird von diesen Schmetterlingen der Mond als Orientierungshilfe verwendet. Dabei wird der Flug so ausgerichtet, dass jeweils ein bestimmtes Ommatidium (Das ist eines der zahlreichen konischen Einzelaugen, aus denen das große Komplexauge der Insekten zusammengesetzt ist.) oder besser eine Gruppe benachbarter Ommatidien den Mond erfassen. Wandert der Mond aus dem sehr engen Blickfeld dieser Ommatidiengruppe, korrigiert der Falter seinen Flug so, bis diese das Mondlicht wieder erfassen. Bedingt durch die große Entfernung des Mondes (Abstand Erde—Mond 380 000 km) bleiben die vom Falter durchgeführten notwendigen Kurskorrekturen so klein, dass selbst kilometerweite Flüge fast geradeaus führen. Anders ist es jedoch, wenn sich der Falter an einer nahen künstlichen Lichtquelle orientiert. Beim Geradeausflug wird, je nach Entfernung der Lichtquelle, diese mehr oder weniger rasch aus dem Blickfeld eines bestimmten Ommatidiums wandern. Der Falter reagiert darauf durch eine Korrektur seiner Flugbahn, die die Lichtquelle wieder in das Blickfeld des betreffenden Ommatidiums bringt. Trotzdem wird diese schon wieder sehr bald aus dem Blickfeld dieses Ommatidiums wandern, wodurch der Falter zu einer weiteren Kurskorrektur veranlasst wird. Und zwar in umso rascherer Folge je näher er der Lichtquelle kommt. Dieses Verhalten zwingt den Nachtfalter auf die charakteristischen spiralenförmigen Flugbahnen, die wir beobachten.

102. Mit Hilfe einer Folge von gleichseitigen Dreiecken wird eine „Spirale" konstruiert. Die Seitenlänge des ersten Dreiecks beträgt $a = 5$ cm. Für **a)** die ersten 5 **b)** alle Dreiecke ist die **(1)** Summe der Umfänge **(2)** Summe der Flächeninhalte **(3)** Länge der Spirale zu berechnen.

Bemerkung: Trugdolden entsprechen in ihrem Aufbau „gleichwinkeligen Spiralen". Zunächst wird bei der Bildung der Trugdolde am Sprosskegel der äußerste und nach Wachstumsabschluss auch längste Blütenspross gebildet. In einem bestimmten seitlichen Winkel zu diesem Spross differenziert sich der zweite, dann der nächste, der übernächste usw. Die Länge der Sprosse nimmt im konstanten Verhältnis ab, der kürzeste Spross ist der innerste und jüngste. Durch dieses Wachstumsmuster, das genetisch festgelegt ist, entsteht die — von oben betrachtet — spiralige Anordnung der einzelnen Blüten in der Trugdolde.

103. Ein **Ornament**[1)] hat die Form einer Spirale, die aus **a)** 11 **b)** unendlich vielen Viertelkreisen zusammengesetzt ist. Der Radius des ersten Viertelkreises beträgt $r_1 = 8$ cm, die Radien der folgenden Viertelkreise betragen jeweils $\frac{3}{4}$ des vorangehenden. Wie lang ist diese Spirale?

[1)] Ornament, das: Verzierung von Bauwerken und Gegenständen.

104. Einem Würfel mit der Kantenlänge $a_1 = 6$ cm wird eine Kugel eingeschrieben, dieser wieder ein Würfel usw.

Man berechne die Summe **a)** der ersten 5 **b)** aller (1) Würfeloberflächen (2) Würfelvolumina (3) Kugeloberflächen (4) Kugelvolumina.

105. Einem Drehkegel mit dem Radius $r = 5$ cm und der Höhe $h = 10$ cm wird ein nur halb so hoher gerader Kreiszylinder eingeschrieben. Dem Kegel über diesem Zylinder wird ein weiterer Zylinder eingeschrieben, der nur halb so hoch ist wie der erste usw.

Man berechne die Summe **a)** der ersten 4 **b)** aller (1) Zylinderoberflächen (2) Zylindervolumina.

106. Einer Kugel mit dem Radius $r_1 = 4$ cm wird ein gleichseitiger Zylinder eingeschrieben, diesem wieder eine Kugel usw.

Man berechne die Summe **a)** der ersten 6 **b)** aller (1) Kugeloberflächen (2) Kugelvolumina (3) Zylinderoberflächen (4) Zylindervolumina.

107. Einer Kugel mit dem Radius $r_1 = 4$ cm wird ein gleichseitiger Kegel eingeschrieben, diesem wieder eine Kugel usw.

Man berechne die Summe **a)** der ersten 4 **b)** aller (1) Kugeloberflächen (2) Kugelvolumina (3) Kegeloberflächen (4) Kegelvolumina.

Anleitung: Gleichseitiges Dreieck, $r_2 : r_1 = 1 : 2 \ldots$

108. Auf einen Würfel mit der Kantenlänge $a_1 = 4\,\text{cm}$ wird ein weiterer Würfel gestellt, dessen untere Ecken die oberen Kanten des ersten Würfels im Verhältnis 5:12 teilen. Auf diesen zweiten Würfel wird in gleicher Weise ein dritter gestellt usw.

Man ermittle **a)** die Höhe und **b)** das Volumen des Turms, der auf diese Weise aus (1) 8 (2) unendlich vielen Würfeln gebildet wird.

109. Einem Drehkegel mit der Höhe $h = 10\,\text{cm}$ und dem Radius $r = 4\,\text{cm}$ wird eine Folge übereinander liegender und den Kegelmantel längs einer Kreislinie berührender Kugeln eingeschrieben.

Man berechne die Summe **a)** der ersten 4 **b)** aller (1) Kugeloberflächen (2) Kugelvolumina.

Anleitung: $r : \sqrt{r^2 + h^2} = r_1 : (h - r_1)$

$r_1 : r_2 = (h - r_1) : (h - 2r_1 - r_2)$

110. Einem Würfel mit der Kantenlänge $a = 8\,\text{cm}$ wird eine Kugel eingeschrieben. Dem bei jeder der 8 Ecken frei bleibenden Raum werden 8 weitere Kugeln so eingeschrieben, dass sie die erste Kugel und die drei an die jeweilige Ecke angrenzenden Würfelflächen berühren. Diese 8 Kugeln werden von weiteren 8 in gleicher Weise eingeschriebenen Kugeln berührt usw.

Man berechne die Summe **a)** der ersten 33 **b)** aller (1) Kugeloberflächen (2) Kugelvolumina.

Anleitung: Jeweils 8 Kugeln entsprechen einem Glied der geometrischen Reihe. Die erste Kugel ist gesondert zu behandeln. Dem Diagonalschnitt entnimmt man: $4 : 4\sqrt{3} = r_2 : (4\sqrt{3} - 4 - r_2)$

111. Sophisma[1] von ZENO von Elea (um 500 v. Chr.): *„Achilles verfolgt eine Schildkröte, die ein Stadion* (≈ 185 m, altes griechisches Längenmaß) *Vorsprung hat, mit 12-mal größerer Geschwindigkeit. Kommt Achilles an die Stelle, an der sich die Schildkröte zu Anfang befand, so ist sie ihm $\frac{1}{12}$ Stadion voraus. Durchläuft Achilles diese kleine Strecke von $\frac{1}{12}$ Stadion, so ist die Schildkröte $\frac{1}{144}$ Stadion voraus usw. Folglich wird Achilles nie die Schildkröte erreichen, da sie ihm immer um ein Stück voraus ist."*

a) Tatsache ist: Achilles erreicht die Schildkröte. Welche Strecke hat er hierbei zurückgelegt?

b) Worin liegt der Trugschluss?

[1]) Das Wort kommt aus dem Griechischen und bedeutet „Trugschluss".

THINK THINK ThInk THINK THINK THINK ThInk THINK ThInk THINK ThInk THINK THINK ThInk THINK ThInk THINK

THINK ThInk THINK THINK THINK ThInk THINK

112. In einem regelmäßigen Fünfeck $A_1B_1C_1D_1E_1$ mit der Seite s_1 wird der **Drudenfuß**[1] — bestehend aus den 5 Diagonalen d_1 — eingezeichnet.

Dadurch entsteht ein weiteres (nun aber kleineres) Fünfeck $A_2B_2C_2D_2E_2$ mit der Seite s_2.

Die Fortsetzung dieses Verfahrens lässt eine unendliche Folge regelmäßiger Fünfecke entstehen, wobei alle Längen immer um den konstanten Faktor q schrumpfen.

a) Anhand obiger Figur ist zu zeigen, dass jeweils zwei Diagonalen desselben Fünfecks einander im Verhältnis des „goldenen Schnitts" teilen.

Anleitung: $d_1 : s_1 = ?$

> Eine Strecke der Länge 1 wird genau dann im Verhältnis des goldenen Schnitts geteilt, wenn für die längere Teilstrecke $p > 0$ gilt: $(1-p) : p = p : 1$

b) Man zeige: $q = p^2$

Anleitung: Vgl. Aufgabe **a)**.

c) Die Folge der Fünfeckseiten $\langle s_1, s_2, s_3, \ldots \rangle$ lässt sich als Reihe anschreiben. Ihre Summe ist mit der Länge der Diagonale d_1 identisch. Beweis?

Anleitung: $d_1 = d_2 + s_1$

d) Die Gültigkeit der Gleichung $s_1 = d_2 + d_3 + d_4 + \ldots$ ist zu begründen.

Anleitung: $s_1 = d_2 + s_2$

[1]) Auch **Pentagramm** genannt.

8. Differenzengleichungen

In den biologischen Wissenschaften, der Land- und Forstwirtschaft, der Ökonomie und der Technik werden seit geraumer Zeit sogenannte **Differenzengleichungen** erfolgreich eingesetzt.

Dieser Gleichungstyp erlaubt die Beschreibung sukzessiv ablaufender Prozesse (z. B. Entwicklung einer Population, Preisentwicklung eines auf den Markt gebrachten Artikels usw.), wobei der jeweilige Prozess-Schritt (x_n) in genau definierter Weise von seinen voran gegangenen Schritten (z. B. x_{n-1}) abhängt.

Wir beschäftigen uns hier ausschließlich mit **linearen Differenzengleichungen 1. Ordnung** $x_n = a(n) \cdot x_{n-1} + b(n)$.

x_n hängt **linear** von x_{n-1} ab. Zwischen den Folgengliedern x_n und x_{n-1} liegt jeweils **ein** (Rekursions-)Schritt, deshalb also **1. Ordnung**.

In der **Rekursionsgleichung** sind a(n) und b(n) Funktionen mit n als unabhängiger Variablen. Beide Funktionen beeinflussen die sukzessiv berechenbare Folge $\langle x_n \rangle$ ganz entscheidend.

Damit diese aber auch eindeutig bestimmbar ist, muss zusätzlich noch **genau ein** Folgenglied vorgegeben werden. Auch deshalb spricht man von einer **Gleichung 1. Ordnung**.

Beispiel:

Eine Fischpopulation wächst jedes Jahr um 12 %. Die derzeitige Anzahl beträgt 500 Fische.

a) Man stelle die Differenzengleichung auf und löse sie zunächst allgemein.

b) Wie viele Fische werden es in 7 Jahren sein?

Lösung:

a) $x_n = a \cdot x_{n-1}$ mit $a = 1{,}12$ (konstant) und $x_0 = 500$

$x_1 = a \cdot x_0$ $\quad$ $x_2 = a \cdot x_1 = a \cdot (a \cdot x_0) = a^2 \cdot x_0$ $\quad$ $x_3 = a \cdot x_2 = a \cdot (a^2 \cdot x_0) = a^3 \cdot x_0$

Allgemein: $x_n = a^n \cdot x_0$ $\quad$ $\mathbf{x_n = 1{,}12^n \cdot 500}$

b) $x_7 = 1{,}12^7 \cdot 500 = 1105{,}34$ $\quad$ $\mathbf{x_7 = 1105}$ **Fische**

Beispiel:

Der jährliche Zuwachs der Holzmenge eines Schlags von 20 000 m^3 beträgt 2,5 %. Die jährliche Schlägerungsrate beträgt 800 m^3.

a) Man stelle die Differenzengleichung auf und löse sie zunächst allgemein.

b) Wie viele m^3 beträgt die Holzmenge nach 8 Jahren?

Lösung:

a) $x_n = a \cdot x_{n-1} + b$ mit $a = 1{,}025$ (konstant), $b = -800$ (konstant) und $x_0 = 20\,000$

$x_1 = a \cdot x_0 + b$ $\quad$ $x_2 = a \cdot x_1 + b = a^2 \cdot x_0 + a \cdot b + b$ $\quad$ $x_3 = a \cdot x_2 + b = a^3 x_0 + a^2 \cdot b + a \cdot b + b$

Allgemein: $x_n = a^n \cdot x_0 + \sum_{k=1}^{n} a^{k-1} \cdot b$ $\quad$ $\mathbf{x_n = 1{,}025^n \cdot 20\,000 - \sum_{k=1}^{n} 1{,}025^{k-1} \cdot 800}$

b) $x_8 = 1{,}025^8 \cdot 20\,000 - 800 \cdot \frac{1{,}025^8 - 1}{1{,}025 - 1} = 17379{,}165$ $\quad$ $\mathbf{x_8 = 17379\ m^3}$

Beispiel:

Eine aus 1200 Forellen bestehende Population hat eine jährliche Wachstumsrate von 40 %. Die jährlichen Fangzahlen wachsen um 10 % ausgehend von 400 Stück im 1. Jahr. (440 Stück im 2. Jahr, 484 Stück im 3. Jahr usw.)

a) Man stelle die Differenzengleichung auf und löse sie zunächst allgemein.

b) Wie groß ist die Forellenpopulation nach 6 Jahren?

Lösung:

a) $x_n = a \cdot x_{n-1} + b$ mit $a = 1{,}4$ (konstant), $b(n) = -400 \cdot 1{,}1^{n-1}$ und $x_0 = 1200$

$x_1 = a \cdot x_0 + b(1)$

$x_2 = a \cdot x_1 + b(2) = a^2 \cdot x_0 + a \cdot b(1) + b(2)$

$x_3 = a \cdot x_2 + b(3) = a^3 \cdot x_0 + a^2 \cdot b(1) + a \cdot b(2) + b(3)$

Allgemein: $x_n = a^n \cdot x_0 + \sum_{k=1}^{n} b(k) \cdot a^{k-1}$

$x_n = 1{,}4^n \cdot 1200 - \sum_{k=1}^{n} 400 \cdot 1{,}1^{k-1} \cdot 1{,}4^{n-k}$

b) $x_6 = 1{,}4^6 \cdot 1200 - 400 \cdot 1{,}4^5 \cdot \frac{\left(\frac{1{,}1}{1{,}4}\right)^6 - 1}{\frac{1{,}1}{1{,}4} - 1} = 1358{,}1431$

$x_8 = 1358$ Forellen

AUFGABEN

113. Bei einem Tier, das keinerlei Nahrung zu sich nahm, wurde beobachtet, dass die Masse am Ende jedes Tags nur noch 99 % der Masse am Beginn des Tags betrug. Zu Beginn hatte das Tier 100 kg. Nach wie vielen Tagen hat es erstmals weniger als 90 kg?

114. Einem mit 2000 Liter Salzlösung (20 kg Salz im Wasser) gefüllten Tank werden pro Minute 30 Liter reines Wasser zugeführt, das sich sofort und vollständig mit der Salzlösung vermischen möge. Gleichzeitig fließen 30 Liter Lösung pro Minute ab. Wie groß ist die im Tank verbleibende Salzmenge nach einer Stunde?

115. Eine Population bestimmter Bakterien wächst derart, dass der Zuwachs zwischen der $(n-1)$-ten und der n-ten Stunde $500 \cdot 2^{1-n}$ beträgt. Wie groß ist die Population nach 10 Stunden?

116. Gehaltsverhandlungen bringen folgendes Ergebnis: Anfangsgehalt 1600,— Euro und ein jährlicher Steigerungsbetrag, der nach einem Jahr 100,— Euro beträgt und dann jährlich um 20 % wächst. Wie hoch ist das Gehalt nach der 4. Erhöhung?

117. Ein System von mehreren Seen enthält eine Million Fische. Durch natürliches Wachstum vergrößert sich diese Population jährlich um $\frac{1}{3}$. Der Fischereiverband gestattet jährlich das Fangen von 400000 Stück. Man ermittle die Anzahl der Fische nach 5 Jahren.

118. Unter der nordamerikanischen Bevölkerung leidet eine ganze Anzahl an einer bestimmten Geisteskrankheit. Jedes Jahr gibt es 1000 neue Krankheitsfälle. Die Hälfte der jeweils vorhandenen Krankheitsfälle wird geheilt. Ende 1998 gab es 1200 Krankheitsfälle. Es ist eine Tabelle der 1998 bis 2005 zu erwartenden Fälle zu erstellen.

119. Eine Tierpopulation ist von einer Krankheit befallen. Im 1. Jahr verenden 40 Tiere, jedes weitere Jahr verenden um jeweils 10 % (im 2. Jahr 44, im 3. Jahr 48,4 ...) mehr. Die jährliche Zuwachsrate an kranken Tieren beträgt 20 %. Wie viele Tiere werden nach 10 Jahren krank sein, wenn ursprünglich 250 Stück krank waren?

Vermischte Aufgaben

120. Ein elastischer Basketball wird beim oftmaligen Aufspringen allmählich in seiner Sprungbewegung gedämpft: Die Höhe h_n nimmt — vgl. nebenstehende Figur — langsam ab.

Δh_1 Δh_2 Δh_3 h_1 h_2 h_3 h_4

a) Lässt sich die abnehmende Höhe ($h_1, h_2, h_3, \ldots, h_n$) des springenden Balls besser durch eine **arithmetische** Folge oder durch eine **geometrische** Folge beschreiben? (Begründung!)

b) Gegeben: $h_4 = 0{,}7\,\text{m}$, $h_6 = 0{,}3\,\text{m}$

Aus welcher Höhe h_1 fiel der Ball beim ersten Aufsprung herunter?

c) Sobald die Sprunghöhe nur noch 5 % von h_1 beträgt, kann von einer Rollbewegung gesprochen werden. Nach dem wie vielten Aufsprung ist diese Situation erreicht?

d) In erster Näherung bewegt sich der Ball mit einer annähernd konstanten Geschwindigkeit. Wie lange braucht der Ball bis zum 5. Aufsprung, wenn er für den ersten Sprung $t_1 = 1{,}2$ s benötigt?

e) Wie lange dauert es, bis die Rollbewegung erreicht wird?

121. Walt DISNEY (1901—1966) musste für seine 1928 entstandenen Micky-Maus-Filme für eine einzige Filmminute mehr als 1000 Einzelbilder zeichnen. Heute werden Zeichentrickfilme bereits mit dem Computer produziert. Selbst die Bewegung der Einzelbilder kann der Computer (bei entsprechenden Vorgaben) selbst entwerfen.

Einfacher als das mit dem Computer entwickelte Bild eines Bergs (vgl. nebenstehenden Text) wird die folgende Figur aus einer Folge von Dreiecken mit jeweils halbierten Basislängen aufgebaut:

1 A_1 A_2 A_2 A_2 A_3

a) Wie groß ist die Gesamtfläche $A = A_1 + 3A_2 + 7A_3$ der rosa unterlegten Dreiecke?

b) Wie lautet die allgemeine Formel $A = A_1 + 3A_2 + 7A_3 + \ldots + mA_n$? $(n \in \mathbb{N}^*)$

c) Wie groß ist die Gesamtfläche $A = A_1 + 3A_2 + 7A_3 + \ldots + 1023A_{10}$?

Um mit dem Computer ein realistisches Bild eines Berges zu erzeugen, kann man von einem einfachen Dreieck ausgehen:

Nun wird der Mittelpunkt jeder Dreiecksseite bestimmt und dieser um eine Entfernung, die proportional zur zugehörigen Seitenlänge ist, verschoben. Die drei neuen Punkte werden verbunden. Es bilden sich 4 neue Dreiecke:

Auf diese 4 neuen Dreiecke wird jeweils das selbe Verfahren angewandt:

Durchläuft der Computer diesen Teilungsalgorithmus genügend oft, bildet sich schließlich ein realistisches Bild eines Bergs:

122. Die Schichtung der Wassertemperatur in einem See folgt annähernd einer arithmetischen Folge. Während das Wasser im Sommer eine Oberflächentemperatur von 22° C hat, bleibt das Wasser ab einer gewissen Tiefe auf der Temperatur mit der größten Dichte des Wassers, nämlich 4° C.

a) Man berechne die Tiefe bis zu dieser Temperatur, wenn die Temperaturabnahme 2° in 5 m beträgt.

b) Im Winter ist der See vereist, somit herrscht an der Oberfläche 0° C. Die konstante Wassertemperatur von 4° steigt gegenüber dem Sommer noch um 20 m nach oben. Wie groß ist nun die Temperaturänderung pro 5 m?

Sommer: 22°C, 13, 4
Winter: 0°C, 2, 4

123. Wir haben bereits die Summe s_n einer arithmetischen Folge $\langle a_k \rangle$ zu bilden gelernt: $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

Wenn es sich bei den Folgengliedern a_k ausschließlich um ganze Zahlen handelt ($a_k \in \mathbb{Z}$), so muss auch für ihre Summe s_n gelten: $s_n \in \mathbb{Z}$. Nehmen wir an, dass die Gliederanzahl n **ungerade** ist. Dann wird $\frac{n}{2}$ (in der oberen Formel) sicher nicht ganzzahlig sein. Müssen wir nun fürchten, dass unsere Formel in diesem Fall ungültig ist? Die Antwort ist zu beweisen.

Anleitung: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

124. Das Problem des FIBONACCI[1)] oder: Wie sich Kaninchen vermehren

Wir schreiben das Jahr 1201 und schlendern über den Markt des Kleinstädtchens Pisa in Italien. Von allen Seiten sind die Rufe der Händler, die ihre Waren feilbieten, lautstark zu hören. Da offeriert unter anderem ein Händler Kaninchenpärchen mit einer ganz besonderen Fortpflanzungseigenschaft an und verspricht: „Jedes Pärchen bekommt schon nach zwei Lebensmonaten — und ab diesem Zeitpunkt sogar monatlich — genau ein Pärchen Junge, die wiederum die Fortpflanzungseigenschaft ihrer Eltern geerbt haben."

Jemand kauft ein neugeborenes Kaninchenpärchen und überlegt, mit wie vielen Kaninchenpärchen wohl nach einem, zwei, drei ... Monaten zu rechnen sein wird. Um das Problem zu lösen, stellt er eine Tabelle auf.

Monat	Kaninchenpaare a_n		
0	0	=	0
1	1	=	1
2	1+0	=	1
3	1+1	=	2
4	2+1	=	3
5	3+2	=	5
6	5+3	=	8
7	8+5	=	13
....	....		

a) Die Tabelle ist bis zum Monat 12 zu vervollständigen.

b) Das Bildungsgesetz der Folge a_n, die die Anzahl der Kaninchenpärchen in expliziter Form beschreibt, lautet:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5} \cdot 2^{n-1}}[(1+\sqrt{5})^{n-1} - (1-\sqrt{5})^{n-1}], \; n \in \mathbb{N}^*$$

Man zeige, dass sie dem impliziten Bildungsgesetz $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ genügt.

Bemerkung: Obwohl in dem obigen expliziten Bildungsgesetz **irrationale** Zahlen auftreten, ergibt sich doch für jedes n ($n \in \mathbb{N}^*$) eine **ganze Zahl für a_n!**

[1)] Leonardo von Pisa, genannt **FIBONACCI** (ca. 1170—1240), italienischer Mathematiker.

125. Die erste Seite der LP „Bad" von Michael JACKSON hat eine Spieldauer von 21 Minuten und 2 Sekunden. Der Durchmesser der äußersten Rille beträgt 289,5 mm, der der innersten 129,5 mm.[1)]

a) Wie viele Umdrehungen vollführt der Plattenteller während der Spieldauer einer Plattenseite (Drehzahl $33\frac{1}{3}$ U / min)?

b) Wie lange ist die Plattenrille[1)] insgesamt ?

c) Wie groß ist der Abstand zweier Rillen? Weiters ist zu berechnen, wie viele Rillen pro mm Plattenbreite daher nebeneinander geschnitten werden müssen.

d) Die Geschwindigkeit der äußersten und innersten Rille — relativ zur Nadel — ist zu ermitteln. In welchem der beiden Fälle ist die Tonqualität höher ?

126. Die Bandgeschwindigkeit einer Tonbandkassette beträgt konstant 4,75 cm / s .

a) Es ist die Bandlänge einer Kassette mit 2 × 30 Minuten Spielzeit (C 60) zu berechnen.

Der leere Spulenkörper dieser Kassette hat einen Radius von 11,0 mm, der Radius des vollen Bandwickels beträgt 23,7 mm. Aus diesen Angaben lässt sich die Zahl der Windungen am vollen Bandwickel sowie die Banddicke eruieren [1)].

b) Text wie **a)** für eine C 90-Kassette (2 × 45 Minuten, $r_1 = 11{,}0$ mm, $r_n = 25{,}0$ mm)

c) Text wie **a)** für eine C 120-Kassette (2 × 60 Minuten, $r_1 = 11{,}0$ mm, $r_n = 24{,}9$ mm)

d) Man berechne die Drehzahl eines Spulenkörpers am Bandanfang (leere Spule) und am Bandende (volle Spule) in den Aufgaben **a)**, **b)** und **c)**.

e) Die Anzahl der Umdrehungen ist mit der Anzeige des Zählwerks am Bandende (C 60.....392, C 90.....566, C 120.....758) zu vergleichen. Welcher einfache Zusammenhang ergibt sich?

Bemerkung: Die Zählwerksanzeige kann bei Kassetten gleichen Typs durch variable Länge des Vorspannbands bzw. durch verschieden straffe Wicklung natürlich etwas differieren.

127. Die meisten Kassettenrekorder besitzen ein Zählwerk, welches am Beginn eines Tonbands schneller läuft als am Ende. Der Grund hierfür ist, dass das Zählwerk nicht die Länge des abgelaufenen Bands angibt, sondern die Umdrehungen der Antriebsachse (des Spulenkörpers) zählt. Üblicherweise gilt ein Übersetzungsverhältnis von 1 : 2, d. h. dass einer Zähleinheit zwei Umdrehungen entsprechen.

a) Gibt es für diesen Fall eine möglichst einfache Formel, die für jede beliebige Laufzeit t (vom Bandbeginn an) die Berechnung des entsprechenden Zählerstands z gestattet ? ($t = t(z)$)

Anleitung: Man ersetze für die Rechnung die Bandspirale durch eine Folge konzentrischer Kreise. Daraus ergibt sich eine Formel für die Bandlänge l.

Es gilt: $l = vt$ und $n = 2z$ (v.....Bandgeschwindigkeit, t.....Laufzeit bis zu z, n.....Anzahl der Windungen, z.....Zählerstand)

b) Alle in der Formel $t = t(z)$ auftretenden Koeffizienten sind anzugeben. Welche Bedeutung haben sie? Welche sind leicht zu ermitteln ?

c) Durch Zusammenfassen mehrerer Koeffizienten zu neuen Koeffizienten ist die Funktion $z \to t$ weiter zu vereinfachen.

d) Sowohl Grundmenge G als auch Wertemenge W der in **a)** bzw. **c)** gefundenen Funktion $t = t(z)$ sind zu bestimmen. Im Anschluss daran ist die Funktion jeweils für C 60, C 90 und C 120 in einem gemeinsamen Koordinatensystem zu zeichnen.

Bemerkung: Die erhaltene Kurve bezeichnet man auch als **Eichkurve** des Zählwerks. Sie dient zur Ermittlung der Spieldauer von Aufnahmen bzw. der noch verfügbaren Aufnahmezeit auf einer Kassette.

---

1) Die Spirale ist für die Berechnung näherungsweise durch konzentrische Kreise zu ersetzen.

9. Problemstellungen der Physik und Technik

128. Fast ausschließlich in der physikalischen Grundlagenforschung werden sogenannte **Linearbeschleuniger** verwendet. Mit ihnen können Elektronen bzw. Ionen auf hohe Geschwindigkeit gebracht werden. Damit werden nun Reaktionen zwischen den Elementarteilchen ausgelöst, um den Aufbau der Materie zu erforschen.

Ein Linearbeschleuniger besteht im Wesentlichen aus einer Folge zylindrischer Röhren (vgl. nebenstehende Figur) der Längen l_n:

$$l_n = nT\sqrt{\frac{eU}{2m}}$$

U ..... Spannung zwischen zwei Zylindern
T ..... Periode der Wechselspannung
e ..... Ladung des Teilchens
m ..... Teilchenmasse
n ..... Index der Rohrlängen

Ist $\langle l_n \rangle$ eine geometrische oder eine arithmetische Folge? (Begründung?)

129. In der Elektrotechnik ist die Abstufung elektrischer Widerstände durch international gültige **Normkennzahlreihen**[1] fixiert. Beim Aufbau von Schaltungen und bei der Konstruktion elektrischer Maschinen hat man die Normen zu berücksichtigen. Dabei treten folgende Zahlenwerte auf: $\langle 1{,}0,\ 1{,}5,\ 2{,}2,\ 3{,}3,\ 4{,}7,\ 6{,}8\ 10,\ 15,\ 22,\ \ldots \rangle$

a) Man untersuche, ob dabei eine arithmetische oder geometrische Folge (auf eine Dezimalstelle genau) vorliegt. Wie lautet die Bildungsformel für Folgenglieder?

b) Wie lauten die nächsten 6 Glieder? Wie groß ist der kleinste Widerstandwert im $k\Omega$-Bereich?

Anleitung: $1k\Omega = 10^3\,\Omega$

c) Diese Normzahlreihe heißt E6. Man berechne die Folgenglieder der E12, wo jeweils zwischen zwei benachbarten Gliedern der E6 ein weiteres Glied dazwischen geschaltet wird.

Anleitung: Zwischen $1{,}0\,\Omega$ und $1{,}5\,\Omega$ wird also $1{,}2\,\Omega$ eingefügt usw.

d) Man berechne die Widerstandswerte der nächstfeineren Normreihe E24 zwischen $1{,}0\,\Omega$ und $3{,}3\,\Omega$.

130. Im Maschinenbau treten **Normzahlreihen**[1] bei Bauteilabmessungen, Drehzahlen, Förderungen usw. auf.

a) Es sollen 6 Rohre mit Durchmessern zwischen 50 mm und 500 mm hergestellt werden. Wie sind die 4 restlichen Rohre zu dimensionieren, wenn

(1) die Stufung in einer **arithmetischen Folge** erfolgt oder

(2) eine **geometrische Folge** von Rohrdurchmessern verlangt wird?

b) Man vergleiche jeweils die prozentuellen Zuwächse der Zahlenwerte. Für welches Produktionsprogramm wird sich der Hersteller entscheiden?

Anleitung: Die Feinheit der Unterteilung sollte überall etwa gleich sein.

c) Wie lautet die Folge, wenn zwischen 10 mm und 100 mm 9 Glieder eingeschoben werden?

Bemerkung: Es handelt sich dabei um R10.

131. Am bekanntesten ist die genormte Abstufung der Papierformate. Das Format A0 (Plakat) hat eine Seitenlänge von 1189 mm, A3 hat hingegen eine Seitenlänge von nur 420 mm (ÖNORM A1001).

a) Man berechne daraus die Seitenlängen von A1 (Halbbogen) bis A6 (Postkartenformat), wenn auch bei ihnen eine **geometrische Folge** vorliegt.

b) Wie groß ist die Breite des jeweiligen Papierbogens? Genügen auch die Breiten einer geometrischen Folge?

Anleitung: Man messe die Breite eines A4-Blatts.

---
[1]) Es handelt sich eigentlich um Folgen und nicht um Reihen!

132. Warum haben optische Linsen oft einen etwas bläulichen Glanz?

Nun sind doch Reflexionen an Linsenoberflächen sicher meist unerwünscht, denn sie rufen in der Fotografie unscharfe Bilder und bei Brillenträgern Sehbehinderungen hervor.

Diese Effekte entstehen an jedem Übergang von Medien unterschiedlicher optischer Dichte (z. B. zwischen Luft und Glas). Dort werden Lichtstrahlen sowohl gebrochen als auch — zum geringeren Teil — reflektiert.

a) In der nebenstehenden Figur ist ein derartiger Strahlengang vereinfacht dargestellt. Es ist die Folge $\langle I_n \rangle$ der Intensitäten der reflektierten Strahlen anzugeben, wenn beim Übergang von Luft in Glas (bzw. umgekehrt) jeweils 90 % der Lichtintensität gebrochen und der Rest reflektiert wird.

Die Summe aller Reflexionsverluste I_V ist in Prozent von der einfallenden Lichtintensität I anzugeben.

I=100%
10% 8,1% 0,081%
Reflexionen
9% 0,09%
90% 0,9% 0,009%
81% 0,81% 0,0081%

b) Wie groß ist der Verlust I_V an Lichtintensität, wenn ein Lichtstrahl der Intensität I 5 gleichartige Linien hintereinander passiert und an **jeder** Grenzfläche 5 % seiner Intensität durch Reflexionen einbüßt?

1 I_1
2 I_2
3 I_3
4 I_4
5 I_5
I_6=?

SUMMICRON-R 1:2/35 mm

Reflexionen an Linsensystemen können durch Aufbringen dünner Schichten mit sukzessiv sich vergrößerndem Brechungsindex vermieden werden. Solche Schichten werden **Blaubelag** genannt und sind auf jedem Kameraobjektiv zu beobachten.

133. Das **FABRY-PÉROT-Interferometer**[1] besteht aus zwei verspiegelten planparallelen Platten, zwischen denen ein Lichstrahl oft hin und her reflektiert wird. Bei jeder Reflexion verlässt nur ein Bruchteil der Lichtintensität das Spiegelsystem. Da sich die parallel austretenden Lichtstrahlen bei halbzahligem Gangunterschied der Wellenlänge auslöschen (destruktive Interferenz) und bei ganzzahligem Gangunterschied verstärken (konstruktive Interferenz), entstehen dadurch scharfe Strahlenbündel.

a) Man berechne die austretende Gesamtintensität (auf der rechten Seite der nebenstehenden Figur), wenn 95 % des Lichts an den Platten reflektiert werden, der Strahl 5-mal reflektiert wird und schließlich 50 % der Intensität durch Interferenz ausgelöscht werden.

I
I_1
I_2
I_3
I_4
I_5

b) Wie oft wurde der Strahl reflektiert, wenn 10 % der ursprünglichen Intensität I — unter Berücksichtigung der Schwächung durch Interferenz — auf der rechten Seite das Spiegelsystem verlassen?

Das obige Foto zeigt das HP 5528 A LMS Interferometer.

Interferometer sind optische Messgeräte, mit denen Präzisionsmessungen von Längen, Brechungsindizes und optischen Spektren ausgeführt werden können. Mittels Laser-Interferometrie war die bisher genaueste Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit und der Distanz zwischen Erde und Mond möglich.

[1] Die französischen Physiker **Charles FABRY** (1867—1945) und **Jean-Baptiste Gaspard Gustav Alfred PÉROT** (1863—1925) konstruierten 1896 das nach ihnen benannte Interferometer.

134. Für die Analyse chemischer Zusammensetzungen von weit entfernten Sternen und Galaxien wird die von diesen Himmelskörpern emittierte Strahlung untersucht. Gewisse Elemente senden nämlich Licht ganz bestimmter Wellenlänge aus.

Diese „Spektren" (Das sind Lichtemissionen charakteristischer Wellenlängen.) entstehen aus den Energieunterschieden ΔE der Bahnen, auf denen sich die Elektronen um den Atomkern bewegen.

Für das chemische Element Wasserstoff (H), das in allen Sternen vorkommt, ist bei der Betrachtung der Energieniveaus eine Abnahme der Energiedifferenzen E zu bemerken.

a) Man zeige anhand der dargestellten Figur, dass die Energiedifferenzen weder eine arithmetische noch geometrische Folge bilden.

b) Man teste für die Energieniveaus (gegenüber dem Grundzustand) E_n die Bildungsgesetze der Gestalt

$$E_n = an^{-m} \text{ für } m = 1,2,3$$

Welches der drei Gesetze passt am besten?

c) Mit Hilfe des in **b)** gefundenen Bildungsgesetzes sollen sowohl E_5 und E_6 als auch die Übergänge der **BALMER Serie**[1] (vgl. Figur) $\langle E_2 - E_3, E_2 - E_4, E_2 - E_5, E_2 - E_6 \rangle$ berechnet werden.

Bemerkung: $[E] = 1\text{eV} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J, eV..... Elektronenvolt

E_n=0 eV
E_4=0,85 eV
E_3=1,52 eV
E_2=3,4 eV
E_1=13,6 eV
Energiezunahme in eV gegenüber dem Grundzustand
BALMER-Serie
Absorption
Emission
Grundzustand

135. Die mittleren Sonnenabstände E_n $(n \in \mathbb{Z})$ der Planeten unseres Sonnensystems folgen — innerhalb gewisser Toleranzen — der sogenannten **TITIUS-BODEschen Folge**[2].

$$E_n = 0{,}4 + 0{,}3 \cdot 2^n \text{ AE}$$

AE.....Astronomische Einheit, 1 AE = Entfernung Erde—Sonne

a) Man ermittle n für die zwei äußeren Planeten[3] Uranus (E = 19,6 AE) und Neptun (E = 38,8 AE) und die Sonnenabstände für die vorhergehenden Himmelskörper Venus, Erde, Mars, Ceres (ein Planetoid im Asteroidengürtel), Jupiter und Saturn. Sämtliche Ergebnisse sind in der nebenstehenden Tabelle festzuhalten.

b) Welchen Wert muss n für die Merkurbahn (E = 0,39 AE) haben ?

Himmelskörper	n	E_n
Venus		
Erde		
Mars		
Ceres		
Jupiter		
Saturn		
Uranus		
Neptun		

[1]) Benannt nach **Johann Jakob BALMER** (1825—1898), schweizerischer Mathematiker.

[2]) Benannt nach **Johann Daniel TITIUS** (1729—1796), deutscher Mathematiker und Physiker, sowie nach **Johann Elert BODE** (1747—1826), deutscher Astronom.

[3]) Der äußerste Planet Pluto wird in dieser Folge nicht erfasst.

REELLE FUNKTIONEN

1. Polynomfunktionen, Gleichungen höheren Grads

Wir haben bereits sogenannte **Polynomfunktionen** kennen gelernt, ohne diesen Begriff verwendet zu haben. Die im Abschnitt „Relationen und Funktionen" in Band 1 behandelte lineare Funktion heißt auch **Polynomfunktion ersten Grads**. Die in Band 2 behandelte quadratische Funktion heißt auch **Polynomfunktion zweiten Grads**. Wir wollen uns in diesem Abschnitt auch **Polynomfunktionen höheren als zweiten Grads** zuwenden.

Beispiele für Polynomfunktionen dritten Grads:

$y = x^3 + 5x^2 - 7x + 5,\ y = 4x^3 - 2x^2 + 9,\ y = 8x^3 + 7x - 3$

Beispiele für Polynomfunktionen vierten Grads:

$y = x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 5x + 3,\ y = 5x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 2,\ y = 6x^4 + 2x^3 - x$

Allgemein kann man sagen: Eine Funktion mit der Funktionsgleichung

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

mit $a_i \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ und $a_n \neq 0$ heißt **Polynomfunktion n-ten Grads**.

Die Gleichung einer Polynomfunktion ersten Grads lautet allgemein:

$y = ax + b$ (bzw. $y = kx + d$)

Die Gleichung einer Polynomfunktion zweiten Grads lautet allgemein:

$y = ax^2 + bx + c$

Die Gleichung einer Polynomfunktion dritten Grads lautet allgemein:

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Die Gleichung einer Polynomfunktion vierten Grads lautet allgemein:

$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

Beispiel:

Man zeichne die Potenzfunktion $y_1 = x^3$ und die quadratische Funktion $y_2 = 2x^2 - x - 2$ im Intervall [-2, 2] in ein gemeinsames Koordinatensystem.

Dann bestimme man aus diesen Funktionen durch Addition der Funktionswerte einige Punkte der Polynomfunktion dritten Grads $y_3 = x^3 + 2x^2 - x - 2$ und zeichne diese Polynomfunktion ebenfalls in das Koordinatensystem ein.

Lösung:

Wertetabelle:

x	y_1	y_2	y_3
−2	−8	8	0
−1,5	−3,375	4	0,625
−1	−1	1	0
−0,5	−0,125	−1	−1,125
0	0	−2	−2
0,5	0,125	−2	−1,875
1	1	−1	0
1,5	3,375	1	4,375
2	8	4	12

Eine Polynomfunktion n-ten Grads ist durch die Koordinaten von $n+1$ Punkten, die auf dem Graph der Polynomfunktion liegen, eindeutig bestimmt. Umgekehrt kann man durch n Punkte den Graphen einer Polynomfunktion $(n-1)$-ten Grads legen, d. h. man kann eine Polynomfunktion $(n-1)$-ten Grads bestimmen, die durch alle gegebenen n Punkte verläuft.

Beispiel:

Wie lautet die Gleichung der Polynomfunktion dritten Grads, die Nullstellen bei $x_1 = -4$ und $x_2 = -1$ hat und deren Graph durch den Punkt $P(-3, 4)$ geht und die y-Achse bei $y = 4$ schneidet?

Lösung:

Die Gleichung einer Polynomfunktion dritten Grads lautet allgemein: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Wir setzen in diese allgemeine Funktionsgleichung ein.

(1) Nullstelle bei $x_1 = -4 \Rightarrow N_1(-4, 0)$: $0 = a(-4)^3 + b(-4)^2 + c(-4) + d \Rightarrow \mathbf{0 = -64a + 16b - 4c + d}$

(2) Nullstelle bei $x_2 = -1 \Rightarrow N_2(-1, 0)$: $0 = a(-1)^3 + b(-1)^2 + c(-1) + d \Rightarrow \mathbf{0 = -a + b - c + d}$

(3) Graph geht durch den Punkt $P(-3, 4)$: $4 = a(-3)^3 + b(-3)^2 + c(-3) + d \Rightarrow \mathbf{4 = -27a + 9b - 3c + d}$

(4) Graph schneidet die y-Achse bei

$y = 4 \Rightarrow S(0, 4)$: $4 = a - 0^3 + b - 0^2 + c - 0 + d \Rightarrow \mathbf{4 = d}$

Damit sind für a, b, c und d genau 4 lineare Gleichungen gegeben, die gleichzeitig erfüllt werden müssen.

(1) $0 = -64a + 16b - 4c + d$

(2) $0 = -a + b - c + d$

(3) $4 = -27a + 9b - 3c + d$

(4) $4 = d$

Wird dieses Gleichungssystem mit einer der üblichen Methoden (z. B. mit dem Eliminationsverfahren) gelöst, so ergibt sich:

$a = 1 \qquad b = 6 \qquad c = 9 \qquad d = 4$

Wir setzen die gefundenen Werte für a, b, c und d in die allgemeine Funktionsgleichung ein und erhalten somit die gesuchte Funktionsgleichung: $\mathbf{y = x^3 + 6x^2 + 9x + 4}$

Beispiel:

Welche gemeinsamen Punkte haben die Graphen der Polynomfunktionen mit den Funktionsgleichungen $y_1 = x^3 - 2x^2 + 2x - 4$ und $y_2 = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$?

Lösung:

Für die gemeinsamen Punkte muss $y_1 = y_2$ gelten. Wir setzen die Funktionsterme gleich:

$$x^3 - 2x^2 + 2x - 4 = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}$$

$$\mathbf{x_1 = -1 \Rightarrow y_1 = -9,\ P_1(-1, -9)}$$

$$\mathbf{x_2 = 2 \Rightarrow y_2 = 0,\ P_2(2, 0)}$$

Beim letzten Beispiel ergab sich durch Subtraktion von x^3 eine quadratische Gleichung, die wir mit Hilfe der bekannten Formel lösen konnten. Allerdings führen viele Fragestellungen im Zusammenhang mit Polynomfunktionen auf Gleichungen höheren Grads. Um diese Probleme einer Lösung zuzuführen, hat man verschiedene Näherungsmethoden entwickelt. An dieser Stelle soll ein numerisches Verfahren zur Lösung von Gleichungen besprochen werden, das unter dem Namen **Regula falsi** bereits im Altertum arabischen Mathematikern bekannt war.

Die Idee, die hinter der Regula falsi steckt, ist relativ einfach. Die Gleichung $f(x) = 0$ wird als Funktion $y = f(x)$ aufgefasst. Beispielsweise ist die Frage nach der Lösungsmenge der Gleichung $x^3 - x^2 + 1 = 0$ in $\mathbb{R}$ gleichbedeutend mit der Frage: „Wo schneidet die Funktion $y = x^3 - x^2 + 1$ die x-Achse?“ oder „Welche Nullstellen besitzt die Funktion $y = x^3 - x^2 + 1$?“

Die in Figur **(1)** rot eingezeichnete Kurve $y = f(x)$ schneidet die x-Achse an der Stelle x bzw. $y = f(x)$ besitzt die Nullstelle N (x, 0). Es gilt nun, diese Kurve durch die Sekante s zu ersetzen **und die Nullstelle x_3 der Sekante zu ermitteln**. Zugegeben: Die Nullstelle $(x_3, 0)$ von s ist nicht identisch mit (x, 0). Aber ist nicht x_3 ein weitaus besserer Näherungswert als x_1 oder x_2? Und da man das Verfahren immer wieder anwenden kann — vgl. Figur **(2)** —, nähert man sich dem gesuchten Wert x immer mehr.

Nochmals: Die in Figur **(1)** rot eingezeichnete Kurve $y = f(x)$ wird durch die Sekante s ersetzt. s schneidet die x-Achse an der Stelle x_3, $f(x_1)$ und $f(x_2)$ müssen verschiedene Vorzeichen besitzen. Wenn x_1 und x_2 Näherungswerte der Gleichung $f(x) = 0$ sind, ergibt sich ein verbesserter Näherungswert nach folgenden Formeln:

$$x_3 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_2 - x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} \text{ bzw. } x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)(x_2 - x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}$$

Bemerkung: Um z. B. die Formel $x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)(x_2 - x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}$ herzuleiten, ist davon auszugehen, dass $(x_2 - x_3) : (x_2 - x_1) = f(x_2) : [f(x_2) - f(x_1)]$ gilt. (Strahlensatz!)

Beispiele für (algebraische) Gleichungen dritten Grads:
$x^3 - 3x^2 + 5x - 7 = 0$,
$4x^3 - 5 = 0$, $x^3 + 7x = 1$ usw.

Beispiele für (algebraische) Gleichungen vierten Grads:
$x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 2 = 0$,
$6x^4 = 1$, $9x^4 - 5x + 3 = 2x^2$ usw.

(1)

(2)

Beispiel:

Die Gleichung $0{,}1x^3 - 0{,}3x^2 + 0{,}5x - 0{,}7 = 0$ ist in $\mathbb{R}$ mit Hilfe der Regula falsi zu lösen. Das Ergebnis ist auf 2 Dezimalstellen genau anzugeben.

Lösung:

① Zunächst wird die Gleichung in eine Funktion $y = f(x)$ „umgewandelt“ und eine Wertetabelle aufgestellt.

$y = 0{,}1x^3 - 0{,}3x^2 + 0{,}5x - 0{,}7$

x	− 2	− 1	0	1	2	3
y	− 3,7	− 1,6	− 0,7	− 0,4	− 0,1	0,8

② Wir bestimmen zwei x-Werte, bei denen die Funktionswerte verschiedene Vorzeichen haben:

$f(2) = -0{,}1$, $f(3) = 0{,}8$ $\Rightarrow$ Eine Nullstelle muss zwischen den beiden Werten x = 2 bzw. x = 3 liegen.

Die Lösung liegt im Intervall [2, 3] ⇒ Wir wählen $x_1 = 2$ und $x_2 = 3$ als Startwerte.

Carl Friedrich GAUSS
(1777—1855)

Fundamentalsatz der Algebra:

Jede Gleichung n-ten Grads hat genau n Wurzeln, nicht mehr und nicht weniger.[1)]

Dieser von **Jean Baptiste Lerond D'ALEMBERT** (1717–1783) im Jahre 1746 aufgestellte Satz wurde von Carl Friedrich GAUSS 1799 bewiesen. Er bezieht sich auf Lösungen über der Grundmenge $\mathbb{C}$.

Ein weiteres numerisches Verfahren zur Lösung von Gleichungen höheren Grads ist die sogenannte **Bisektion** oder **Intervallhalbierung**. Alle numerischen Lösungsmethoden erlauben es, die Elemente der Lösungsmenge mit jeder gewünschten Genauigkeit zu errechnen.

③ Im Hinblick auf die nebenstehende Formel berechnen wir die einzelnen Werte in der folgenden Tabelle:

$$x_3 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_2 - x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}$$

$$f(x) = 0{,}1x^3 - 0{,}3x^2 + 0{,}5x - 0{,}7$$

n	x_1	x_2	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\frac{f(x_1)(x_2-x_1)}{f(x_2)-f(x_1)}$	x_3	$f(x_3)$
1	2	3	−0,1	0,8	−0,1111	2,1111	−0,0406
2	2,1111	3	−0,0406	0,8	−0,0429	2,1540	−0,0155
3	2,1540	3	−0,0155	0,8	−0,0161	2,1701	−0,0058
4	2,1701	3	−0,0058	0,8	−0,0060	2,1761	−0,0021
5	2,1761	3	−0,0021	0,8	−0,0022	2,1783	−0,0007
6	2,1783	3	−0,0007	0,8	−0,0007	2,1790	−0,0003
7	2,1790	3	−0,0003	0,8	−0,0003	2,1793	

④ Bei $n = 7$ stimmen die Ergebnisse der letzten zwei verbesserten Werte auf 3 Dezimalstellen überein: 2,179. Die Verbesserung der Näherungslösung ist damit im Bereich der verlangten Genauigkeit beendet. Wir runden auf 2 Dezimalstellen. Die Lösung x der Gleichung $0{,}1x^3 - 0{,}3x^2 + 0{,}5x - 0{,}7 = 0$ können wir mit $\bar{x} = 2{,}18$ angeben.

Bemerkung: Um allgemein das Ergebnis auf n ($n \in \mathbb{N}^*$) Dezimalstellen genau anzugeben ist so lange zu rechnen, bis sich die $(n+1)$-te Dezimalstelle nicht mehr ändert. Dann ist auf n Dezimalstellen zu runden.

⑤ $\bar{x}$ muss keineswegs die einzige reelle Lösung sein. Die Gleichung $0{,}1x^3 - 0{,}3x^2 + 0{,}5x - 0{,}7 = 0$ hat genau drei Lösungen — vgl. den in der Außenspalte erwähnten **Fundamentalsatz der Algebra**.

Vielleicht sind die zwei anderen Lösungen nicht reell. Um dies herauszufinden, dividieren wir die Gleichung durch den Linearfaktor $(x - 2{,}18)$ und lösen anschließend die quadratische Gleichung:

$$(0{,}1x^3 - 0{,}3x^2 + 0{,}5x - 0{,}7) : (x - 2{,}18) = 0{,}1x^2 - 0{,}082x + 0{,}321$$
$$-(0{,}1x^3 - 0{,}218x^2)$$
$$-0{,}082x^2 + 0{,}5x$$
$$-(-0{,}082x^2 + 0{,}179x)$$
$$0{,}321x - 0{,}7$$
$$-(0{,}321x - 0{,}69978)$$
$$-0{,}22 \cdot 10^{-3} \text{ Rest}$$

Wenn wir nun für $0{,}1x^2 - 0{,}082x + 0{,}321 = 0$ die Lösungsformel der quadratischen Gleichung verwenden, zeigt sich, dass sie keine Lösungen in $\mathbb{R}$ besitzt.

$\Rightarrow \bar{x} = 2{,}18$ ist die einzige reelle Lösung der Gleichung

$0{,}1x^3 - 0{,}3x^2 + 0{,}5x - 0{,}7 = 0$ $\qquad L = \{2{,}18\}$

[1)] Im Fundamentalsatz der Algebra ist die Anzahl der Lösungen im Sinne der **algebraischen Wurzelzählung** zu verstehen: Es ist möglich, dass einzelne Lösungen mehrfach auftreten.

Einige historische Bemerkungen zum Lösen von Gleichungen:

Anfang des 16. Jahrhunderts scheiterten alle Gelehrten dieser Welt an Gleichungen dritten oder höheren Grads. Lange hielt man das Problem für unlösbar.

So behauptete der Franziskanermönch **Luca PACIOLI** (ca. 1450—1520) in seinem mathematischen Werk **„Summa de arithmetica“**[1], dass die Schwierigkeit, Gleichungen dritten Grads (sogenannte **„kubische Gleichungen“**) zu lösen, unüberwindbar sei.

Zu jener Zeit war es üblich, dass in Italien Wettkämpfe im Aufgabenlösen abgehalten wurden. Dabei handelte es sich aber nicht um Tests oder Schularbeiten in unserem Sinn. Vielmehr hing oftmals der Lebensunterhalt dieser kampfeslustigen italienischen Mathematiker davon ab, wenn sie hohe Geldbeträge riskierten, die dann der Gewinner eines Wettkampfs erhielt.

Niccolo FONTANA (ca. 1500—1557), genannt „TARTAGLIA“ (der Stotterer) war in Italien als einer der besten „Gleichungslöser“ bekannt. Er sollte bald zum berühmtesten Mathematiker Italiens werden.

„Ein Mann namens Fiore, der von seinem Lehrer Ferro um 1505 die Methode erhalten hatte, Gleichungen der Form $x^3 + ax = b$ zu lösen, wandte sich, als stolzer Besitzer — wenn auch nicht Erfinder — dieses wissenschaftlichen Monopols, an Tartaglia und rühmte sich nun seiner Kunst. Tartaglia forderte ihn daraufhin zu einem öffentlichen Wettstreit heraus. Jeder der beiden Gegner sollte 30 versiegelte Aufgaben bei einem Notar hinterlegen. 50 Tage Zeit war für die Auflösung gelassen. Sieger blieb, wer die meisten Aufgaben löste, und er erhielt für jede Aufgabe überdies 5 Soldi.

Der Stotterer war seines Sieges gewiß, er hielt nicht allzuviel von Fiore. Indessen mußte er kurz vor dem Termin erfahren, daß jener nicht von eigenen Künsten zehrte, sondern das Erbe eines großen, verstorbenen Meisters verwaltete.

So machte sich Tartaglia an die Arbeit, setzte allen Eifer, Fleiß und Kunst ein, um die Regel für jene Gleichungen zu finden, und es gelang am 10. Februar 1535, zehn Tage vor dem Termin, durch mein gutes Geschick‘. Der Ausgang konnte danach nicht zweifelhaft sein.

Sämtliche Aufgaben, die Fiore stellte, führten auf Gleichungen der Form $x^3 + ax = b$, so wie sein Meister Ferro es gelehrt hatte; sie wurden zum blassen Neid des Fiore in zwei Stunden allesamt gelöst.

Tartaglia seinerseits stellte dem Gegner verschiedene Aufgaben, darunter auch spezielle Gleichungen der Form $x^3 + ax^2 = b$, also mit dem quadratischen Glied, und Fiore, kein Mann des Geistes, sondern nur des Schemas, verzweifelte darüber und löste keine einzige. Er trat zurück in den Schatten, denn sein geschichtliches Verdienst war erfüllt, indem er den mächtigeren Geist auf das Problem hingewiesen hatte.“[2]

TARTAGLIA war also der erste, der über die Formel verfügte, um kubische Gleichungen zu lösen. Diese berühmte Regel wird allerdings heute allgemein als **„CARDANsche Formel“** bezeichnet.

Niccolo FONTANA
(ca. 1500–1557)

Niccolo FONTANA stammte aus bettelarmen Verhältnissen. Bei der Einnahme der norditalienischen Stadt Brescia durch die Franzosen im Jahre 1512 flüchteten die Bewohner der Stadt in den Dom. Die Franzosen drangen in das Gotteshaus ein. Bei dem anschließenden Gemetzel verwundete ein Soldat den jungen Niccolo. Seiner Mutter gelang es, das Leben ihres Sohns durch aufopfernde Pflege zu retten, doch eine bleibende Behinderung begleitete ihn sein weiteres Leben: Niccolo FONTANA konnte nur mehr stammelnd sprechen. Unter dem Namen TARTAGLIA (der „Stotterer“) findet man ihn heute in der Literatur. Auf seinem dornenreichen Lebensweg lernte TARTAGLIA das Lesen aus einem gestohlenen Buch, war als Privatlehrer tätig und wurde schließlich Professor in Venedig. Seine Übersetzungen von „EUKLIDs Elementen“ wurden sehr populär. (In dem Werk „Elemente“ finden sich die Ergebnisse der frühen griechischen Mathematiker — in streng logisch aufgebauter Form —zusammenfassend dargestellt.)

---

[1]) In diesem Buch wurden die bis dahin erworbenen Kenntnisse über Algebra zusammengefasst und erstmals das Prinzip der sogenannten **doppelten Buchhaltung** beschrieben. Die doppelte Buchhaltung ist heute das verbreitetste Aufzeichnungsverfahren geschäftlicher (unternehmerischer) Vorgänge.

[2]) Aus „KARLSON, Zauber der Zahlen“ (Ullstein Verlag).

Geronimo CARDANO
(1501—1575)

Geronimo CARDANO (1501—1575) war es, der TARTAGLIA um Ruhm und Anerkennung brachte.

Paul KARLSON berichtet in seinem Buch „Zauber der Zahlen" darüber wie folgt:

„In ganz Italien hatte man von den Erfolgen Tartaglias gehört; überall wollte man die neue Methode kennenlernen, aber der Meister hielt sie streng für sich. Durch List und Tücke gelang es endlich dem Cardano, das ersehnte Geheimnis zu erringen. Er bat Tartaglia um die Formeln, die er in seinem kommenden Buche zu veröffentlichen gedenke. Tartaglia lehnte ab, wurde von Cardano aufs maßloseste beschimpft, aber kurze Zeit später nach Mailand gelockt: ein reicher Marchese interessiere sich für ihn. Tartaglia kam und fand zwar keinen Marchese, dafür aber Cardano, der noch einmal in bewegten Worten um die Regeln flehte. Er schwor einen heiligen Eid, sie niemals zu veröffentlichen und auch nur in Chiffre zu notieren, damit sie nach seinem Tode nicht zufällig in die Welt dringen konnten. Nun gab Tartaglia nach.

Trotz aller Schwüre und feierlichen Versicherungen ließ Cardano 1545 sein Werk, die ‚Ars magna', erscheinen, in dem er der staunenden Welt die Tartagliaschen Formeln darbot. Gewiß unter Namensnennung und unter dem größten Lob jener Auflösung, aber Tartaglia war nunmehr die Möglichkeit genommen, in seinem eigenen großen Werke der Welt seine schönste Leistung mitzuteilen"

Die CARDANsche Formel ist wesentlich komplizierter als die Lösungsformel für die quadratische Gleichung:

Kubische Gleichung	$ax^3+bx^2+cx+d=0$	$a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$; b, c, $d \in \mathbb{R}$; $x \in \mathbb{C}$
Normalform	$x^3+rx^2+sx+t=0$	$r=\frac{b}{a}$, $s=\frac{c}{a}$, $t=\frac{d}{a}$
Substitution	$x=z-\frac{r}{3}$	
Reduzierte Form	$z^3+pz+q=0$	$p=s-\frac{r^2}{3}$, $q=\frac{2r^3}{27}-\frac{rs}{3}+t$
CARDANsche Formel	Für $D>0$ und $D=0$ erhalten wir die Lösungen: $z_1=u+v$, $z_{2,3}=-\frac{u+v}{2}\pm\frac{(u-v)i\sqrt{3}}{2}$	$D=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3$ $u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{D}}$, $v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{D}}$

Bemerkung: Der Fall, dass bereits der Radikand $D=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3$ negativ ist, wurde in der obigen Zusammenstellung nicht berücksichtigt.

Noch schwieriger ist die Regel, um eine Gleichung vierten Grads zu lösen. Bei Gleichungen fünften oder höheren Grads versagen die algebraischen Methoden im Allgemeinen. Der Nachweis hierfür wurde von dem leider viel zu früh an Tuberkulose gestorbenen norwegischen Mathematiker **Niels Henrik ABEL** (1802—1829) erbracht.

Zahlreiche Fragestellungen der Praxis führen auf Gleichungen höheren Grads. Um diese Probleme einer Lösung zuzuführen, hat man verschiedene Näherungsmethoden entwickelt, die großteils auch für das **rechnerunterstützte Arbeiten in der Mathematik** geeignet sind und gerade deshalb bis heute nicht an Bedeutung verloren haben.

AUFGABEN

136. Man beantworte die folgenden Fragen zum Thema „Polynomfunktionen":

a) Wie lautet die Gleichung einer Polynomfunktion fünften Grads allgemein?

b) Wie viele lineare Gleichungen sind mindestens notwendig, um die Koeffizienten a, b, c und d einer allgemeinen Polynomfunktion dritten Grads eindeutig zu bestimmen?

c) „Eine Polynomfunktion zweiten Grads ist die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten." Ist das eine wahre oder eine falsche Aussage?

d) Geben Sie je zwei Beispiele für eine Polynomfunktion dritten und vierten Grads.

e) Eine Polynomfunktion dritten Grads schneidet die y-Achse im Punkt $P(x, 3)$. Welchen Wert besitzt x?

f) Eine Polynomfunktion ersten Grads schneidet die x-Achse im Punkt $A(5, y)$. Welchen Wert besitzt y?

g) Eine Polynomfunktion zweiten Grads mit der Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ geht durch den Koordinatenursprung. Welchen Wert besitzt c?

h) „Der Punkt $P(a, b)$ liegt auf der Geraden g mit der Gleichung $y = kx + d$, wenn $b = ka + d$ gilt." Ist das eine wahre oder eine falsche Aussage?

Bei den folgenden Aufgaben ist jeweils die Funktionsgleichung zu bestimmen.

137. Polynomfunktion zweiten Grads, deren Graph durch die Punkte $A(-2, 3)$ und $B(-1, 1{,}5)$ verläuft und die y-Achse bei $y = 1$ schneidet.

138. Polynomfunktion zweiten Grads, deren Graph durch die Punkte $A(1, 1)$ und $B(2, 4)$ verläuft und die y-Achse bei $y = 2$ schneidet.

139. Polynomfunktion zweiten Grads mit einer Nullstelle bei $x = -2$, deren Graph durch den Punkt $P(-1, 2)$ verläuft und die y-Achse bei $y = 8$ schneidet.

140. Polynomfunktion zweiten Grads, deren Graph durch den Koordinatenursprung und die Punkte $A(2, 0)$ und $B(1, -3)$ verläuft.

141. Polynomfunktion dritten Grads, deren Graph durch die Punkte $A(-2, -16)$ und $B(1, 2)$ verläuft und die x-Achse bei $x = -1$ sowie die y-Achse bei $y = 2$ schneidet.

142. Polynomfunktion dritten Grads mit Nullstellen bei $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 3$, deren Graph die y-Achse bei $y = 3$ schneidet.

143. Polynomfunktion dritten Grads mit $a = 1$, deren Graph durch den Koordinatenursprung und die Punkte $A(-1, -6)$ und $B(1, 2)$ verläuft.

144. Polynomfunktion dritten Grads, deren Graph symmetrisch zum Koordinatenursprung und durch die Punkte $A(1, 1)$ und $B(1{,}25, 2)$ verläuft.

Bemerkung: In der Funktionsgleichung $y = f(x)$ dürfen wegen der Symmetrie zum Ursprung nur Potenzen von x mit ungeradem Exponenten auftreten, andernfalls die Bedingung $f(x) = -f(-x)$ nicht erfüllt wäre. Der allgemeine Ansatz lautet deshalb: $y = ax^3 + bx$

145. Polynomfunktion vierten Grads mit $a = 1$ und Nullstellen bei $x_1 = 1$ und $x_2 = 4$, deren Graph durch den Punkt $P(3, 5)$ verläuft und die y-Achse bei $y = 4$ schneidet.

146. Polynomfunktion vierten Grads, deren Graph durch die Punkte $A(-2, 12)$, $B\left(-1, \frac{3}{8}\right)$, $C\left(1, -\frac{9}{8}\right)$ und $D(2, 0)$ verläuft und die y-Achse bei $y = -2$ schneidet.

147. Polynomfunktion vierten Grads mit $a = 1$, deren Graph durch den Koordinatenursprung und die Punkte $A(-1, 8)$, $B(1, 4)$ und $C(2, 20)$ verläuft.

148. Polynomfunktion vierten Grads, deren Graph symmetrisch zur y-Achse und durch die Punkte $A(2, 3)$, $B(5, 6)$ und $C(10, 20)$ verläuft.

Bemerkung: In der Funktionsgleichung $y = f(x)$ dürfen wegen der Symmetrie zur y-Achse nur Potenzen von x mit geradem Exponenten und der konstante Summand auftreten, andernfalls die Bedingung $f(x) = -f(-x)$ nicht erfüllt wäre. Der allgemeine Ansatz lautet deshalb: $y = ax^4 + bx^2 + c$

149. Gegeben sind die Graphen von Polynomfunktionen zweiten Grads. Man lese die Koordinaten der Schnittpunkte mit den Achsen ab und bestimme die Funktionsgleichung.

a) **b)** **c)** **d)**

150. Gegeben sind die Graphen von Polynomfunktionen dritten Grads. Man lese die Koordinaten der Schnittpunkte mit den Achsen ab und bestimme die Funktionsgleichung.

a) **b)** **c)** **d)**

Bei den folgenden Aufgaben sind die gemeinsamen Punkte der Graphen der durch ihre Funktionsgleichungen gegebenen Polynomfunktionen y_1 und y_2 zu bestimmen:

151. a) $y_1 = 2x^2 - 3x + 2, \quad y_2 = x^2 - 4x + 4$ **b)** $y_1 = x^2 - 4x + 3, \quad y_2 = -x^2 + x + 1$

152. a) $y_1 = x^2 + 6x + 9, \quad y_2 = -x^2 + 5x + 10$ **b)** $y_1 = x^2 - x - 1, \quad y_2 = -x^2 + 4x + 2$

153. a) $y_1 = x^3 - x^2 + 2x - 2, \quad y_2 = x^3 - 2x^2 + 3x$ **b)** $y_1 = x^3 + 3x^2 + 2x + 6, \quad y_2 = x^3 + 2x^2 - 3x$

154. a) $y_1 = x^3 + x^2 - 4x - 4, \quad y_2 = x^3 + 5x^2 + 6x$ **b)** $y_1 = x^3 + x^2 - x - 1, \quad y_2 = x^3 - x^2 - 2x$

Bei den folgenden Aufgaben ist die Lösungsmenge in ℝ auf zwei Dezimalstellen genau zu ermitteln.

155. a) $x^3 - 3x - 2 = 0$ **b)** $x^3 - 3x + 1 = 0$

156. a) $x^3 + 9x^2 - 94x - 336 = 0$ **b)** $x^3 - 3x^2 - 4x + 7 = 0$

157. a) $x^3 + 2x^2 - 6x + 3 = 0$ **b)** $-2x^3 + 4{,}2x^2 - 0{,}06x - 1{,}33 = 0$

158. a) $\frac{x^3}{9} - \frac{4x}{3} + \frac{11}{9} = 0$ **b)** $x^3 + 6x^2 + 9x + 4 = 0$

159. a) $x^3 - 4x^2 + 6x - 4 = 0$ **b)** $x^3 + 18x^2 + 141x + 488 = 0$

160. a) $5x^3 + 36x^2 - 169x + 616 = 0$ **b)** $-2x^3 + 5{,}6x^2 - 24{,}44x - 50{,}68 = 0$

161. a) $-\sqrt{3}x^3 + \sqrt{6}x^2 - \sqrt{24} = 0$ **b)** $x^3 - (2 + \sqrt{3})\,x^2 + (4 + 2\sqrt{3})\,x - 4\sqrt{3} = 0$

162. a) $x^3 + 1{,}277x^2 + 11{,}035x - 137{,}3 = 0$ **b)** $-0{,}1x^3 + 5{,}061x^2 - 73x + 202{,}11 = 0$

Bei den folgenden Aufgaben ist zunächst mit Hilfe einer Wertetabelle zu prüfen, ob die Polynomfunktion im gegebenen Intervall einen Zeichenwechsel durchmacht, und gegebenenfalls mit Hilfe der Regula falsi die im Intervall liegende Nullstelle von f(x) auf zwei Dezimalstellen genau zu berechnen.

163. a) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x - 15$, $[-10, 2]$ **b)** $f(x) = -4x^4 - 10x^3 + 5x^2 + 9$, $[-7, 1[$

164. a) $f(x) = 8x^4 - 34x^3 + 49x^2 - 29x + 6$, $]0{,}5, 1[$ **b)** $f(x) = 0{,}75x^4 + 2x^3 - 13{,}5x^2 - 54x + 5$, $[1, 5]$

165. $f(x) = x^5 - 5x^4 - 24x^3 + 120x^2 - 25x + 125$, $[-5{,}5, -4]$

166. $f(x) = 2x^6 - 5x^5 - 74x^4 + 190x^3 - 74x^2 - 5x + 1$, $[1{,}2, 2{,}1]$

167. $f(x) = -0{,}001x^5 + 0{,}01x^4 + 0{,}02x^3 - 0{,}15x^2 - x + 1$, $[2, 9]$

168. $f(x) = \frac{x^7}{10} + \frac{21x^5}{5} - 84x^3 + 504$, $[-5, 0[$

Bei den folgenden Aufgaben sind die gegebenen Gleichungen zunächst durch geeignete Substitution bzw. Umformung auf quadratische Gleichungen zurückzuführen. Anschließend ist die Lösungsmenge in $\mathbb{R}$ zu ermitteln.

Gleichungen der Form $ax^4 + bx^2 + c = 0$ $(a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ heißen **biquadratische Gleichungen** und werden durch Substitution auf quadratische Gleichungen zurückgeführt: $x^2 = u$, $x^4 = u^2$

169. a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ **b)** $x^4 - 45x^2 + 324 = 0$ **c)** $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

170. a) $x^4 - 50x^2 + 49 = 0$ **b)** $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ **c)** $x^4 - 540x^2 + 5819 = 0$

171. a) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$ **b)** $3x^4 - 29x^2 + 18 = 0$ **c)** $2x^4 - 34x^2 + 32 = 0$

172. a) $4x^4 - 13x^2 + 9 = 0$ **b)** $9x^4 - 10x^2 + 1 = 0$ **c)** $12x^4 - 17x^2 + 6 = 0$

Gleichungen der Form $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$ bzw. $ax^3 + bx^2 - bx - a = 0$ $(a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ heißen **symmetrische Gleichungen dritten Grads**. Unter Verwendung der nachstehenden Formeln kann man leicht die Lösungen bestimmen: $u^3 + v^3 = (u + v)(u^2 - uv + v^2)$ $u^3 - v^3 = (u - v)(u^2 + uv + v^2)$

173. Die rechte Spalte ist — entsprechend der Arbeitsanweisung und in Analogie zur linken Spalte — auf einem separaten Blatt zu vervollständigen:

$15x^3 - 49x^2 + 49x - 15 = 0$	$3x^3 - 7x^2 + 7x - 3 = 0$
$15x^3 - 15 - 49x^2 + 49x = 0$	
$15(x^3 - 1) - 49x(x - 1) = 0$	

Aus der letzten Gleichung ist $(x - 1)$ herauszuheben. Man kann $x^3 - 1$ nach der Formel $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ zerlegen: $(x^3 - 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1)$

$(x - 1)[15(x^2 + x + 1) - 49x] = 0$	
$(x - 1)(15x^2 + 15x + 15 - 49x) = 0$	
$(x - 1)(15x^2 - 34x + 15) = 0$	

Ein Produkt ist genau dann gleich Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist:

$x - 1 = 0 \vee 15x^2 - 34x + 15 = 0$	
$L = \left\{1, \frac{5}{3}, \frac{3}{5}\right\}$	$L =$

Bemerkung: Die Lösungsmenge einer symmetrischen Gleichung dritten Grads hat die Gestalt $\left\{1, x_1, \frac{1}{x_1}\right\}$ oder $\left\{-1, x_1, \frac{1}{x_1}\right\}$, sofern $x_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Im Hinblick auf Aufgabe **173.** ist zu berechnen:

174. a) $2x^3+3x^2-3x-2=0$ **b)** $2x^3-3x^2-3x+2=0$

175. a) $3x^3+7x^2-7x-3=0$ **b)** $3x^3-7x^2-7x+3=0$

176. a) $4x^3+13x^2-13x-4=0$ **b)** $4x^3-13x^2-13x+4=0$

177. a) $2x^3-x^2-x+2=0$ **b)** $7x^3-57x^2+57x-7=0$

178. a) $5x^3-21x^2-21x+5=0$ **b)** $5x^3+31x^2+31x+5=0$

Gleichungen der Form $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$ $(a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\ c\in\mathbb{R})$ heißen **symmetrische Gleichungen vierten Grads**. Nach Umformung wird substituiert:

$$x+\frac{1}{x}=y \Rightarrow y^2=x^2+2+\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$$

179. Die rechte Spalte ist — entsprechend der Arbeitsanweisung und in Analogie zur linken Spalte — auf einem separaten Blatt zu vervollständigen:

$72x^4+6x^3-181x^2+6x+72=0$	$30x^4+7x^3-110x^2+7x+30=0$

Zunächst wird die Gleichung durch x^2 dividiert:

$$72x^2+6x-181+\frac{6}{x}+\frac{72}{x^2}=0$$

$$72x^2+\frac{72}{x^2}+6x+\frac{6}{x}-181=0$$

$$72\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+6\left(x+\frac{1}{x}\right)-181=0$$

Setzt man $x+\frac{1}{x}=y$, so ist $y^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}$ bzw. $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$:

$$72(y^2-2)+6y-181=0$$

$$72y^2+6y-325=0$$

$$\vdots$$

$$y_1=\frac{25}{12},\ y_2=-\frac{13}{6}$$

Jetzt wird zurücksubstituiert:

$$x+\frac{1}{x}=\frac{25}{12} \lor x+\frac{1}{x}=-\frac{13}{6}$$

$$\vdots$$

$$L=\left\{\frac{3}{4},\ \frac{4}{3},\ -\frac{2}{3},\ -\frac{3}{2}\right\}$$

Bemerkung: Die Lösungsmenge einer symmetrischen Gleichung vierten Grads hat die Gestalt $\left\{x_1,\ \frac{1}{x_1},\ x_2,\ \frac{1}{x_2}\right\}$, sofern $x_1\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $x_2\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Im Hinblick auf Aufgabe **179.** ist zu berechnen:

180. a) $6x^4+35x^3+62x^2+35x+6=0$ **b)** $6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0$

181. a) $5x^4-26x^3+10x^2-26x+5=0$ **b)** $2x^4+5x^3+4x^2+5x+2=0$

182. a) $3x^4-4x^3-14x^2-4x+3=0$ **b)** $3x^4+4x^3-14x^2+4x+3=0$

183. a) $8x^4-14x^3-69x^2-14x+8=0$ **b)** $8x^4+14x^3-69x^2+14x+8=0$

184. a) $x^4-\frac{13x^3}{3}+\frac{16x^2}{3}-\frac{13x}{3}+1=0$ **b)** $x^4-\frac{10x^3}{3}+2x^2-\frac{10x}{3}+1=0$

Bei den folgenden Aufgaben sind **alle** Nullstellen der durch ihre Funktionsgleichung gegebenen Funktionen rechnerisch über $\mathbb{R}$ zu bestimmen.

185. a) $y = 5x^4 - 3x^3 - 2x^2$ **b)** $y = 6x^3 + 18x^2 + 12x$

186. a) $y = x^4 - x^2 - 72$ **b)** $y = 3x^4 - 8x^2 + 16$

187. a) $y = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$ **b)** $y = 5x^3 + 31x^2 + 31x + 5$

188. a) $y = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2$ **b)** $y = 24x^3 - 49x^2 - 49x + 24$

189. a) $y = 2x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 5x + 2$ **b)** $y = 6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6$

190. a) $y = 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 2$ **b)** $y = 24x^4 + 10x^3 - 77x^2 + 10x + 24$

191. a) $y = x^4 - 2x^3 - 2x + 1$ **b)** $y = 2x^4 + 7x^3 + 7x + 2$

2. Grenzwert reeller Funktionen — Stetigkeit

Was veranlasst Menschen aller Schichten und Berufe, mit dem Fallschirm aus dem Flugzeug zu springen? Ist es Neugierde? Oder ist es der Beweis, die eigene Angst zu überwinden? Vielleicht ist es eine Art von „Bewusstseinserweiterung", die mit dem Fallschirmspringen verbunden ist: Bei einer Geschwindigkeit von rund 220 km/h steigt der Blutdruck drastisch an und mit der geringsten Arm- oder Beinbewegung lässt sich der Körper steuern.

Mit einem Beispiel über Fallschirmspringen werden wir diesen Abschnitt beginnen und uns die Begriffe **Grenzwert** und **Stetigkeit** erarbeiten.

Beispiel:

Im Hinblick auf das nebenstehende Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm, das den Verlauf eines Fallschirmsprungs beschreibt, sind die folgenden Fragen zu beantworten:

a) Welche Geschwindigkeit v erreicht der Springer nach 10 Sekunden?

b) Welchem Wert nähert sich $v(t)$ mit größer werdendem t an?

Lösung:

a) Aus der Figur lässt sich ablesen: $v = 60\,\frac{m}{s}$.

b) Nach etwa 30 s ist die konstante Sinkgeschwindigkeit von $4\,\frac{m}{s}$ erreicht worden. Tatsächlich gibt es sogar eine konstante Geschwindigkeit: Sie ist dann erreicht, wenn sich Luftwiderstand und Schwerkraft gegenseitig aufheben. $v(t)$ nähert sich also der Geraden $v = 4$ **asymptotisch.**

Augustin-Louis CAUCHY (1789—1857), französischer Mathematiker, der seine mathematischen Untersuchungen mit großer Strenge durchführte. Ihm haben wir es zu verdanken, dass der Begriff des Grenzwerts in mathematisch einwandfreier Form formuliert wurde und die Lehre der Grenzwerte als klar und gesichert betrachtet werden kann.

Verlassen wir die Welt des Sports und überlegen uns nun, welcher Unterschied zwischen den Graphen **(1)** and **(2)** besteht.

(1)

Gleichgültig, ob man x von links oder von rechts nach Null „laufen lässt", bewegt sich der Funktionswert immer gegen 0,5:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0{,}5$$

(2)

Sofern x von rechts nach Null strebt, wird der Funktionswert „unendlich groß". Lässt man x von links nach Null laufen, wird der Funktionswert „unendlich klein".

Der Graph (1) hat für $x \to 0$ einen **Grenzwert.** Graph (2) hat $x \to 0$ **keinen Grenzwert — schließlich ist ja ∞ keine Zahl.**

Auf den ersten Blick wirkt die Funktion mit der Gleichung

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + 2 & \text{für } x \geqslant 0 \\ \frac{x}{2} & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

etwas ungewohnt.

Auch diese Funktion besitzt an der Stelle Null keinen Grenzwert: Denn wenn x von rechts nach Null strebt, bewegt sich der Funktionswert gegen 2. Von links kommend strebt $f(x)$ hingegen gegen Null.

Fassen wir zusammen:

> Damit eine Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = a$ einen Grenzwert hat, muss es eine reelle Zahl b geben, auf die $f(x)$ zustrebt, wenn das Argument x von links oder von rechts gegen a läuft.

„Viel Wind um nichts", könnte jemand glauben, der an dieser Stelle das Handtuch wirft und sich nicht näher mit dem Thema beschäftigt.

Doch halt! Die in früheren Jahren umstrittene und durch Missverständnisse verdunkelte „Lehre von den Grenzwerten" ist von fundamentaler Bedeutung. Und wenn es jetzt ein wenig abstrakter wird, sollte man nicht gleich aufgeben.

Immerhin kann der Begriff des **Grenzwerts einer Funktion** f auf den schon früher besprochenen **Grenzwert einer Folge** zurückgeführt werden:

> Die Zahl α heißt **Grenzwert** der Funktion f an der Stelle $x = a$, wenn für jede Folge $\langle x_n \rangle \to a$ die Folge $\langle f(x_n) \rangle \to \alpha$ strebt: $\alpha = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Zwischen den sogenannten **stetigen Funktionen** und dem hier besprochenen Grenzwert von Funktionen gibt es einen Zusammenhang: Wenn eine durch eine Gleichung festgelegte Funktion einen Grenzwert im Sinn der obigen rosa unterlegten Definition besitzt, ist sie dort stetig, wenn der Grenzwert mit dem Funktionswert an dieser Stelle übereinstimmt. In diesem Sinn ist also z. B. der Graph (1) eine stetige Funktion. Der Graph (2) ist hingegen eine unstetige Funktion.

Im allgemeinen Sprachgebrauch versteht man unter Stetigkeit so viel wie Ausdauer, Aufeinanderfolge oder Beständigkeit. Das ist eine Vorstellung, der der mathematischen Stetigkeit schon recht nahe kommt. Mit „stetig sein" verbindet man, dass keine Unterbrechungen, keine „Sprünge" auftreten.

Den Graphen der stetigen Funktion kann man mit dem Bleistift „in einem Zug" nachzeichnen. Es treten keine „Sprünge" auf[1]. Bei den unstetigen Funktionen muss man hingegen absetzen.

Etwas exakter ausgedrückt:

> Die Funktion f heißt in einem Intervall I stetig, wenn sich bei der fortwährenden Änderung des Arguments innerhalb des Intervalls I ohne Auslassung irgendwelcher Zwischenwerte auch die zugehörigen Funktionswerte ohne Auslassung von Zwischenwerten ändern oder unter Umständen auch konstant bleiben.

Diese anschaulich-erklärende Definition des Begriffs Stetigkeit genügte den Mathematikern bis zum Anfang des 19. Jahrhunderts. Später erfolgte eine strenge Formulierung mit Hilfe von Punktmengen, die allerdings komplizierte Überlegungen erforderte.

Auf unserem Exaktheitsniveau begnügen wir uns letztlich mit der in der Außenspalte angeführten Definition.

Definition:

Eine reelle Funktion $f: x \mapsto f(x)$ heißt an der Stelle $x = a$ **stetig**, wenn dort Grenzwert und Funktionswert existieren und übereinstimmen.

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Ist eine Funktion in einem Intervall I für alle $a \in I$ stetig, so heißt sie in I stetig.

Die Funktion f heißt an einer Stelle x **unstetig**, wenn die Kriterien für das Vorliegen der Stetigkeit an dieser Stelle nicht erfüllt sind.

---

[1]) Knicke sind zulässig.

AUFGABEN

192. Es ist zu begründen, weshalb die Funktion mit der Gleichung $f(x) = \frac{1}{x^2}$ keinen Grenzwert erreicht, wenn x gegen Null strebt.

Bei den folgenden Aufgaben ist der Grenzwert N zu ermitteln:

193. a) $\lim\limits_{x \to -3} \sqrt{5x^3 - 3x^2 + 2x + 4}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 6} (x + \sqrt{x-5})(x^2 - 3x + 1)$

194. a) $\lim\limits_{x \to -2} (x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{3}{4}} + x^{\frac{5}{6}} - x^{-\frac{2}{5}} - x^0)$ **b)** $\lim\limits_{x \to 3} \frac{\sqrt[3]{x^{0,5} - x^{0,2} + x^{-0,1}}}{\sqrt{x^2 - 5x + 7}}$

195. a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - 4x}{[1 + (x - 2x^2)^2]^{\frac{3}{2}}}$ **b)** $\lim\limits_{k \to 1000} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$

196. a) $\lim\limits_{x \to \sqrt{3}} \frac{x^4 - 8x^2 + 15}{\sqrt{\frac{x^2}{3} + 3}\,\sqrt[5]{x^6 + 5}}$ **b)** $\lim\limits_{x \to -2} \left\{ \sqrt[3]{\frac{x^2}{1-4x}} - \sqrt[3]{\frac{1-4x}{x^2}} \right\}$

Bei den folgenden Aufgaben ist der Grenzwert der Funktionen zu ermitteln, indem Zähler und Nenner durch die höchste auftretende Potenz der Variablen dividiert werden und der Grenzübergang anschließend durchgeführt wird:

197. a) $f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x+1}{x}$ **b)** $f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x+5}{7x+2}$ **c)** $f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 - 5}{6 - 3x^2}$

198. a) $f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 4x}{x^2 - 5x + 6}$ **b)** $f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^3 + 4}{x^3 + 1}$ **c)** $f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^3 - 5x + 1}{5x^3 + 4}$

199. Der Grenzwert ist gesucht:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+5} + \sqrt{5}}{x}$

Anleitung: Es ist mit $\sqrt{x+4} + 2$ zu erweitern ...

200. Gegeben ist die Funktion $x \mapsto x^0$. Der Graph dieser Funktion ist in nebenstehender Figur dargestellt.

a) Wie lautet die (maximale) Definitionsmenge, wie die zugehörige Wertemenge?

b) Stimmt die Funktion $x \mapsto x^0$ mit der Funktion $x \mapsto 1$ überein?

c) Die Behauptung „Wenn eine durch eine Gleichung festgelegte Funktion einen Grenzwert besitzt, ist sie auch stetig." ist im Hinblick auf $x \mapsto x^0$ zu überdenken. Ist $x \mapsto x^0$ eine stetige Funktion?

Man sagt: $x \mapsto x^0$ hat an der Stelle 0 eine **Lücke**.

201. a) Unter welchen zwei Gegebenheiten ist eine Funktion an der Stelle x = a stetig?

b) Unter welchen Umständen ist eine Funktion im Intervall I stetig?

202. Ist die nebenstehende Funktion stetig ...

a) an der Stelle x_1? **b)** an der Stelle x_2?

c) an der Stelle x_4? **d)** an der Stelle x_5?

e) im Intervall $[x_0, x_2]$? **f)** im Intervall $]x_2, x_4[$?

g) im Intervall $]x_4, x_6[$? **h)** im Intervall $[x_5, x_7[$?

Vermischte Aufgaben

203. Gegeben ist die Funktion mit der Gleichung **a)** $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-4}{x+2} & \text{für } x \neq -2\\ C & \text{für } x=-2\end{cases}$ **b)** $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-9}{x-3} & \text{für } x \neq 3\\ C & \text{für } x=3\end{cases}$

Welchen Wert hat C, wenn es sich um eine stetige Funktion handelt?

204. Man bestimme die umfassendste Definitionsmenge D_f, sämtliche Lücken und die stetige Ergänzung $\bar{f}$ der Funktion mit der Gleichung $f(x)=\frac{x^2-8x+15}{x-3}$ über $G=\mathbb{R}$.

Anleitung: Um die stetige Ergänzung einer gebrochenrationalen Funktion zu erhalten, brauchen wir nur das Zähler- und Nennerpolynom in Linearfaktoren zu zerlegen. Anschließend ist durch allenfalls vorhandene gemeinsame Faktoren zu kürzen ...

Wird für einen x-Wert Zähler und Nenner einer gebrochenrationalen Funktion mit der Gleichung $f(x)=\frac{Z(x)}{N(x)}$ gleichzeitig Null, so hat die Funktion an dieser Stelle eine **Lücke**:

$f(x)=\frac{Z(x)}{N(x)}=\frac{0}{0}$

Die Definitionslücke der Funktion f kann im Allgemeinen **stetig ergänzt** werden, indem man den Bruch kürzt und durch den Wert des gekürzten Bruchs ersetzt.

Bei den folgenden Aufgaben sind **(1)** jene Stellen, an denen die Funktion f Lücken aufweist und **(2)** die „stetig ergänzte" Funktion $\bar{f}$ anzugeben.

205. a) $f: x \mapsto \frac{x+1}{x^2-1}$ **b)** $f: x \mapsto \frac{x^2-4}{x-2}$ **c)** $f: x \mapsto \frac{x^2-25}{x+5}$

206. a) $f: x \mapsto \frac{x^2-5x+6}{x-3}$ **b)** $f: x \mapsto \frac{x-2}{x^2-4x+4}$ **c)** $f: x \mapsto \frac{x^2-x}{x^2-1}$

Bei den folgenden Aufgaben ist anzugeben ob es sich bei der Funktion f um eine echt oder unecht gebrochenrationale Funktion handelt:

207. a) $f: x \mapsto \frac{x}{x-1}$ **b)** $f: x \mapsto \frac{3}{x-4}$ **c)** $f: x \mapsto \frac{4x}{x^2-5}$

208. a) $f: x \mapsto \frac{x^2+5}{4x}$ **b)** $f: x \mapsto \frac{x^2+5}{4+x^2}$ **c)** $f: x \mapsto \frac{4+x^2}{x^2+5}$

Beispiele für echt gebrochenrationale Funktionen:

$f: x \mapsto \frac{1}{x-5}$

$f: x \mapsto \frac{x}{x^2-5x+6}$

Der Grad des Zählerpolynoms ist kleiner als der Grad des Nennerpolynoms.

Beispiele für unecht gebrochenrationale Funktionen:

$f: x \mapsto \frac{x}{x-3}$

$f: x \mapsto \frac{x^5-1}{x+2}$

Der Grad des Zählerpolynoms ist gleich oder größer als der Grad des Nennerpolynoms.

Bei den folgenden Aufgaben sind die gegebenen unecht gebrochenrationalen Funktionen durch Division des Zählers durch den Nenner in die Summe einer ganzrationalen und einer echt gebrochenrationalen Funktion zu zerlegen:

209. a) $f: x \mapsto \frac{x^3}{x-1}$ **b)** $f: x \mapsto \frac{x^2}{x+4}$ **c)** $f: x \mapsto \frac{x^4}{3x^2+5}$

210. a) $f: x \mapsto \frac{x-1}{x+1}$ **b)** $f: x \mapsto \frac{2x+3}{x+9}$ **c)** $f: x \mapsto \frac{3x-5}{2x-4}$

Sofern der Nenner einer gebrochenrationalen Funktion an einer Stelle $x=a$ gleich Null ist, ist die Funktion an dieser Stelle nicht definiert. Wenn nun der Zähler bei $x=a$ ungleich Null ist, sagt man: Die Funktion besitzt an dieser Stelle einen **Pol** (eine **„Unendlichkeitsstelle"**). $g: x=a$ ist eine **senkrechte Asymptote**.[1]

Bei den folgenden Aufgaben sind die Pole der gegebenen Funktionen anzugeben, d. h. die Nullstellen des Nenners, die nicht zugleich den Zähler „verschwinden" lassen, sind zu berechnen:

211. a) $f: x \mapsto \frac{4}{x-1}$ **b)** $f: x \mapsto \frac{x-2}{3x+5}$ **c)** $f: x \mapsto \frac{1}{x^2+x}$ **d)** $f: x \mapsto \frac{x^3}{5x^2-7x}$

212. a) $f: x \mapsto \frac{x^5}{x^2-x-2}$ **b)** $f: x \mapsto \frac{x-4}{x^2-2x-8}$ **c)** $f: x \mapsto \frac{3}{4x^2+x+10}$ **d)** $f: x \mapsto \frac{x^2-x-12}{13x^2-4x+1}$

[1]) Zum Begriff **Asymptote** vgl. Seite 52.

213.

$y = \frac{1}{x-2}$

$y = \frac{x-1}{x+2}$

$y = \frac{x^2-2}{x+1} = x - 1 - \frac{1}{x+1}$ (mit $y_1 = x-1$, $y_2 = -\frac{1}{x+1}$)

$y = \frac{1}{(x+1)^2}$

$y = \frac{2x^2-5}{3x^2-4}$

$y = \frac{x^2-5x+8}{2x-2} = \frac{x}{2} - 2 + \frac{2}{x-1}$ (mit $y_1 = \frac{x}{2}-2$, $y_2 = \frac{2}{x-1}$)

$$f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0}$$

(1) $m > n$ → x-Achse ist Asymptote[1)]

(2) $m = n$ → Gerade $y = \frac{a_n}{b_n}$ ist Asymptote[1)]

(3) $m < n$ → $\frac{Z(x)}{N(x)} = y_1 + y_2$, y_1 ist Asymptote[1)]

Unter einer **Asymptote** der Funktion f versteht man eine Funktion g, wobei sich der Graph der Funktion f dem Graphen der Funktion g immer weiter nähert, ohne ihn jemals zu berühren.

a) Die obige Übersicht ist zu interpretieren.

b) Es ist zu entscheiden, welchem der Fälle **(1)** bis **(3)** die in Aufgabe **211.** und **212.** gegebenen Funktionen zuzuordnen sind.

Bei den folgenden Aufgaben sind die Polstellen, die Nullstellen und die Gleichung der Asymptoten der durch ihre Funktionsgleichung gegebenen Funktionen zu berechnen:

214. a) $y = \frac{x-1}{x+5}$ **b)** $y = \frac{3}{2x^2-4}$ **c)** $y = \frac{5x}{7x^2-3x}$ **d)** $y = \frac{x^2-6x+8}{x}$

215. a) $y = \frac{2}{x^2-6x+8}$ **b)** $y = \frac{3x-4}{x^2-7x+10}$ **c)** $y = \frac{x^2-6x-5}{2x^2-5x+2}$ **d)** $y = \frac{8x^2-85x+225}{2x^2+17x+30}$

Bei den folgenden Aufgaben sind die durch ihre Gleichung festgelegten Funktionen durch Ermittlung ihrer Pole, Nullstellen, Asymptoten und Lücken zu untersuchen und anschließend grafisch zu veranschaulichen:

216. a) $y = \frac{x+1}{x-2}$ **b)** $y = \frac{x-1}{x^2-1}$ **c)** $y = \frac{x^2+4x+4}{x^2-1}$ **d)** $y = \frac{2x-4}{x^2-4}$

217. a) $y = \frac{3x^2+2x}{x^3-3x^2+2x}$ **b)** $y = \frac{x^3+x^2-2x}{x^2+1}$ **c)** $y = \frac{x^2-1}{x+1}$ **d)** $y = \frac{x^2-2x+2}{3x+1}$

1) Asymptote, die (griech.): nicht zusammenfallend.

3. Problemstellungen der Biologie, Physik und Technik

218. Ein Spannungsverlauf U(t) an einem Oszilloskop lässt sich mathematisch folgendermaßen darstellen: $U(t) = U_0(t - [t])$

U ..... Spannungsverlauf als Funktion der Zeit
[t] ..... größte ganze Zahl kleinergleich t
U_0 ..... Amplitude

a) Man stelle den Funktionsverlauf für die ersten 6 Sekunden für $U_0 = 3V$ grafisch dar.

b) Die Unstetigkeitsstellen im Funktionsverlauf sind zu bestimmen.

c) Der Spannungsverlauf wird oft Sägezahnspannung genannt. Warum wohl? Wozu könnte, physikalisch betrachtet, solch ein Spannungsverlauf verwendet werden?

219. Ein Spannungsverlauf, der aus einem Funktionsgenerator an einem Oszilloskop sichtbar gemacht wird, habe den in der nebenstehenden Figur dargestellten Verlauf.

U(t) in V
U_0=5V
1 2 3 4 5 6 7
t in ms

a) Man stelle eine Funktionsgleichung zum zugehörigen Funktionsgraphen auf.

b) Wie viele Unstetigkeitsstellen liegen im Intervall $0\,ms \leqslant t \leqslant 10\,ms$?

Anleitung: Welche Information müsste man zur Lösung dieser Aufgabe noch einholen?

c) Welche Verwendung ließe sich für diesen Funktionsverlauf angeben?

220. Der elektrische Widerstand R des Metalls Zinn sei in der Nähe des absoluten Nullpunkts durch folgende Funktionsgleichung gegeben:

$$R(T) = \begin{cases} 6 + 0{,}1T\Omega & \text{für } T > 3{,}72\,K \\ 0\,\Omega & \text{für } T \leqslant 3{,}72\,K \end{cases}$$

a) Man zeichne den Funktionsgraphen für $0\,K \leqslant T \leqslant 10\,K$!

b) Der physikalische Gehalt des Funktionsgraphen ist zu beschreiben. Was bedeutet das Verhalten eines Zinndrahts bei 2 K für die Stromleitung in diesem Draht?

c) Verunreinigtes Zinn erreicht erst bei 3,5 K $R(T) = 0\,\Omega$ und hat bei $T = 4\,K$ einen Widerstand von $5\,\Omega$. Wie könnte R(T) im „kritischen Bereich" aussehen? Ist diese Kurve ebenfalls unstetig?

221. Die Eichung eines zeitabhängigen Messvorgangs funktioniert nach folgender Vorschrift:

$$I(t) = \lim_{n \to \infty} \frac{t^n}{1 + t^n}$$

I..... Intensität
t ..... Zeit

a) Man skizziere den Graphen der Funktion I(t)!

Anleitung: Man setze für n = 1, 2, 3, ... und bilde den Grenzwert der Funktion.

b) In welchen Intervallen ist die Funktion I(t) stetig bzw. unstetig?

222. In Koaxialkabeln werden modulierte elektromagnetische Wellen weiter geleitet, mit deren Hilfe nach dem Analogprinzip Nachrichten transportiert werden. Der Querschnitt eines derartigen Kabels mit einer äußeren, ideal leitenden „Masse" und einem inneren, mit der Ladung Q behafteten „Phasenleiter" ist in nebenstehender Figur angegeben.

Außenleiter
Isolation
Phasenleiter
E
R_0 $R_1 R_2$ r

Die elektrische Feldstärke E hat folgende radiale Abhängigkeit:

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \text{ für } R_0 \leqslant r \leqslant R_1 \text{ bzw. } r \geqslant R_2$$

a) Man berechne die Funktionswerte an R_1 und R_2, wenn $Q = 1\,nc$, $R_0 = 0{,}5\,cm$, $R_1 = 1{,}5\,cm$, $R_2 = 2\,cm$ ist.

b) Welche physikalische Erklärung findet sich für dieses unstetige Verhalten der Feldstärke?

223. In der Elektrotechnik spielt das Verhalten von elektromagnetischen Wellen an Grenzflächen von Körpern mit unterschiedlichen elektrischen und magnetischen Eigenschaften eine große Rolle.

Kommt eine derartige Grenzfläche, z. B. zwischen Glas und Luft, in ein Magnetfeld der Magnetfeldstärke $\vec{B}$, so werden die Feldlinien des Magnetfelds an der Grenzfläche „gebrochen".

Dieses Phänomen soll nun genauer betrachtet werden. Der Vektor, der das Magnetfeld B charakterisiert, wird in eine „Tangentialkomponente" in Richtung der Grenzfläche Luft B_{t1} bzw. in Glas B_{t2} und in eine Normalkomponente in Luft B_{n1} und B_{n2} zerlegt.

Nach zwei fundamentalen Gesetzen der Elektrizitätslehre gilt nun:

$$-B_{n1} \cdot A + B_{n2} \cdot A = 0 \quad \text{und} \quad \frac{B_{t1}}{\mu_1} \cdot d - \frac{B_{t2}}{\mu_2} \cdot d = 0$$

Bemerkung: A ist die Querschnittsfläche, d der Durchmesser des kleinen Zylinders, den man zur Berechnung betrachtet. μ_1 und μ_2 sind Materialkonstanten, die die magnetischen Eigenschaften von Luft und Glas enthalten. Der Einfachheit halber nehmen wir $\mu_1 = 1$ und $\mu_2 = 1,5$.

a) Welche der beiden Komponenten des Feldvektors $\vec{B}$ also B_t oder B_n, ist nun an der Grenzfläche stetig? (Was bedeutet „Stetigkeit" in diesem Zusammenhang?)

b) Man zeichne die Situation rechts und links der Grenzfläche mit beliebiger Annahme eines Vektors $\overrightarrow{B_1}$ und den Zahlenwerten für μ_1 und μ_2!

Wie lang ist der Vektor $\overrightarrow{B_2}$ in Glas, wenn $|\overrightarrow{B_1}| = 3\,\text{LE}$ lang ist und unter 60° zur Grenzfläche geneigt ist? Unter welchem Winkel zur Grenzfläche steht $\overrightarrow{B_2}$?

c) Man zeichne die Funktionen $B_n = f(x)$ und $B_t = g(x)$ für $-2 \leqslant x \leqslant 2$. (Die Grenzfläche wird im Ursprung angenommen!)

d) Von praktischer Bedeutung ist die Grenzschicht Eisen-Luft mit $\mu_{Eisen} \gg 1$ und $\mu_{Luft} = 1$. Wie sehen die Verhältnisse an der Grenzfläche aus, wenn der Feldstärkevektor B von Eisen in Luft austritt? (Skizze!)

224. Die Anzahl N der Kraftfahrzeuge, die pro Stunde auf der Krottenbachstraße im 19. Wiener Gemeindebezirk in einer Richtung fahren kann, hängt von der Fahrzeuglänge l und — im Hinblick auf den Sicherheitsabstand — auch von der Geschwindigkeit v ab. In erster Näherung gilt:

$$N = \frac{4000v}{(0{,}02v)^2 + 0{,}5v + l} \qquad \left(l \text{ in m, } v \text{ in } \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$$

a) Bei welcher Geschwindigkeit ist die „Durchlassfähigkeit" der Krottenbachstraße maximal, wenn man als mittlere Fahrzeuglänge 4,6 m annimmt?

Anleitung: Die gegebene Funktionsgleichung ist im Intervall [70, 130] in einem kartesischen Koordinatensystem zu veranschaulichen.

b) Wie groß ist diese maximale Durchlassfähigkeit, d. h. wie viele Pkw befahren pro Stunde in einer Richtung die Krottenbachstraße bei „optimaler Geschwindigkeit"?

c) Wie groß ist v, wenn um 10 % weniger Pkw die Krottenbachstraße befahren, als die in b) errechnete Anzahl?

225. Um 19.30 Uhr ereignet sich auf der Schoberpass-Bundesstraße ein schwerer Verkehrsunfall. Der schuldhafte Lenker flüchtet. Ein aufmerksamer Verkehrsteilnehmer hat sich das Kfz-Kennzeichen gemerkt, die Fahndung wird eingeleitet. Um 21.30 Uhr kann der Fahrerflüchtige ausgeforscht werden. Die Blutabnahme um 22.00 Uhr liefert folgendes Ergebnis: 0,6 ‰ Blutalkoholspiegel. Wie hoch war der Blutalkoholspiegel zum Zeitpunkt des Unfalls, wenn man davon ausgeht, dass der Lenker in der Zeit von 19.30 bis 22.00 Uhr keinen Alkohol zu sich genommen hat?

Anleitung: Der Blutalkoholspiegel fällt linear zwischen 0,1‰ und 0,2 ‰ pro Stunde ab.

226. Steuerung von Heizungsanlagen durch die Außentemperatur

Um Energie zu sparen, werden moderne Heizungsanlagen gemäß der nebenstehenden Figur durch die Außentemperatur gesteuert: Ein Außenfühler AF erfasst die Außentemperatur und gibt den Wert an das elektronische Regelgerät ZG weiter. Gleichzeitig wird dem Regelgerät durch den Vorlauffühler VF die Vorlauftemperatur (das ist die Temperatur des zu den Heizkörpern strömenden Heißwassers) angezeigt. In Abhängigkeit von der Außentemperatur aktiviert das Regelgerät den Mischermotor VM, der das Vorlaufwasser auf die gewünschte Temperatur bringt.

(Werkbild Centra-Honeywell)

Hierbei arbeitet das Regelgerät nach folgendem Heizkurven-Diagramm:

(Werkbild Centra-Honeywell)

Je nach Art der Heizung wird die entsprechende Kurve eingestellt. So wird z. B. bei einer Fußbodenheizung die Kurve 0,8 herangezogen, d. h. bei einer Außentemperatur von −15° C beträgt die Vorlauftemperatur 50° C. Bei einer Radiatorheizung wird die Kurve 1,6 verwendet, d. h. wenn AF −15° C misst, ist die Vorlauftemperatur ca. 78° C.

a) Um wie viel Grad ändert sich die Vorlauftemperatur für eine Fußbodenheizung, wenn sich die Außentemperatur von +10° C auf −10° C abkühlt?

b) Text wie **a)**, allerdings nicht für eine Fußboden- sondern für eine Radiatorheizung.

227. Zwischen der Anzahl y von Füchsen und der Anzahl m von Hasen besteht ein Zusammenhang: $y = \sqrt{m+6}$. Allerdings sind die Hasen von der Anzahl x der Karotten abhängig: $m = 9 + 0{,}3x + 0{,}01x^2$.

a) Wie viele Füchse finden sich in einem Biotop[1] mit 5000 Karotten?

b) Wie lautet die Gleichung der umgekehrten Funktion, die den Zusammenhang zwischen Füchsen und Karotten beschreibt?

c) PROJEKTVORSCHLAG: Die beliebig angenommenen Funktionen sind kritisch zu prüfen und so zu verändern, dass sie allenfalls den im Biologie-Unterricht erhobenen Daten gerecht werden.

228. Herr Blechinger befindet sich im Punkt M auf einem See und schwimmt mit der Geschwindigkeit $v = 2\,\frac{km}{h}$ zum Punkt N, um anschließend mit $\bar{v} = 6\,\frac{km}{h}$ nach O zu wandern. Wie lässt sich die Zeit t(x) in Abhängigkeit von der in der Figur eingezeichneten Entfernung x ausdrücken, die Herr Blechinger benötigt, um von M nach O zu gelangen?

(Bemaßungen in km)

[1]) Biotop, der oder das: durch bestimmte Pflanzen- und Tiergesellschaften gekennzeichneter Lebensraum.

229. Jeder Löwe hat seine Jagdregion. Wie von einem unsichtbaren Zaun ist ein bestimmtes Gebiet umgeben, innerhalb dessen das Raubtier seine Beutezüge unternimmt. Zwischen der Größe der Jagdfläche A und der Körpermasse L eines Raubtiers besteht folgender Zusammenhang: $A = L^{1,31}$ [1)]

a) Die Funktion A (L) mit der Gleichung $A = L^{1,31}$ ist im Intervall [10, 160] in einem kartesischen Koordinatensystem zu veranschaulichen.

b) Was lässt sich über das Monotonieverhalten der Funktion A (L) aussagen?

c) Auf Grund neuester Erkenntnisse wird der „Home range" von wilden Tieren, also die Fläche A, auf die die Tiere ihre Bewegung beschränken, durch die Gleichung $A = \sqrt[100]{L^{141}}$ beschrieben, wobei L wieder die Körpermasse eines Tiers ist. Welche der Funktionen mit den Gleichungen $A = L^{1,31}$ und $A = \sqrt[100]{L^{141}}$ steigt stärker an? Welche Schlussfolgerung lässt sich ziehen, wenn einzig $A = \sqrt[100]{L^{141}}$ die Größe der Jagdfläche treffend beschreibt?

d) $A = \sqrt[100]{L^{141}}$ ist über der Definitionsmenge $D = \{20, 50\}$ grafisch zu veranschaulichen. Anschließend ist eine Gerade durch diese beiden Punkte des Graphen zu legen. Die Geradengleichung ist zu ermitteln und der Winkel, den die Gerade mit der L-Achse bildet, ist anzugeben.

e) Wie groß wäre die Körpermasse eines Tieres, das — rein theoretisch — seine Aktivitäten auf die Fläche $A = 0$ beschränkt? (Die Frage ist in Bezug auf die Gleichung $A = \sqrt[100]{L^{141}}$ und die in **d)** gefundene Gerade zu beantworten.)

f) Text wie **e)** für die Fläche $A = 5$.

g) Schnittpunkte der Funktionen mit den Gleichungen $A = \sqrt[100]{L^{141}}$ und $A = L^{1,31}$?

230. Die Helligkeit des Lichts, das von Glühwürmchen produziert wird, ist eine Funktion der Temperatur. Harold R. JACOBS gibt in seinem Werk „MATHEMATICS, A Human Endeavor" (Verlag W. H. Freeman and Company, New York) die folgende Näherungsfunktion an:

$I = 10 + 0,3t + 0,4t^2 - 0,01t^3$ I ..... Lichtstärke in 10^{-3} cd
t ..... Temperatur in °C

Es ist auf grafischem Weg zu ermitteln, bei welcher Temperatur Glühwürmchen das hellste Licht geben.

231. Harold R. JACOBS gibt in seinem Buch „MATHEMATICS, A Human Endeavor" (Verlag W. H. Freeman and Company, New York) eine Formel für die Verbreitung der Grippe in einer Kleinstadt an:

$f: n \mapsto \frac{170t^2}{t^2 + 1}$ n ..... Anzahl der Menschen, die an Grippe erkrankt sind
t ..... Anzahl der Wochen, die seit dem ersten Auftreten der Grippe verstrichen sind.

a) Die Funktion f und ihre Umkehrfunktion f^{-1} sind in ein kartesisches Koordinatensystem zu zeichnen.

b) Aus der Figur ist Folgendes abzulesen:

(1) Zu welchem Zeitpunkt t waren 85 Menschen an Grippe erkrankt?

(2) Wie viele Menschen werden nach 6 Monaten an Grippe erkrankt sein?

c) Wie lautet die Gleichung von f^{-1}?

d) Die Anzahl n der Grippekranken nimmt zu, je größer t ist. Nach welchem Wert „strebt" n?

e) PROJEKTVORSCHLAG: Die Funktion f ist kritisch zu prüfen. Ist f realistisch? Welche Funktion würde allenfalls den Gegebenheiten einer österreichischen Landeshauptstadt gerecht werden?

[1)] Nach „J.M. EMLEN, Ecology: An Evolutionary Approach", Verlag Addison-Wesley, 1973.

DIFFERENZIALRECHNUNG

1. Wozu braucht man die Differenzialrechnung?

Zunächst einige anwendungsorientierte Problemstellungen:

(1) Bei einem Unfall in Niederösterreich stießen zwei Pkw-Lenker, die jeweils mit 80 $\frac{km}{h}$ unterwegs waren, frontal zusammen. (Vgl. den nebenstehenden KURIER-Bericht.) Im Zuge der damit verbundenen Gerichtsverhandlung behauptete der Sachverständige: *„Bei diesem Unfall war der Aufprall, dem jeder der beiden Lenker ausgesetzt war, so gewaltig, wie wenn das Fahrzeug aus 40 m Höhe frei auf den Boden gestürzt wäre."*

Hat der Sachverständige damit recht?

Ebenfalls frontal prallten Dienstag nachmittag die Pkw des Wiener Gerhard Steiner, 22, und der 20jährigen Maria Nußbaumer aus Perschling bei Kapelln, Bezirk St. Pölten, zusammen. Beide Lenker wurden schwer verletzt. Steiner mußte man beide Kniescheiben entfernen – er wird nie wieder gehen können.

(2) Die Energie in Joule, die ein Wellensittich pro Gramm Körpermasse und pro geflogenem Kilometer verbrennt, kann näherungsweise durch die Formel $E(v) = \frac{1}{v}(0{,}31(v-35)^2 + 92)$ bestimmt werden. Hierbei ist v die Geschwindigkeit des Vogels in $\frac{km}{h}$ gegenüber der Luft.

Wie hoch ist der Energieverbrauch eines im Mittel 16 g schweren Wellensittichs pro Flugstunde, wenn er sich mit jener Geschwindigkeit fortbewegt, bei der er am wenigsten Energie benötigt?

(3) Die Firma PACKFIX ist auf die Herstellung von Verpackungsmaterial spezialisiert. In das Produktionsprogramm soll ein würfelförmiger Karton mit dem Volumen V = 81 aufgenommen werden.

Mit welcher Ungenauigkeit p_x darf die Würfelkante x maximal behaftet sein, damit V um nicht mehr als $p_V = 3\%$ schwankt?

Wer „differenzieren" kann, ist in der Lage, die obigen typischen Aufgaben der Differenzialrechnung leicht zu lösen.

Betrachten wir das **Differenzieren** (was immer das auch sein mag) vorerst einmal als eine Rechenvorschrift, dem eine Funktion unterworfen wird.

Das ist schwierig zu verstehen? Keine Angst, am konkreten Beispiel wird die Sache übersichtlicher.

J. L. LAGRANGE

Joseph Louis LAGRANGE (1736—1813), französischer Mathematiker. LAGRANGE führte für den Differenzialquotienten folgende Symbole ein:

y'	(gesprochen: y Strich)
$f'(x_0)$	(gesprochen: f Strich an der Stelle x_0)

Beispiel:

Gegeben ist die Funktionsgleichung $y = x^5$. Gesucht ist der sogenannte **Differenzialquotient** oder die **erste Ableitung** von $y = x^5$.

Lösung:

Statt „Gesucht ist der sogenannte Differenzialquotient..." kann man kurz schreiben: $y' = ?$

Unser Beispiel reduziert sich also auf die Angabe $y = x^5$, $y' = ?$

Um y′ zu berechnen, werfen wir einen Blick in die Außenspalte. Die **Potenzregel** lässt sich sofort anwenden:

$$y' = 5 \cdot x^{5-1} \qquad y' = 5x^4$$

Potenzregel:

$$y = x^n$$
$$y' = nx^{n-1}$$

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto f(x)$. Wie kann man die Frage nach $f'(x_0)$ formulieren? Hier einige Möglichkeiten:

(1) Die Funktion $f: x \mapsto f(x)$ ist an der Stelle x_0 zu differenzieren.

(2) Wie groß ist die erste Ableitung von $f: x \mapsto f(x)$ an der Stelle x_0?

(3) Man bilde den Differenzialquotient von $f: x \mapsto f(x)$ an der Stelle x_0.

Prägnante Schreibweise für die Potenzregel:

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$(x^n)' = nx^{n-1}$

Beispiel:

Es ist $f'(x_0)$ der nachstehenden durch ihre Funktionsgleichung gegebenen Funktionen zu ermitteln:

a) $y = x^{-3}$, $x_0 = \sqrt{5}$ **b)** $y = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$, $x_0 = 4$ **c)** $y = \frac{\sqrt{x^3}}{x}$, $x_0 = 64$

Anleitung: $y = x^{-\frac{3}{2}}$

Lösung:

$f'(x_0)$ bedeutet nichts anderes als: In die Funktion y' ist der Zahlenwert x_0 einzusetzen.

a) $y' = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$ $f'(\sqrt{5}) = -\frac{3}{(\sqrt{5})^4} = -\frac{3}{25}$ $f'(\sqrt{5}) = -\frac{3}{25}$

b) $y' = -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} = -\frac{3}{2\sqrt{x^5}}$ $f'(4) = -\frac{3}{2 \cdot 32} = -\frac{3}{64}$ $f'(4) = -\frac{3}{64}$

c) $y = \frac{x\sqrt{x}}{x} = \sqrt{x}$ $y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $f'(64) = \frac{1}{2 \cdot 8} = \frac{1}{16}$ $f'(64) = \frac{1}{16}$

Es soll noch eine letzte — sich durch Kürze und Prägnanz auszeichnende — Schreibweise besprochen werden. Wenn die Funktion f gegeben ist und ihre „Ableitungsfunktion" f′ gesucht wird, dann lässt sich dieser Vorgang als eine Art Vorschriftenfolge darstellen:

f(x) Eingabe → [ ] → f′(x) Ausgabe

Man schreibt abkürzend für diese Vorschrift nur das Symbol „′" in der Form (EINGABE)′ = AUSGABE.

Auf unser letztes Beispiel bezogen:

$$(x^{-3})' = -\frac{3}{x^4}, \quad \left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)' = -\frac{3}{2\sqrt{x^5}}, \quad \left(\frac{\sqrt{x^3}}{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

c

$f: x \to c$

Die Ableitung einer Konstanten ist null:

$$(c)' = 0$$

Ein konstanter Faktor bleibt beim Differenzieren erhalten:

$$[a \cdot f(x)]' = a \cdot f'(x)$$

$$x^0 = 1$$

Beispiel:

Gegeben sind die Funktionen **a)** $f: x \mapsto 2$ **b)** $g: x \mapsto 3x^2$ **c)** $h: x \mapsto a$ $(a \in \mathbb{R})$ und **d)** $i: x \mapsto \frac{3}{x^4}$. In welchen Fällen handelt es sich um eine **Funktion mit konstantem Faktor**, in welchen Fällen liegt eine **konstante Funktion** vor?

Lösung:

Im kartesischen Koordinatensystem ist der Graph der konstanten Funktion $f: x \mapsto c$ $(c \in \mathbb{R})$ eine zur x-Achse parallele Gerade — vgl. Außenspalte. Dagegen ist z. B. $k: x \mapsto 4x^2$ eine Funktion, mit dem konstanten Faktor 4. Keinesfalls aber ist k eine konstante Funktion. In diesem Sinne sind in **a)** und **c)** konstante Funktionen gegeben, in **b)** und **d)** finden sich hingegen Funktionen mit konstantem Faktor.

Beispiel:

Man ermittle **a)** $(5)'$ **b)** $(3x^6)'$ **c)** $\left(\frac{4}{\sqrt{x}}\right)'$!

Lösung:

a) $(5)' = 0$

b) $(3x^6)' = 6 \cdot 3x^{6-1} = \mathbf{18\,x^5}$

c) $\left(\frac{4}{\sqrt{x}}\right)' = (4x^{-\frac{1}{2}})' = -\frac{1}{2} \cdot 4x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{x^3}} = -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{x\sqrt{x}}}$

Bemerkenswert ist, dass die Ableitung einer Konstanten auch mit der Potenzregel möglich ist.

Betrachten wir z. B. die Funktionsgleichung $y = 8$; $y' = ?$

$y = 8 = 8x^0$; $y' = \underbrace{0 \cdot 8x^{-1}}_{\text{Potenzregel}} = 0 \quad \mathbf{y' = 0}$ (Allerdings hier für $x \neq 0$!)

Beispiel:

a) $(4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 1)' = ?$

b) $\left(5x - \frac{3}{2x^2}\right)' = ?$ **c)** $\left(\frac{1}{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} + 9\right)' = ?$

Lösung:

a) $(4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 1)' = \mathbf{16x^3 - 9x^2 + 4x}$

b) $\left(5x - \frac{3}{2x^2}\right)' = \left(5x - \frac{3}{2}x^{-2}\right)' = 5 + 3x^{-3} = \mathbf{5 + \frac{3}{x^3}}$

c) $\left(\frac{1}{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} + 9\right)' = (x^{-1} + 3x^{-\frac{1}{2}} + 9)' = -x^{-2} - \frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{x^2} - \frac{3}{2\sqrt{x^3}} =$

$= -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x^2}} - \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2x\sqrt{x}}}$

Die **Ableitung einer Summe** ist gleich der Summe der Ableitungen der einzelnen Summanden:

$(u \pm v)' = u' \pm v'$

Beispiel:

Folgende Ableitungen sind zu berechnen:

a) $[(x^3 - 4x)(x^5 - 1)]'$ **b)** $\left[\sqrt[3]{x}\left(3 - \frac{1}{x}\right)\right]'$ **c)** $[(x-1)(3-x) + x^2]'$

Lösung:

a) $[\underbrace{(x^3 - 4x)}_{u}\underbrace{(x^5 - 1)}_{v}]' = \underbrace{(3x^2 - 4)}_{u'}\underbrace{(x^5 - 1)}_{v} + \underbrace{(x^3 - 4x)}_{u}\underbrace{(5x^4)}_{v'} =$

$= 3x^7 - 4x^5 - 3x^2 + 4 + 5x^7 - 20x^5 = \mathbf{8x^7 - 24x^5 - 3x^2 + 4}$

b) $\left[\underbrace{\sqrt[3]{x}}_{u}\underbrace{\left(3 - \frac{1}{x}\right)}_{v}\right] = \underbrace{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}_{u'}\underbrace{\left(3 - \frac{1}{x}\right)}_{v} + \underbrace{\sqrt[3]{x}}_{u}\underbrace{\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{v'} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{3x\sqrt[3]{x^2}} + \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2} =$

$= \frac{3x^2 - x + 3x}{3x^2\sqrt[3]{x^2}} = \frac{3x^2 + 2x}{3x^2\sqrt[3]{x^2}} = \frac{\mathbf{3x + 2}}{\mathbf{3x\sqrt[3]{x^2}}}$

c) $[\underbrace{(x-1)}_{u}\underbrace{(3-x)}_{v} + x^2]' = \underbrace{1}_{u'}\underbrace{(3-x)}_{v} + \underbrace{(x-1)}_{u}\underbrace{(-1)}_{v'} + 2x =$

$= 3 - x - x + 1 + 2x = \mathbf{4}$

Produktregel:

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

Man könnte die Auffassung vertreten, dass Produkte von Polynomen **ohne Verwendung der Produktregel** schneller differenziert werden können. Mit anderen Worten: Es ist einfacher, die Polynome zunächst auszumultiplizieren und anschließend zu differenzieren. Mitunter stimmt das auch. Jedoch gibt es Funktionen, die aus Faktoren gebildet werden, die sich nicht ausmultiplizieren lassen. Wir werden später solche Funktionen kennenlernen, bei denen die Produktregel unentbehrlich ist.

Quotientenregel:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Um Fehler zu vermeiden, empfiehlt es sich, eine bestimmte Reihenfolge einzuhalten:

1. $y' = \overline{}$
2. $y' = \dfrac{}{v^2}$
3. $y' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

Beispiel:

Gegeben sind die Funktionen **a)** $y = \frac{x}{x-3}$ **b)** $y = \frac{3x^3 - 1}{x^4 + 5x}$ und **c)** $y = \frac{\sqrt[5]{x}}{2x^2 - 4}$. Gesucht ist jeweils die erste Ableitung!

Lösung:

a) $$\left(\frac{x}{x-3}\right)' = \frac{\overbrace{1}^{u'}\,\overbrace{(x-3)}^{v} - \overbrace{x}^{u} \cdot \overbrace{1}^{v'}}{\underbrace{(x-3)^2}_{v^2}} = \frac{-3}{(x-3)^2}$$

b) $$\left(\frac{3x^3 - 1}{x^4 + 5x}\right)' = \frac{\overbrace{9x^2}^{u'}\,\overbrace{(x^4 + 5x)}^{v} - \overbrace{(3x^3 - 1)}^{u}\,\overbrace{(4x^3 + 5)}^{v'}}{\underbrace{(x^4 + 5x)^2}_{v^2}} =$$

$$= \frac{9x^6 + 45x^3 - 12x^6 - 11x^3 + 5}{(x^4 + 5x)^2} = \frac{-3x^6 + 34x^3 + 5}{(x^4 + 5x)^2}$$

c) $$\left(\frac{\sqrt[5]{x}}{2x^2 - 4}\right)' = \frac{\overbrace{\tfrac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}}^{u'}\,\overbrace{(2x^2 - 4)}^{v} - \overbrace{x^{\frac{1}{5}}}^{u}\,\overbrace{(4x)}^{v'}}{\underbrace{(2x^2 - 4)^2}_{v^2}} = \ldots = \frac{-18x^2 - 4}{5\sqrt[5]{x^4}\,(2x^2 - 4)^2}$$

AUFGABEN

Es ist die erste Ableitung der durch ihre Funktionsgleichung gegebenen Funktion zu bilden:

232. a) $y = x^7$ **b)** $y = x^{99}$ **c)** $y = x^{-4}$ **d)** $y = x^{-8}$

233. a) $y = \frac{1}{x^3}$ **b)** $y = \frac{1}{x^9}$ **c)** $y = \frac{1}{x^{-4}}$ **d)** $y = \frac{1}{x^{-7}}$

234. a) $y = x^{\frac{1}{2}}$ **b)** $y = x^{\frac{5}{3}}$ **c)** $y = x^{-\frac{12}{7}}$ **d)** $y = x^{-\frac{22}{5}}$

235. a) $y = \sqrt[7]{x^6}$ **b)** $y = \sqrt[25]{x^{14}}$ **c)** $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ **d)** $y = \frac{1}{\sqrt[7]{x^5}}$

236. a) $y = x\sqrt{x}$ **b)** $y = \sqrt{x}\,\sqrt[5]{x}$ **c)** $y = \sqrt[4]{x}\,\sqrt[3]{x}$ **d)** $y = \sqrt[7]{x^3}\,\sqrt[3]{x^7}$

237. a) $y = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$ **b)** $y = \frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}}$ **c)** $y = \frac{x\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}$ **d)** $y = \sqrt[7]{x} : \sqrt[5]{\frac{1}{x}}$

238. a) $y = \sqrt{x\sqrt{x}}$ **b)** $y = \sqrt{x\sqrt[5]{x}}$ **c)** $y = \sqrt{x\sqrt[3]{x^2\sqrt{x^3}}}$ **d)** $y = \sqrt[3]{x\sqrt{x\sqrt[3]{x^2}}}$

239. a) $y = \frac{\sqrt[6]{x^5}\,\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[12]{x^{11}}}$ **b)** $y = \frac{\sqrt[8]{x}\,\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[12]{x^{11}}\,\sqrt[13]{x}}$ **c)** $y = \frac{\sqrt[3]{x^2}\,\sqrt[5]{x^3}\,x^2}{x\,\sqrt[15]{x}\,\sqrt[4]{x}}$ **d)** $y = \frac{x\,\sqrt[4]{x}\,\sqrt[5]{x}}{\sqrt[6]{x}\,\sqrt[7]{x}}$

Bei den nachstehenden Aufgaben ist $f'(x_0)$ zu berechnen:

240. a) $y = x^3,\ x_0 = 5$ **b)** $y = x^8,\ x_0 = 2$ **c)** $y = x^{-1},\ x_0 = 1$ **d)** $y = x^{-3},\ x_0 = -2$

241. a) $y = \frac{1}{x},\ x_0 = \frac{1}{2}$ **b)** $y = \frac{1}{x^4},\ x_0 = -1$ **c)** $y = \frac{1}{x^{-2}},\ x_0 = 8$ **d)** $y = \frac{1}{x^{-3}},\ x_0 = 3$

242. a) $y=x^{\frac{1}{3}},\ x_0=27$ **b)** $y=x^{\frac{3}{4}},\ x_0=16$ **c)** $y=x^{-\frac{1}{2}},\ x_0=8$ **d)** $y=x^{-\frac{2}{5}},\ x_0=1$

243. a) $y=\sqrt{x},\ x_0=4$ **b)** $y=\sqrt[3]{x^2},\ x_0=8$ **c)** $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x}},\ x_0=27$ **d)** $y=\frac{1}{\sqrt[4]{x}},\ x_0=16$

244. a) $y=x\sqrt[3]{x},\ x_0=1$ **b)** $y=\sqrt{x}\,\sqrt[3]{x},\ x_0=64$ **c)** $y=\sqrt[3]{x^2}\,\sqrt[4]{x^3},\ x_0=1$ **d)** $y=\sqrt[5]{x^8}\,\sqrt[8]{x^5},\ x_0=2$

245. a) $y=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}},\ x_0=32$ **b)** $y=\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}},\ x_0=3$ **c)** $y=\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x}},\ x_0=8$ **d)** $y=\sqrt[3]{x}:\sqrt[4]{\frac{1}{x^3}},\ x_0=1$

246. a) $y=\sqrt{x\sqrt[3]{x}},\ x_0=125$ **b)** $y=\sqrt[4]{x\sqrt[3]{x}},\ x_0=27$ **c)** $y=\sqrt{x\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x}}},\ x_0=6$

247. a) $y=\frac{\sqrt{x}\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}},\ x_0=4$ **b)** $y=\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}\sqrt[4]{x}},\ x_0=3$ **c)** $y=\frac{x^2\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[5]{x^2}},\ x_0=32$

Man bilde jeweils den Differenzialquotienten:

248. a) $y=3$ **b)** $y=999$ **c)** $y=2x$ **d)** $y=4x^7$

249. a) $y=3x^{-3}$ **b)** $y=2x^{-2}$ **c)** $y=\frac{3}{x^2}$ **d)** $y=\frac{4}{3x^5}$

250. a) $y=3x^{\frac{1}{2}}$ **b)** $y=5x^{\frac{3}{4}}$ **c)** $y=\frac{4}{7}x^{-\frac{1}{2}}$ **d)** $y=\frac{5}{8}x^{-3}$

251. a) $y=7\sqrt[7]{x^5}$ **b)** $y=\frac{7}{8}\sqrt[8]{x^3}$ **c)** $y=17\sqrt[25]{2x^{-1}}$ **d)** $y=\frac{3}{17}\sqrt[12]{\frac{3}{x}}$

252. a) $y=2x^3-3x^2+5$ **b)** $y=4x^7+2x^2+13$ **c)** $y=9-x^2-5x$ **d)** $y=x^4+3x^2-7$

253. a) $y=4x^5-3x^4+12x^3+7x^2+3x-1$ **b)** $y=5x^5+8x^4-x^3+9x^2+6$

254. a) $y=\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}-\frac{4}{x^4}$ **b)** $y=3x^{-\frac{1}{2}}+5x^{-\frac{7}{6}}-6$ **c)** $y=\sqrt{7}\,x+\sqrt{7x^3}-7x$ **d)** $y=3\sqrt{x}+\sqrt{3}\,x-\sqrt{3x}$

255. a) $y=\sqrt[5]{4x^2}-3\sqrt[9]{2x^8}-7x^{-\frac{1}{4}}+3x^{-\frac{1}{8}}+\sqrt{5}$ **b)** $y=\sqrt[6]{8x^{11}}+5\sqrt[5]{3x^2}-4x^{-\frac{1}{3}}+3x^{-\frac{1}{6}}+\sqrt{3}$

Bei den folgenden Aufgaben ist $f'(x_0)$ zu berechnen:

256. a) $y=5,\ x_0=13$ **b)** $y=447,\ x_0=11$ **c)** $y=5x,\ x_0=-7$ **d)** $y=3x^3,\ x_0=-5$

257. a) $y=2x^{-1},\ x_0=-\frac{1}{2}$ **b)** $y=3x^{-5},\ x_0=-1$ **c)** $y=\frac{2}{x^3},\ x_0=-\frac{1}{3}$ **d)** $y=\frac{9}{4x^2},\ x_0=3$

258. a) $y=2x^{\frac{1}{2}},\ x_0=4$ **b)** $y=12x^{\frac{1}{3}},\ x_0=8$ **c)** $y=8x^{-\frac{1}{4}},\ x_0=16$ **d)** $y=\frac{2}{3}x^{-3},\ x_0=2$

259. a) $y=6\sqrt[6]{x^5},\ x_0=64$ **b)** $y=\frac{2}{7}\sqrt[9]{x^7},\ x_0=1$ **c)** $y=\frac{8}{3}\sqrt{4x^{-3}},\ x_0=4$ **d)** $y=10\sqrt[5]{\frac{3}{x}},\ x_0=3$

260. a) $y=3x^2-5x+8,\ x_0=\frac{1}{12}$ **b)** $y=6x^7-7x^6+18,\ x_0=2$ **c)** $y=8x^4-10x^3+8x^2,\ x_0=-3$

261. a) $y=8x^5-3x^4+2x^3-3x^2+8x-17,\ x_0=-1$ **b)** $y=7x^5+3x^4-5x^3+6x^2-7x+8,\ x_0=0$

262. a) $y=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}-4,\ x_0=2$ **b)** $y=\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x}+4,\ x_0=-2$

263. a) $y=\sqrt[4]{5x^3}-\sqrt[5]{4x^4}+\sqrt[6]{5x^5}-5x^{-\frac{1}{5}},\ x_0=1$ **b)** $y=\sqrt[7]{3x^2}-3\sqrt[7]{x^2}+\sqrt[5]{8x^8}-8\sqrt[8]{x^5}+3x^{\frac{7}{8}},\ x_0=1$

Die nachstehenden Funktionen sind unter Verwendung der Produktregel zu differenzieren:

264. a) $y=(x-5)(2x+2)$ **b)** $y=(3x+5)(3x+4)$

265. a) $y=(5x^2-2)(7x+1)$ **b)** $y=(3x^2-4)(8x^2-10)$

266. a) $y=(2x+4)(2x+4)$ **b)** $y=(9x-1)^2$

267. a) $y=(x-1)(x^2+x+1)$ **b)** $y=(x+3)(x^2-3x+9)$

268. a) $y=(3x^2-2x+1)(9x^2+x-1)$ **b)** $y=(14x^2+6x+4)(14x^2+6x-4)$

269. a) $y=(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[5]{2x}+x^{-\frac{1}{2}})(\sqrt[3]{2x^4}+\sqrt[5]{2x}-x^{-\frac{1}{3}})$ **b)** $y=(3x^{-\frac{1}{2}}+\sqrt{x}-1)(\sqrt{x^3}-3\sqrt[3]{x^2}+6)$

270. $y=(x^3+2x^2+7x-8)(x-3)-(x-2)(x^3-3x^2-7x+7)$

271. $y=(3x-4)^2-(4+3x)(4-3x)\cdot 3-9(x-7)\cdot 4x+32$

Man berechne die Ableitung $f'(x_0)$ der gegebenen Funktionen:

272. a) $y=x(x+5),\ x_0=-\frac{5}{2}$ **b)** $y=x^2(x^2+7),\ x_0=-3$

273. a) $y=(x+3)(x+4),\ x_0=-1$ **b)** $y=(9x+2)(3x+5),\ x_0=0{,}5$

274. a) $y=(9-8x^2)(3-2x^2),\ x_0=1$ **b)** $y=(3x+1)(4x^2-1),\ x_0=\frac{1}{2}$

275. a) $y=(x-2)(4x^2+3x+6),\ x_0=-\frac{1}{4}$ **b)** $y=(x-2)(x^2+2x+4),\ x_0=\sqrt{\frac{1}{3}}$

276. a) $y=(x^2-x+1)(x+1),\ x_0=\sqrt{3}$ **b)** $y=(x^2+3)(5x^2+6x+7),\ x_0=0{,}5$

277. a) $y=\sqrt{x^3}(x-2)^2,\ x_0=4$ **b)** $y=\sqrt[4]{x^3}(x-1)^3,\ x_0=1$

278. $y=(2x+3)(x^2-7x+5)+(2x-3)(x^2+7x+5),\ x_0=-\frac{1}{2}$

279. $y=(3+2x)(1-6x+4x^2)+(3-2x)(1+6x+4x^2),\ x_0=10$

Die nachstehenden Funktionen sind unter Verwendung der Quotientenregel zu differenzieren:

280. a) $y=\frac{1}{x+1}$ **b)** $y=\frac{x}{1-x}$ **c)** $y=\frac{x^2}{1+x^2}$

281. a) $y=\frac{3}{5-2x}$ **b)** $y=\frac{4}{7-x}$ **c)** $y=\frac{3x}{x-1}$

282. a) $y=\frac{x+1}{x-1}$ **b)** $y=\frac{x-1}{x+1}$ **c)** $y=\frac{1-x}{x+1}$

283. a) $y=\frac{4x-3}{5x-7}$ **b)** $y=\frac{8x-1}{2x-3}$ **c)** $y=\frac{9-7x}{4-x}$

284. a) $y=\frac{4x^2-1}{3x^2+5}$ **b)** $y=\frac{2-2x^2}{x^2}$ **c)** $y=\frac{3-x^2}{x^2+7}$

285. a) $y=\frac{6}{x^2-2x+1}$ **b)** $y=\frac{6x-1}{x^2-5x+6}$ **c)** $y=\frac{4x^2-3x+8}{2x^2-2x+9}$

286. a) $y=\frac{x^2-6x+9}{x^2-9}$ **b)** $y=\frac{x^2-8x+16}{2x^2-32}$ **c)** $y=\frac{2x-50x^3}{25x^2-10x+1}$

287. a) $y=\frac{4x^2-20x+25}{(2x-5)^3}$ **b)** $y=\frac{16x^2-32x-48}{8x+8}$ **c)** $y=\frac{27x^3+9x^2+3x+1}{27x^3+18x^2+3x}$

Es ist die erste Ableitung der gegebenen Funktionen an der Stelle x_0 zu ermitteln:

288. a) $y=\frac{1}{x-1}$, $x_0=-1$ **b)** $y=\frac{1}{5+x^2}$, $x_0=-5$ **c)** $y=\frac{1}{7-x^2}$, $x_0=-3$

289. a) $y=\frac{2x-3}{x-5}$, $x_0=-2$ **b)** $y=\frac{3+2x}{4-3x}$, $x_0=-1$ **c)** $y=\frac{5-2x}{4-3x}$, $x_0=-1$

290. a) $y=\frac{2x^2+3}{x^2}$, $x_0=-2$ **b)** $y=\frac{x^2}{5x^2+11}$, $x_0=2$ **c)** $y=\frac{8-3x^2}{2x^2-17}$, $x_0=-3$

291. a) $y=\frac{6+5x+x^2}{(x+3)^2}$, $x_0=-1$ **b)** $y=\frac{x^2-x+3}{(x-4)^2}$, $x_0=5$ **c)** $y=\frac{x^2+x-3}{(x+6)^2}$, $x_0=-7$

292. a) $y=\frac{4x}{x^2-1}-\frac{1-x}{1+x}+\frac{1+x}{1-x}$, $x_0=0$ **b)** $y=\frac{2+x}{5-x}-\frac{3-2x}{3+x}-\frac{x^2-18x+10}{x^2-2x-15}$, $x_0=4$

293. a) $y=\frac{2-3x}{2+x}-\frac{1+4x}{1-x}-\frac{x^2-14x}{x^2+x-2}$, $x_0=3$ **b)** $y=\frac{6-5x}{5-6x}-\frac{3+4x}{4-3x}+\frac{2x^2+3x+4}{4x^2-3x+2}$, $x_0=-5$

294. a) $y=\frac{2x+\sqrt[5]{x}}{x+x^2}$, $x_0=1$ **b)** $y=\frac{\sqrt[6]{x^{-7}}+x^{\frac{1}{2}}}{3-\sqrt{x}}$, $x_0=2$ **c)** $y=\frac{(x^2+5x)^3}{x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{3}{2}}}$, $x_0=1$

295. a) $y=\frac{7}{x^5+x}-\frac{3+\sqrt{x^{-1}}}{4+3x}-\frac{\sqrt{x}}{2}$, $x_0=1$ **b)** $y=\frac{8x}{\sqrt{x^{-1}}-x}-\frac{x^5}{2x+3}-\sqrt[4]{7^3}$, $x_0=2$

2. Eine nachträgliche Begründung, warum das Differenzieren „funktioniert"

Die Forschung nach einem neuen Medikament ist teuer und langwierig. Die Arbeit beginnt damit, dass zunächst ein Wirkstoff gesucht wird. Zahlreiche Substanzen werden hierfür einer großen Anzahl von Prüfungen unterworfen, bis man schließlich auf einige neue Wirkstoffe stößt, die in die engere Auswahl kommen. Diese neu entdeckten Wirkstoffe werden anschließend im Labor in vielen Teilschritten nochmals getestet. Die Substanzen werden an Zellkulturen, Computermodellen und im Tierversuch beobachtet. Nur wenn diese Versuche einen eindeutigen Hinweis geben, dass die positiven Eigenschaften überwiegen, geht die Entwicklung weiter: Es gilt, die optimale Darreichungsform (Tablette, Dragees, Tropfen usw.) zu finden. Ist auch diese Hürde genommen, beginnt die Erstanwendung an Menschen, die sich hierfür freiwillig zur Verfügung stellen und vollkommen gesund sein müssen. Bei zufrieden stellenden Resultaten (untersucht wird unter anderem die Vergleichbarkeit mit dem Tierversuch, die Verträglichkeit und die Dosierung) wird die therapeutische Erprobung an informierten Patienten vollzogen. Diese Phase lässt noch genauere Schlüsse zu, inwieweit die Wirksamkeit und Unbedenklichkeit des möglichen Arzneimittels beim kranken Menschen gegeben ist. Vor allem die sinnvolle und notwendige Dosis wird in diesem Zusammenhang gefunden. Nicht zuletzt erfolgt auch ein Vergleich mit bereits am Markt befindlichen Standardprodukten. Schließlich werden die Ergebnisse formuliert und der Wirkstoff als Medikament zugelassen. Das alles dauert 8 bis 10 Jahre und kostet Millionenbeträge. Von etwa 10 000 untersuchten chemischen oder organischen Substanzen erhalten ca. ein bis fünf Wirkstoffe die Zulassung als Medikament bei der Gesundheitsbehörde.

Das Foto zeigt eine Anlage zur Sterilabfüllung von Ampullen.

Es gibt wahrscheinlich niemanden, der die Sorgfalt, Genauigkeit und Umsicht der pharmazeutischen Industrie für übertrieben erachtet. Dieses permanente Prüfen und Testen, dieses anscheinende Misstrauen, mit dem die Forscher jeder neuen Substanz gegenüber stehen, ist ein Wesenszug, der sich in leicht abgewandelter Form auch bei Mathematikern findet: Gesetze und Behauptungen werden erst dann akzeptiert, wenn sie beweisbar sind.

Letzteres ist keineswegs akademischer Selbstzweck. Zahlreiche Probleme der Praxis werden z. B. unter Verwendung der Differenzialrechnung gelöst. Wenn die im vorigen Abschnitt besprochene „Technik des Differenzierens" nicht Hand und Fuß hat, sind die mit ihrer Hilfe gefundenen Resultate nicht nur höchst zweifelhaft, sondern mitunter sogar gefährlich: Ein falsches Ergebnis könnte — z. B. bei der Konstruktion einer Brücke — Menschenleben kosten.

Um die Brauchbarkeit der Gesetze der Differenzialrechnung zu überprüfen, benötigt man im Allgemeinen weder 8 bis 10 Jahre, noch kostet die Angelegenheit Millionenbeträge. Aber etwas Zeit und Geduld muss man dennoch investieren.

„Ist das überhaupt notwendig?", könnte sich der Leser dieser Zeilen fragen und damit argumentieren, dass die Regeln in der Mathematik einheitlich festgelegt werden und alle Mathematiker dieser Welt sich an die getroffenen Vereinbarungen halten.

Ist es tatsächlich eine stille Übereinkunft, dass z. B. $(x^n)' = nx^{n-1}$ gilt? Oder ist es zulässig — etwa über eine Gesetzesbestimmung —, dass die Potenzregel auf einmal $(x^n)' = n^2x^{n+2}$ lautet?

Sicherlich kann durch ein Gesetz etwas in der Mathematik festgelegt werden, ähnlich wie das vor mehr als 100 Jahren mit der Zahl π geschehen ist (vgl. Außenspalte). Inwieweit das freilich sinnvoll ist, bleibt dahingestellt.

Zitat aus „DAS NEUE GUINNES BUCH DER REKORDE 1986" (Ullstein Verlag):

„1897 beschloß die erste Kammer des US-Bundesstaats Indiana das Gesetz Nr. 246, nach dem von Rechts wegen Pi den Zahlenwert 4 erhielt."

Um es deutlich zu sagen: Die bisher besprochenen Regeln (Potenz-, Produkt- und Quotientenregel, „Konstantenregel" usw.) sind alle beweisbar. Letzteres ist allerdings nicht ganz einfach und der ungeduldige Leser dieser Zeilen sei gewarnt: Auf den nächsten Seiten finden sich Informationen, die einiges an Konzentration erfordern. Wer sich hier „durchkämpft", wird eine tiefere Einsicht erhalten und letztendlich verstehen, was es eigentlich bedeutet, zu „differenzieren".

Beispiel:

Am 30. Oktober 1983 wurden in Argentinien Wahlen abgehalten und eine neue Regierung gewählt. Ein Mitglied dieser Regierung argumentiert im Jahre 1987[1]: „... früher wurde eine schlechtere Politik gemacht, denn das Bruttoinlandsprodukt[2] hat von 1981 bis 1983 nur um 725030 Millionen Australes[3] zugenommen, während der Zuwachs von 1984 bis 1985 sogar 35750000 Millionen Australes betrug." Was ist von dieser Argumentation zu halten?

Producto Bruto Interno

	PBI en mill. de Australes (G.D.P. millions Australes)
1981	54 970
1982	170 000
1983	780 000
1984	5650 000
1985	41 400 000
1986	79 300 000

Lösung:

Es ist sicherlich unsinnig, **verschieden lange** Zeitperioden miteinander zu vergleichen. Aufschlussreicher ist es, den „mittleren Jahreszuwachs" heranzuziehen:

$$\frac{f(1983)-f(1981)}{1983-1981} = \frac{725\,030}{2} = \mathbf{362515}$$

$$\frac{f(1985)-f(1984)}{1985-1984} = \frac{35\,750\,000}{1} = \mathbf{35750000}$$

Es bleibt allerdings dahingestellt, ob es sinnvoll ist, die Bruttoinlandsprodukte zu vergleichen, wenn nichts über Teuerungsraten ausgesagt wird. Noch 1988 betrug die Inflation in Argentinien 186 %. Selbst ein Regierungsvergleich, der die Einkommensentwicklung heranzieht, ist nicht aussagekräftig: Soziale Leistungen, Freiheit des Bürgers, Umweltpolitik — das alles und viel mehr spielt eine Rolle, wenn es darum geht, einen Politikvergleich anzustellen.

[1]) 1987 wurden wieder Wahlen ausgeschrieben.

[2]) Das **„Bruttoinlandsprodukt"** ist ein Versuch, die wirtschaftliche Leistung einer Volkswirtschaft während eines Kalenderjahres auszudrücken. Es ist die Summe der Werte aller konsumierten, investierten und exportierten Güter und Dienstleistungen, vermindert um den Wert aller importierten Güter und Dienstleistungen. Es werden aber nur diejenigen Güter und Dienstleistungen in Betracht gezogen, die einen Marktpreis besitzen.

[3]) Vor Einführung des argentinischen Peso (1. Jänner 1992) war der Austral (Mehrzahl: Australes) von 1983 bis 1991 in Argentinien gesetzliches Zahlungsmittel.

Überlegen wir uns das mathematisch Wesentliche des letzten Beispiels: Die Größe der Einkommensänderung wurde durch die Differenz $f(b) - f(a)$ ausgedrückt.

Um nun die Änderung der Funktionswerte im Verhältnis zur Änderung der Argumente vergleichen zu können, war der sogenannte **Differenzenquotient** zu bilden: $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Geometrisch entspricht der Differenzenquotient dem Anstieg k der in nebenstehender Figur blau eingezeichneten Geraden.

Mitunter schreibt man für die Differenz $y_1 - y_0$ kurz Δy[1] — analog wird $x_1 - x_0$ mit Δx bezeichnet.

Der Leser ist eingeladen, Δx und Δy in die Figur einzutragen und anschließend die Aufgabe **296.** auszuführen!

Definition:

Es sei f eine reelle Funktion. Dann heißt $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ der **Differenzenquotient** von f in $[a, b]$.

Definition:

$P_1(x_1, y_1)$ und $P_2(x_2, y_2)$ seien zwei verschiedene Punkte einer Geraden. Unter der **Steigung** oder dem **Anstieg** der Geraden versteht man den Quotienten

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{Höhendifferenz}}{\text{Horizontaldifferenz}}.$$

k hat für je zwei beliebige Punkte der Geraden den selben Wert.

In der Außenspalte wurde der Bergriff „Anstieg einer Geraden" genau definiert. In der danach folgenden Figur **(1)** ist der Punkt P_0 rot eingezeichnet.

Wie groß ist der Anstieg in diesem Punkt? Es soll also — zum Unterschied von bisher — **nicht** der Anstieg zwischen zwei Punkten einer (reellen) Funktion f, sondern der „in einem Punkt" berechnet werden.

Offensichtlich ist eine Übertragung des Begriffs „Anstieg" von Geraden auf beliebige Kurven unmöglich.

Wir müssen also den Anstieg einer Kurve **in einem Punkt** definieren: Unter dem **Anstieg einer Kurve** in einem Punkt P_0 wollen wir den Anstieg der Tangente in P_0 verstehen.

Angenommen, wir wollen eine Tangente im Punkt P zeichnen. In Figur **(2)** fühlen sich zahlreiche Geraden „angesprochen" — sie alle wollen Tangente sein.

Anschaulich formuliert ist die Tangente genau jene Gerade, die sich möglichst gut im Punkt P an die Kurve schmiegt.

In Figur **(3)** ist die Tangente hellblau eingezeichnet. Wie könnte sie entstanden sein? Nun: Man lässt den Punkt P_1 gegen P_0 „wandern". Auf dieser Basis nähert sich die Sekante P_0P_1 immer besser der Tangente in P_0 an — und für $x = x_0$ ergibt sich die Tangente in P_0!

Da der Anstieg der Sekante P_0P_1 gleich dem Differenzenquotienten ist: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$, ist der Anstieg der Kurve im Punkt P_0 dem **Grenzwert des Differenzenquotienten** für $\Delta x \to 0$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \tan \alpha$$

(1)

(2)

(3)

[1] Δ (gesprochen: Delta) ist ein großes griechisches „D" für „Differenz".

Definition:

Unter dem **Differenzialquotienten** oder der **ersten Ableitung** der Funktion f an der Stelle x_0 versteht man den Grenzwert des Differenzenquotienten, falls dieser existiert:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Wenn dieser Grenzwert an der Stelle x_0 existiert, dann sagt man, dass f an der Stelle x_0 **differenzierbar** ist.

Der Differenzialquotient ist also (vgl. Außenspalte) der Grenzwert des Differenzenquotienten!

Für den Differenzialquotienten verwendet man neben $f'(x_0)$ und y' auch das Symbol $\frac{dy}{dx}$ (gesprochen: de-y nach de-x).

dy bzw. dx nennt man die **Differenziale** von y bzw. x.

Der Grenzwert kann selbstverständlich nicht einfach dadurch gebildet werden, dass man $\Delta x = 0$ oder $x = x_0$ setzt (Division durch Null...).

Bevor der Grenzübergang durchgeführt wird, muss der Differenzenquotient gebildet werden. Im Detail zeigt dies das nächste Beispiel.

Beispiel:

Mittels Grenzübergangs ist die Funktion mit der Gleichung $y = x^2 + 3x$ an der Stelle $x_0 = 5$ zu differenzieren.

Lösung:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x^2 + 3x) - (x_0^2 + 3x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x^2 - x_0^2) + 3(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x + x_0)(x - x_0) + 3(x - x_0)}{x - x_0} =$$

$$= x_0 + x_0 + 3 = \mathbf{2x_0 + 3} \qquad \mathbf{f'(5)} = 2 \cdot 5 + 3 = \mathbf{13}$$

Bemerkung: Das gefundene Resultat lässt sich mit den bekannten Regeln leicht überprüfen.

Mit dem jetzt vorliegenden theoretischen Rüstzeug können wir unser früher gegebenes Versprechen einlösen und die diversen Regeln beweisen. Wir beschränken uns vorerst auf den Beweis von $(u + v)' = u' + v'$.

Beispiel:

$f(x) = u(x) + v(x)$; $f'(x_0) = u'(x_0) + v'(x_0)$ — Beweis?

Lösung:

Voraussetzung ist, dass u und v bei x_0 differenzierbar sind!

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad u'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0}, \quad v'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0}$$

Nun gilt es, die Behauptung $f'(x_0) = u'(x_0) + v'(x_0)$ zu beweisen:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{u(x) + v(x) - u(x_0) - v(x_0)}{x - x_0}^{1)} = \lim_{x \to x_0} \left[\frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} + \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0}\right] =$$

$$= \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0}}_{u'(x_0)} + \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0}^{2)}}_{v'(x_0)} = \mathbf{u'(x_0) + v'(x_0)}$$

Das letzte Resultat — Ableitung einer Summe bei x_0 — kann dahin gehend erweitert werden, dass wir x_0 nicht auf einen bestimmten Wert beschränken, sondern x_0 alle reellen Zahlen x durchlaufen darf.
$\Rightarrow \mathbf{f'(x) = u'(x) + v'(x)}$

---

[1]) Schließlich ist ja $f(x) = u(x) + v(x)$ und $f(x_0) = u(x_0) + v(x_0)$.

[2]) $\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n + \lim_{n \to \infty} b_n$.

Selbstverständlich braucht man nicht jedesmal den Grenzübergang durchzuführen, wenn man differenzieren möchte. Vielmehr werden die bekannten Gesetze einfach angewandt.

Bei den nun folgenden Beispielen ist das Problem auf zweifache Weise gegeben: In der Hauptspalte wird die Angabe sprachlich gefasst, in der Außenspalte zeichnerisch. In der Zeichnung wurden gesuchte Größen jeweils blau eingezeichnet.

Beispiel:

Die Steigung der Tangente an den Funktionsgraphen $y=\sqrt{x}$ ist im Punkt Q(x, 1) zu ermitteln. Wie lautet die Tangentengleichung in Q?

Lösung:

Ein Punkt P liegt auf einer Kurve mit der Funktionsgleichung $y=f(x)$ genau dann, wenn seine Koordinaten die Funktionsgleichung erfüllen:

$1=\sqrt{x} \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow Q(1, 1)$

$y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}},\ y'=\ldots=\frac{1}{2\sqrt{x}}\quad f'(1)=\frac{1}{2} \Rightarrow$ Steigung k der Tangente: $\mathbf{k=\frac{1}{2}}$

Ermittlung der Tangentengleichung:

$$y=kx+d,\ \mathbf{k=\frac{1}{2}}$$

$$1=\frac{1}{2}\cdot 1+d \Leftrightarrow d=\frac{1}{2} \Rightarrow \mathbf{y=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}}$$

Beispiel:

Wo und unter welchem Winkel φ schneiden einander die Funktionen mit den Gleichungen $y=x^2$ und $y=\sqrt{x}$?

Lösung:

Im Schnittpunkt muss gelten: $x^2=\sqrt{x} \Leftrightarrow x^4-x=0 \Leftrightarrow x(x^3-1)=0$

$\Rightarrow \ldots x_1=0,\ x_2=1 \qquad \mathbf{S_1(0, 0),\ S_2(1, 1)}$

Zunächst berechnen wir den Anstieg der Tangenten im Punkt S_1:

$y=x^2 \Rightarrow y'=2x \Rightarrow f'(0)=0 \Rightarrow \alpha_1=0° \Rightarrow$ Im Punkt $S_1(0, 0)$ hat der Graph von $y=x^2$ die x-Achse als Tangente.

$y=\sqrt{x} \Rightarrow y'=\frac{1}{2}\sqrt{x} \Rightarrow f'(0)$ ist wegen der Division durch 0 nicht definiert. Daher ist mit Hilfe der Differenzialrechnung für $y=\sqrt{x}$ kein Anstieg im Punkt $S_1(0, 0)$ bestimmbar. Allerdings lässt sich mit folgender Überlegung für $y=\sqrt{x}$ ein Anstieg im Punkt $S_1(0, 0)$ angeben: Wir haben $y=\sqrt{x}$ als Umkehrfunktion von $y=x^2$ kennen gelernt. Da der Graph von $y=x^2$ im Punkt $S_1(0, 0)$ die x-Achse als Tangente hat, hat der Graph von $y=\sqrt{x}$ im Punkt $S_1(0, 0)$ die y-Achse als Tangente. Daher können wir für den Graphen von $y=\sqrt{x}$ im Punkt $S_1(0, 0)$ den Anstiegwinkel $\beta_1=90°$ angeben.

Der Schnittwinkel im Punkt $S_1(0, 0)$ beträgt daher $\mathbf{\varphi_1=90°}$.

Für den Punkt $S_2(1, 1)$ gehen wir analog vor:

$y=x^2 \Rightarrow y'=2x \Rightarrow f'(1)=2=\alpha_2=63{,}43°$

$y=\sqrt{x} \Rightarrow y'=\frac{1}{2}\sqrt{x} \Rightarrow f'(1)=0{,}5 \Rightarrow \beta_2=26{,}57°$

Der Schnittwinkel im Punkt $S_2(1, 1)$ beträgt daher

$\varphi_2=\alpha_2-\beta_2=63{,}43°-26{,}57°=\mathbf{36{,}87°}$

Bemerkung zu den Schnittwinkeln:

Genau genommen gibt es zwischen 2 Funktionsgraphen 2 Schnittwinkel, die einander auf 180° ergänzen.

Im nebenstehenden Beispiel beträgt in $S_1(0, 0)$ der zweite Winkel ebenfalls 90°, in $S_2(1, 1)$ 143,13° (= 180° – 36,87°).

Wir wollen allerdings in den Beispielen und Aufgaben bei zwei verschieden großen Schnittwinkeln nur den spitzen Winkel angeben und auf die Angabe des stumpfen Winkels verzichten.

AUFGABEN

296. a) Differenzenquotient $\frac{\text{Funktionswertänderung}}{\text{zugehörige Argumentwertänderung}}$

Wie könnte man — im Hinblick auf die nebenstehende Figur — die Funktionswert- und die Argumentwertänderung kurz und prägnant beschreiben?

b) Darf im Ausdruck $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ durch Δ gekürzt werden? (Begründung!)

c) Wie groß ist der Anstieg der Geraden, die durch die Punkte $P_0(5, 6)$ und $P_1(-7, 0)$ gelegt wird?

d) Mit welchen Formeln können wir den Anstieg einer linearen Funktion berechnen?

e) Wieso ist $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ äquivalent zu $\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$?

f) Wie lautet die Gleichung der Geraden, die durch P(3, 4) geht und deren Steigungswinkel $\alpha = 45^\circ$ ist?

g) Wie könnte man eine Sekante einer Kurve definieren?

h) Für welche linearen Funktionen ist der Anstieg $k = 0$?

$$k = \tan\alpha = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

297. Die wahren Aussagen sind anzukreuzen:

- ○ **a)** Bei einer Geraden ist der Anstieg definiert und überall konstant.
- ○ **b)** Der Differenzialquotient ist geometrisch der Anstieg der Tangente in einem Punkt des Funktionsgraphen.
- ○ **c)** Die Tangente kann als Grenzlage einer unendlichen Folge von Sekanten angesehen werden.
- ○ **d)** Der Differenzialquotient ist eine Folge.
- ○ **e)** Die erste Ableitung ist ein Quotient.
- ○ **f)** Der Differenzialquotient ist ein Grenzwert.
- ○ **g)** Die erste Ableitung ist ein Quotient von Grenzwerten.
- ○ **h)** Das Bilden des Grenzwertes $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ nennt man **differenzieren** oder **ableiten**.

298. Momentane Geschwindigkeit

„Was eine mittlere Geschwindigkeit ist, hat sich wohl mittlerweile herumgesprochen. Fährt ein Automobilist auf der Autobahn Berlin-Stettin haargenau nach dem Tachometer-,Strich', d.h. sorgt er dafür, daß die Nadel des Geschwindigkeitsmessers stets auf demselben Teilstrich von, sagen wir, 60km/h stehenbleibt, so legt er wirklich in einer Stunde 60 km zurück. Ein Wagen, der auf der benachbarten Landstraße in derselben Zeit von Berlin nach Stettin kommen will, kann niemals ,Strich fahren'. In jedem Dorf, jeder Stadt, bei den vielen Kurven und Bahnübergängen, wird seine Fahrt gebremst, die Geschwindigkeit sinkt vorübergehend ab, vielleicht gar bis auf Null, zum Stillstand. Um den Verlust wettzumachen, fährt der Automobilist zwischendurch entsprechend schneller — 80, 100 oder gar 150 km/h — was wissen wir. Gelingt es ihm dann wirklich, in zwei Stunden von Berlin nach Stettin zu kommen, so sagt er, die mittlere Reisegeschwindigkeit habe 60 km/h betragen. Wir sehen daraus: der Mittelwert ist zunächst nur eine Rechengröße. Er spielt zwar für den Endeffekt, für die wirkliche Reisedauer von Berlin nach Stettin, noch eine Rolle — und zwar die entscheidende —, sagt aber nichts mehr über die Besonderheiten der Fahrt, über die physikalischen Wirklichkeiten aus. Beispielsweise ist der Benzinverbrauch auf der Autobahn viel geringer als bei der Fahrt auf der Landstraße — aus der mittleren Geschwindigkeit kann man das aber nicht schließen, ja man muß sich sogar darüber wundern. Mathematisch springt hier nichts heraus, denn einen solchen Mittelwert können wir wohl alle noch bilden. Man dividiert einfach die Gesamtstrecke 120 km durch die Gesamtzeit 2 Stunden, gibt ... 60 km/h.

Wichtiger, wirklichkeitsnäher und mathematisch ungleich ergiebiger ist ein anderer Begriff: der der augenblicklichen Geschwindigkeit. Heutzutage erscheint er uns allen äußerst vertraut, nicht zuletzt durch die traurige Ursache der Verkehrsunfälle: ,Welche Geschwindigkeit hatte der Wagen im Augenblick des Zusammenstoßes?' Diese Frage stellt jeder Staatsanwalt an den zufälligen Zeugen Lehmann. Herr Lehmann steht unter Zeugeneid; er wird nach bestem Wissen und Gewissen Auskunft geben; und weder

298. (Fortsetzung)

er noch der Herr Staatsanwalt werden sich darüber klarwerden, daß die Frage eigentlich ins Gebiet der höheren Analysis gehört und zu ihrer genauen Beantwortung Grenzwertbetrachtungen verlangt. Wir hören den Chor der Automobilisten in höhnisches Gelächter ausbrechen. ‚Was die augenblickliche Geschwindigkeit ist? Das wissen Sie nicht? Natürlich die Geschwindigkeit, die der Tacho gerade jetzt anzeigt; ist doch klar, Mann!' Nun, ganz so klar ist's nicht. Der ‚Tacho' scheint zwar eine sehr bequeme Eselsbrücke zu liefern, hält aber der Nachprüfung nicht stand. Denn erstens vergeht ja immer eine gewisse, wenn auch eine kleine Zeit, ehe die Anzeige zustande kommt — ehe also die Wirbelströme im Anker sich verändern und die Feder der Zeigerübersetzung neu einspielt, kurz, das Tachometer ist ein Vergangenheitskrämer und erzählt uns immer nur, was gerade schon vorbei ist. Überdies aber ist das Tachometer ein Instrument, das auf komplizierten physikalischen Vorgängen beruht und erst seinerseits geeicht werden mußte. Der Eichingenieur beim Staatlichen Prüfungsamt ist also der Mann, an den wir uns wenden müssen, wenn wir mathematisch-genaue Auskunft suchen., ‚Geschwindigkeit?' sagt er und blickt von seinem Arbeitstisch auf ..., Geschwindigkeit ist der Quotient aus Weg und Zeit. Legt ein Kraftwagen sechzig Kilometer in einer Stunde zurück, so beträgt seine Geschwindigkeit sechzig Stundenkilometer. Oder ...', und hierbei beschäftigt er sich einen Augenblick mit dem Taschenrechner ...,ja, natürlich: einen Kilometer in der Minute. So haben wir es auch geeicht. Wir sind auf der Autobahn nach der Stoppuhr einen Kilometer in genau einer Minute gefahren, haben dort, wo der Zeiger stand, einen Strich auf der Skala des Tachometers gemacht und daran die Zahl sechzig geschrieben.'

‚Ja, aber', wenden wir ein,, damit messen Sie doch wieder eine mittlere Geschwindigkeit. Wenn der Wagen nun nicht genau gleichmäßig fuhr?', Er ist gleichmäßig gefahren', sagt der Ingenieur, ‚denn das Tachometer blieb auf einem Strich stehen. Außerdem könnte man ja eine kürzere Meßstrecke nehmen, etwa nur eine Sekunde lang fahren und dabei einen Weg von... Augenblick' — und wieder das Spiel mit dem Taschenrechner —, also von 16,666 m zurücklegen.'

Wir bleiben hartnäckig und sagen:,Ja, schön, vielen Dank, aber damit haben Sie doch nur die mittlere Geschwindigkeit während einer Sekunde. Außerdem führt die Division 1000 : 60 auf einen unendlichen Dezimalbruch, geht also nicht genau auf.'

‚Für meine Zwecke ist das genau genug', sagt der Ingenieur.

Also gehen wir zum Physiker und fragen ihn um Rat. ‚Hm', meint er und lächelt, etwas von oben herab: ‚hätte Ihnen gleich sagen können, daß Sie drüben bei meinem Kollegen von der Technik wenig Glück haben würden. Allzu rohe Methoden, keine Präzision. Eine Sekunde hat er Ihnen angeboten? Nun, machen wir genauer. Hier, unsere Versuchsanordnung: Mißt auf millionstel Millimeter genau, Lichtwellenlängen-Bruchteile, großartige Sache, müssen Sie sich ansehen. Flugzeit bei mir zwischen den beiden Meßmarken eine zehntausendstel Sekunde — soll der Herr von den Motoren einmal nachmachen! Wie?,'

‚Ja,... nur wollten wir gern die Geschwindigkeit in einem Augenblick wissen. Sie bestimmen doch eine mittlere Geschwindigkeit während einer zehntausendstel Sekunde?'

‚Ganz recht, ja. Eigentlich doch mittlere Geschwindigkeit — theoretisch gesprochen. Schon korrekt. Grenze der Meßgenauigkeit, immerhin. Am besten, Sie gehen gleich zu unserem Mathematiker, Professor Epsilon. Der wird Ihnen schon Auskunft geben.'

Nun also, meinen wir, während wir die Treppe in das stille obere Stockwerk hinaufsteigen. Also doch wieder der Mathematiker — wer auch sonst? In der Praxis wie in jeder angewandten Wissenschaft beherrschen die Näherungswerte unumschränkt das Feld, Näherungswerte und Näherungsmethoden. Absolute begriffliche Strenge findet sich nur in der Mathematik und, vielleicht noch, in der Philosophie."[1]

a) In welcher Hinsicht unterscheidet sich die Arbeitsmethode des Eich-Ingenieurs von jener des Physikers? Worin liegt das Gemeinsame beider Messmethoden?

„Professor Epsilon empfängt uns milde und freundlich und verständnislos. Es kostet einige Mühe, ihn auf unser Thema zu bringen; er sei eben einem sehr interessanten Problem aus der Differentialgeometrie auf der Spur; dann plaudert er von einer n-blättrigen Riemannschen Fläche, kommt auf den Hilbert-Raum von unendlich vielen Dimensionen, und mit großer Begeisterung sucht er uns die Schönheit gerade des Restklassen-Polynomrings klarzumachen. Aber endlich gelingt es, ihn auf die Erde herabzuzerren. ‚Geschwindigkeit? Augenblickliche Geschwindigkeit? Ja, warum nicht?' meint er höflich lächelnd, ohne doch zu wissen, wovon wir reden. Wir müssen uns schon etwas exakter ausdrücken: ‚Geschwindigkeit ist definiert als v=s/t, Herr Professor. Es wird nach der augenblicklichen Geschwindigkeit gefragt, der Geschwindigkeit in einem bestimmten Zeitpunkt t.'

[1]) Aus „KARLSON, Zauber der Zahlen" (Ullstein Verlag).

298. (Fortsetzung)

„Ah, ich verstehe", sagt der Professor, ergreift den Bleistift und schreibt ein paar Zeichen:

$$v = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

‚Wollten Sie noch mehr wissen?'
Nun, das ging uns etwas zu schnell — ob er es erklären könne?
‚Sie suchen eine gewisse Funktion v (t), denn es ist doch gemeint, daß die Geschwindigkeit mit der unabhängigen Variablen t variieren soll. Und nun fragen Sie nach dem Funktionswert v an der Stelle t. Existiert er denn überhaupt?' Ja, gerade das wollten wir eigentlich vom Professor wissen. ‚So, das wissen Sie auch nicht? Dann müssen wir es definieren, ganz einfach, damit beheben wir alle begrifflichen Schwierigkeiten. Gehen Sie streng systematisch vor, meine Herren. Sagen Sie: Die mittlere Geschwindigkeit, mit der ein Punkt sich längs einer Strecke von s_0 *nach s bewegt, ist gemessen durch das Verhältnis*

$$\frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0},$$

wenn der Punkt zur Zeit t_0 *in* $s_0 = s(t_0)$, *zur Zeit t in* $s = s(t)$ *sein soll... Kürzer können wir dafür schreiben* $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ *...'"[1]*

b) Was versteht man unter den Bezeichnungen Δs und Δt?

„Dieser Ausdruck, der ‚Differenzenquotient', definiert uns die mittlere Geschwindigkeit zwischen den Zeitpunkten t_0 *und t oder zwischen den entsprechenden Wegpunkten* s_0 *und s. Sie fragen nach der ‚augenblicklichen Geschwindigkeit', wie Sie sich unscharf ausdrücken, also nach der Geschwindigkeit im Punkte* $(t_0,\ s_0)$. *Um sie zu ermitteln, müssen wir offenbar den Punkt (t, s) immer näher an* $(t_0,\ s_0)$ *heranrücken lassen und das Verhalten des Bruches* $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ *untersuchen. Existiert ein Grenzwert, dem er an der Stelle* $(t_0,\ s_0)$ *zustrebt, so bezeichnet man diesen Grenzwert als Geschwindigkeit v im Punkte* $(t_0,\ s_0)$, *in Zeichen — denn warum sollen wir so viel reden —* $v(t)_{t=t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$.
Es wäre gut, wenn Sie sich vergewissern, ob die Funktion s (t) an der Stelle t_0 *wenigstens stetig, und zwar beiderseitig stetig, ist. Wie sieht denn die Funktion aus? Was? Auto? Ach so, Sie meinen ein wirkliches Automobil! Ja, meine Herren — dann ist doch die Funktion s (t) gar nicht nach einer eindeutigen Vorschrift definiert. Das ist dann nur empirisch feststellbar. Vielleicht fragen Sie einmal drüben im Staatlichen Prüfungsamt bei den Eichingenieuren nach ...' Und damit war der Professor Epsilon bereits wieder in seine Differentialgeometrie versunken und nicht wieder zu erwecken.*

Ja, Herr Staatsanwalt und Herr Lehmann und meine Herren Automobilisten — was machen wir nun? Ist alles klargeworden? Nun, ich denke, der Besuch bei Professor Epsilon hat die Lage doch geklärt. Unter der augenblicklichen Geschwindigkeit versteht man den Grenzwert der auf normale Weise definierten mittleren Geschwindigkeit $\lim \frac{\Delta s}{\Delta t}$. *Ob dieser Grenzwert existiert und welchen Wert er hat, kann man natürlich nur entscheiden, wenn man die Funktion s(t) kennt, d.h. weiß, wie der Weg von der Zeit abhängt. Fährt ein Wagen z. B. mit mathematisch gleichbleibender Geschwindigkeit (eine grobe Annäherung daran wäre die Fahrt auf der Autobahn), so ist die Geschwindigkeit konstant und der Weg eine lineare Funktion der Zeit:* $s = ct$
Dann wird der Differenzenquotient $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s - s_0}{t - t_0} = \frac{ct - ct_0}{t - t_0} = c$

Diese Beziehung gilt offenbar für alle Werte t, mithin existiert der Grenzwert $\lim_{t \to t_0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ *und ist gleich c. Damit ist errechnet, daß die augenblickliche Geschwindigkeit im Punkte t genauso groß ist wie die Geschwindigkeit überall sonst, vorausgesetzt, daß die Geschwindigkeit stets gleichbleibt — ein wahrhaft scharfsinniges Resultat, wie wir zugeben müssen! Aber man lache nur, meint Professor Epsilon; wir Mathematiker kümmern uns wenig um den Spott der Mitmenschen, wenn nur unsere eigenen Forderungen an Strenge erfüllt sind. Und wirklich haben wir hier schon eine Methode gewonnen, die sich verallgemeinern läßt. Ein Stein stürzt senkrecht zur Erde hinab. Die Physiker belehren uns, daß sein Weg dann, vom Luftwiderstand abgesehen, eine quadratische Funktion der Zeit ist:* $s = \frac{g}{2}t^2$, *dabei ist g die Beschleunigung durch die Schwerkraft auf der Erde. Der Stein hat also nach doppelter Zeit den vierfachen, nach dreifacher Zeit den neunfachen Weg zurückgelegt. Wie groß ist seine Geschwindigkeit zur Zeit* t_0? *Nun, hier wächst die Geschwindigkeit dauernd an, wir haben eine beschleunigte Bewegung vor uns, und kein Mensch wird behaupten wollen, auch hier noch aus der freien Hand über den Daumen peilend, die Geschwindigkeit vorhersagen zu können.*

[1]) Aus „KARLSON, Zauber der Zahlen" (Ullstein Verlag).

298. (Fortsetzung)

Wir aber halten uns wieder an unsere Formel. Die mittlere Geschwindigkeit zwischen zwei Punkten s und s_0 ist wieder durch den Differenzenquotienten

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s - s_0}{t - t_0}$$

gegeben.
Setzen wir für s den Funktionswert ein, so ergibt sich

$$v(t) = \frac{g}{2} \cdot \frac{t^2 - t_0^2}{t - t_0} = \frac{g}{2} \cdot \frac{(t + t_0)(t - t_0)}{t - t_0}$$

$$v(t) = \frac{g}{2}(t + t_0)$$

Vollziehen wir hier den Grenzübergang, lassen wir also t gegen t_0 rücken, so nähert sich die Klammer dem Wert $2t_0$, und es wird

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{g}{2}(t + t_0) = \frac{g}{2} \cdot 2t_0 = gt_0$$

Mithin haben wir das wichtige Resultat gewonnen: Bei der beschleunigten Bewegung nach der Formel $s = \frac{g}{2}t^2$ ist die Geschwindigkeit zur Zeit t_0 durch $v = gt_0$ gegeben. Diese Überlegung, darin liegt der große Vorteil der mathematischen, von uns eingeschlagenen Methode, ist ganz unabhängig von der Wahl des speziellen Wertes t. Allgemein gilt also die Beziehung

$$v = gt.\text{“}^{1)}$$

c) Von welcher physikalischen Größe ist die Geschwindigkeit v nun abhängig? Von welcher Art ist dieser funktionale Zusammenhang?

„*Wächst die Zeit* [vom Beginn der Bewegung ($t = 0$) ausgehend] *um 1, 2, 3, ... Sekunden, so wächst die Geschwindigkeit* [von $v(0) = 0\,m/s$] *auf g, 2g, 3g,... m/s, also jeweils um g. Weil also der Geschwindigkeitszuwachs in der Zeit stets gleichmäßig erfolgt, nennt man die Bewegung gleichmäßig beschleunigt.*“[1)]

d) Eine Kugel rollt eine schiefe Ebene abwärts. Wie groß ist die Momentangeschwindigkeit v nach $t = 10\,s$, wenn die zugehörige Bewegungsgleichung lautet: $s(t) = \frac{t^2}{10}$?

e) $s(t) = \frac{t^2}{5} + 3t + 7$ ist das Gesetz einer ungleichförmigen Bewegung, dem ein Körper gehorcht. Es ist allgemein die momentane Geschwindigkeit $v(t_0)$ zu ermitteln.

Damit haben wir die physikalische Bedeutung des Differenzialquotienten ein wenig beleuchtet. Im Physikunterricht werden wir noch viel über dieses Thema erfahren, denn für die Herleitung zahlreicher physikalischer Gesetze ist die Differenzialrechnung ein unentbehrliches Hilfsmittel.

299. Der schwere Unfall im sowjetischen Kernkraftwerk Tschernobyl hat selbst Befürworter der Kernenergie verunsichert. Am 26. April 1986 wurde durch eine Explosion und darauf folgenden Grafitbrand eine Vielzahl von radioaktiven Stoffen freigesetzt. Die hauptsächliche Belastung erfolgte dabei durch das Cäsium. Von 1000 radioaktiven Cäsiumatomen ist die Anzahl N (t) der Cäsiumatome, die nach t Jahren noch vorhanden sind, näherungsweise durch die Beziehung $N(t) = 23t - 0{,}2t^2$ gegeben. Die Anzahl der zerfallenden Atome pro Jahr ist nach t Jahren $A(t) = \frac{dN(t)}{dt}$.
Wie groß ist im Mittel die Anzahl der zerfallenden Atome pro Jahr nach dem **a)** 5. und **b)** 10. Jahr?

[1)] Aus „KARLSON, Zauber der Zahlen“ (Ullstein Verlag).

300. Am 6. August 1945 wurde die japanische Stadt Hiroschima durch eine Atombombe zerstört. Mehr als 15000 Tote, Vermisste und Schwerverletzte verursachte dieser erste Abwurf einer Atombombe. Die Schockwelle der atomaren Explosion breitete sich nach folgender Funktionsgleichung aus:

$v(s) = 330 + \frac{80}{s^2}$ v(s) ..... Geschwindigkeit in m/s, s km vom Explosionszentrum entfernt

Welche Momentangeschwindigkeit hatte die Schockwelle in zwei Kilometern Entfernung?

301. In einem Physikbuch finden sich folgende Aussagen, die wir als wahr betrachten wollen:

> Die **Momentangeschwindigkeit** ist die mittlere Geschwindigkeit für ein unendlich kleines Zeitintervall. In die Sprache der Mathematik übertragen: Die Momentangeschwindigkeit ist die erste Ableitung des Wegs nach der Zeit.
>
> Die **Beschleunigung** ist der Geschwindigkeitszuwachs in der Zeiteinheit. In die Sprache der Mathematik übertragen: Die Beschleunigung ist die erste Ableitung der Momentangeschwindigkeit nach der Zeit.

Im Hinblick auf die obigen Ausführungen ist zu begründen, warum bei der in Aufgabe **300.** behandelten Schockwelle die Beschleunigung nicht durch Einsetzen in $v'(s) = -\frac{160}{s^3}$ bestimmt werden kann.

Allgemein lässt sich sagen, dass alle Zellen, die sich öfter teilen, durch die Radioaktivität betroffen sind. Menschen verhungern noch Monate nach dem Abwurf einer Atombombe, obwohl sie ausreichend zu Essen bekommen, da die Darmflora (insbesondere die des Dünndarms) nicht mehr funktioniert. Die Blutbildung wird durch die Radioaktivität gleichfalls beeinflusst. Denn der Informationskode, wie Blutkörperchen entstehen, funktioniert nicht mehr.

302. Von der Fa. GLETSCHERBAHN KAPRUN AG wurde das nebenstehende Foto zur Verfügung gestellt. Es zeigt eine Kabine der Luftseilbahn vom Alpincenter (2452 m) zur Gipfelstation (3029 m). Die im Hintergrund sichtbare Stütze ist mit 113,6 m die höchste der Welt. Das durchhängende Seil kann für diesen Teil der Strecke näherungsweise durch die Funktion $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$ beschrieben werden. ($a = 0{,}00015$, $b = 0{,}137$, $c = 2668{,}85$)

a) Ist das Seil an der Stelle x = 829,24 oder x = 1159,69 steiler?

b) An welcher Stelle hängt das Seil „am Tiefsten" durch?
Anleitung: Im Punkt des größten Durchhangs hat die Kurve k eine zu g parallele Tangente.

303. Mittels Grenzübergangs ist die Funktion mit der Gleichung **a)** $y = x^2 + 5x$ an der Stelle $x_0 = 1$ **b)** $y = x^3 - 5$ an der Stelle $x_0 = 4$ zu differenzieren.

304. $f(x) = u(x)\,v(x)$, $f'(x_0) = u'(x_0)\,v(x_0) + u(x_0)\,v'(x_0)$ — Beweis der Produktregel?
Anleitung: Im Zähler des Differenzenquotienten ist zwischen $u(x)\,v(x)$ und $u(x_0)\,v(x_0)$ Folgendes einzufügen: $-u(x_0)\,v(x) + u(x_0)\,v(x)$.

305. $f(x) = \frac{1}{v(x)}$, $f'(x_0) = -\frac{v'(x_0)}{[v(x_0)]^2}$ — Beweis?
Anleitung: Der Differenzenquotient ist mit $v(x)\,v(x_0)$ zu erweitern.

306. Die Konstantenregel $y = a \cdot f(x) \Rightarrow y'(x) = a \cdot f'(x)$ ist mit Hilfe der Produktregel herzuleiten.

307. Die Quotientenregel ist mit Hilfe der in Aufgabe **304.** und **305.** bewiesenen Regeln herzuleiten.

308. Beweis der Potenzregel: $(x^n)' = nx^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$

Die rechte Spalte ist — entsprechend der Arbeitsanweisung und in Analogie zur linken Spalte — auf einem separaten Blatt zu vervollständigen:

$n = 3$:

$f(x) = x^3$

$f'(x) = ?$

$n \in \mathbb{N}^*$:

$f(x) = x^n$

$f'(x) = ?$

Wir bilden mittels Grenzübergangs die erste Ableitung an der Stelle x_0:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \text{———} = \ldots$$

Der Zähler lässt sich nun wie Folgt zerlegen:

$$x^3 - x_0^3 = (x - x_0)(x^2 + xx_0 - x_0^2)^{1)}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \underbrace{(x^2 + xx_0 + x_0^2)}_{3\,\text{Summanden}} =$$

$$= x_0^2 + x_0 \cdot x_0 + x_0^2 = 3x_0^2$$

$$x^n - x_0^n = (x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \ldots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1})^{1)}$$

$$\lim_{x \to x_0} \text{———} = \ldots$$

Diese Überlegung ist aber nicht auf die Stelle x_0 beschränkt. Wir können daher verallgemeinern und x_0 durch x ersetzen:

$f'(x) = 3x^2$

$f'(x) = \ldots$

309. Die Steigung der Tangente am Funktionsgraphen **a)** $y = x^2$ **b)** $y = x^{-4}$ **c)** $y = \frac{4}{\sqrt{x}}$ ist im Punkt **(1)** $P(1,\ y_0 > 0)$ **(2)** $Q(x_0 > 0{,}3)$ zu ermitteln. Wie lautet die Tangentengleichung in P bzw. Q?

310. Wo und unter welchem Winkel φ schneiden einander die Funktionsgraphen mit den folgenden Gleichungen:

a) $y = x^5$, $y = \sqrt{x}$ **b)** $y = x$, $y = \sqrt[3]{x}$ **c)** $y = x^2 + 8x + 6$, $y = 3x$ **d)** $y = 2x^2 - 4x + 5$, $y = 3x - 1$

---

[1]) Diese Formel geht auf **William George HORNER** (1786—1837) zurück. Man spricht von der **HORNERschen Zerlegungsregel**.

311. In welchen Punkten des Funktionsgraphen $y = x^5 - 3x^2 + 2x - 4$ verläuft die Tangente an den Graphen parallel zu der Geraden $y = 2x + 9$?

312. Eine Tangente an den Graphen mit der Funktionsgleichung **a)** $y = 3x^2 - 2x$ **b)** $y = x^3 + x^2 - 4$ schließt mit der x-Achse den Winkel **(1)** $\alpha = 30°$ **(2)** $\alpha = 45°$ ein. Die Koordinaten des Berührungspunkts P sind auf zwei Dezimalen genau anzugeben.

313. In welchen Punkten des Funktionsgraphen $y = \frac{3x^2 - 9}{5x - 4}$ liegt die Tangente an den Graphen parallel zu der Geraden, die durch die beiden Punkte **a)** $A\left(-1, -\frac{13}{6}\right)$ und $B(1, 1)$ **b)** $A\left(-6, -\frac{19}{3}\right)$ und $B(3, 3)$ verläuft?

314. Die quadratische Funktion mit der Gleichung $y = x^2 + bx + c$ hat die Nullstellen **a)** $N_1(3, 0)$ und $N_2(2, 0)$ **b)** $N_1(-3, 0)$ und $N_2(5, 0)$. Wie lauten die Gleichungen der Tangenten, die in N_1 und N_2 an die Kurve gelegt werden?
Anleitung: Satz von VIÈTA.

315. Durch die Punkte **a)** $A(-1, -5)$, $B(3, -9)$ und $C(5, 13)$ **b)** $A(-1, 7)$, $B(2, -8)$ und $C(3, 11)$ wird die quadratische Funktion mit der Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ gelegt. Wie lauten die Gleichungen der in den Nullstellen an die Funktion gelegten Tangenten t_1 und t_2? Welchen Winkel schließen t_1 und t_2 miteinander ein?
Anleitung: Zunächst sind die Koeffizienten a, b und c zu berechnen.

Vermischte Aufgaben

316. „Ist eine Funktion f an der Stelle x_0 nicht stetig, so ist sie an der Stelle x_0 nicht differenzierbar." Dieser Satz ist anhand von **a)** $y = \frac{x}{x-1}$ und $x_0 = 1$ **b)** $y = \frac{3}{x^2 - 4}$ und $x_0 = 2$ zu überprüfen.

Anleitung: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ldots$

317. Hat der Graph der Funktion f an der Stelle x_0 eine „Spitze", so ist der Anstieg in diesem Punkt nicht eindeutig festgelegt. Obgleich z. B. die Funktion $y = |x|$ stetig ist, ist sie an der Stelle x_0 nicht differenzierbar.

An welchen Stellen ist die Funktion **a)** $y = |x^2 - 1|$ **b)** $y = |x^2 + 2x - 5|$ nicht differenzierbar?

Allgemein gilt:

Nicht jede stetige Funktion ist differenzierbar. Jede differenzierbare Funktion ist stetig.

Bemerkung: Lässt sich der Funktionsgraph „in einem Zug zeichnen", so ist die Funktion stetig. Ecken oder Knicke können ohne weiteres auftreten. Stetige Funktionen **ohne** Ecken oder Knicke sind sogenannte **glatte Kurven**. Glatte Kurven sind differenzierbar!

$y = x^3$, $y' = 3x^2$. Differenziert man y' nochmals, so erhält man die **zweite Ableitung** von $y = x^3$. Sie wird mit y'' bezeichnet: $y'' = 6x$. Analog gibt es eine dritte, vierte, n-te Ableitung: $y''' = 6$, $y^{(4)} = 0$.

Ab der zweiten Ableitung spricht man von sogenannten **höheren Ableitungen**.[1)]

Differenziert man die Ableitungsfunktion f' einer Funktion f nochmals, so erhält man die zweite Ableitungsfunktion f'' (gesprochen: f zwei Strich).[2)] Bei n-maligem Differenzieren entsteht die n-te Ableitungsfunktion $f^{(n)}$ der Funktion f.

Man ermittle die zweite und dritte Ableitung der folgenden, durch ihre Funktionsgleichung gegebenen Funktionen:

318. a) $y = x^8$ **b)** $y = 3x^4 - 5x^2 + 1$ **c)** $y = x^{-\frac{1}{5}}$ **d)** $y = \frac{1}{3x^4}$

319. a) $y = \sqrt[9]{x}$ **b)** $y = (x^3 - 4)(x^5 - 3)$ **c)** $y = \frac{3}{x^8 - 1}$ **d)** $y = \frac{x - 1}{x^5 + 1}$

320. An welchen Stellen der Funktion mit der Gleichung **a)** $y = x^3 - 15x^2 + 4x + 3$ **b)** $y = x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 9x + 5$ ist $y'' = 0$?

Bei den folgenden Aufgaben ist die Funktionsgleichung einer Polynomfunktion dritten Grads zu bestimmen, wenn Folgendes bekannt ist:

321. $f(0) = -1$, $f'(1) = 2$, $f(2) = 5$, $f''(2) = 10$

322. $f(-2) = -2$, $f'(0) = 3$, $f''(-1) = -2$, $f''(1) = 10$

323. $f(-1) = -10$, $f(2) = 2$, $f'(1) = 2$, $f''\left(\frac{1}{2}\right) = -1$

324. $f(-3) = -4$, $f(2) = 6$, $f'(1) = 4$, $f''(-1) = -2$

325. An welcher Stelle x_1 des nebenstehend dargestellten Funktionsgraphen mit der Funktionsgleichung $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ist $y''' = 0$?

Bemerkung: Die Lösung ist **rechnerisch** zu ermitteln.

326. Man bestimme rechnerisch (rein formal) jene Schnittpunkte, welche die Funktion mit der Gleichung **a)** $y = x^3 + 2x^2 - 2x + 4$ **b)** $y = 2x^3 - 3x^2 + 8x - 55$ mit ihrer ersten Ableitung gemeinsam hat.

327. Eine wesentliche Voraussetzung für die Verkehrssicherheit ist eine gute Trassierung[3)]. Diese wird aber nicht allein durch das Gelände, sondern noch von einer Reihe anderer Faktoren bestimmt. Beispielsweise sollte durch die Linienführung der Straße ein ästhetisch befriedigender Eindruck entstehen und ein zügiges, ruckfreies Lenken der Fahrzeuge möglich sein. Letzteres bedeutet, dass der Lenkradwinkel keinen unstetigen Verlauf nehmen darf: Das Lenkrad muss stetig bewegt werden können, ohne dadurch das Fahrzeug in den Straßengraben zu manövrieren!

Der Grundriss einer ebenen Straße hat folgende Funktionsgleichung:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0 \\ -0{,}001x^3 + 0{,}15x^2 & \text{für} \quad 0 \leqslant x \leqslant 100 \\ 500 & \text{für} \quad x > 100 \end{cases}$$

a) Es sind $f'(x)$ und $f''(x)$ zu ermitteln und grafisch darzustellen.

b) Warum kann ein(e) Autofahrer(in) auf dieser Straße das Fahrzeug nicht zügig lenken?

[1)] Die grafische Deutung der höheren Ableitungen erfolgt im Abschnitt „5. Kurvendiskussion".

[2)] Notwendige Voraussetzung ist hierfür, dass f' eine differenzierbare Funktion ist.

[3)] Beim Entwerfen von Straßen, Eisenbahnen oder Schifffahrtskanälen nennt man das Festlegen der Linie (Trasse), nach welcher der Verkehrsweg anzulegen ist, **Trassierung**.

Die Größen m und v der Formel $E = \frac{mv^2}{2}$ sind **gleichzeitig** variabel. Man kann nun E′ bilden, indem man nur nach **einer Variablen differenziert** und die zweite konstant hält:

$$\frac{dE}{dm} = \frac{v^2}{2} \text{ bzw. } \frac{dE}{dv} = mv$$

Man spricht in diesem Zusammenhang von **partiellen Ableitungen**.

Analog ist bei den folgenden Aufgaben $\frac{dy}{da}$ zu bilden, d. h. a ist als **Variable** und x ist als **Konstante** zu betrachten:

328. a) $y = ax$ **b)** $y = 3ax^3$ **c)** $y = \sqrt[3]{ax}$ **d)** $y = \frac{1}{ax}$

329. a) $y = \frac{\sqrt{x}}{a}$ **b)** $y = \frac{x^2 - a^2}{a + x}$ **c)** $y = (x - a)^2$ **d)** $y = \frac{x^3 - a^3}{x^2 + 2a}$

330. An die Funktion mit der Gleichung $y = x^3 - 3x^2 + 4$ wird im Punkt P(1, y) die Tangente gelegt. Welchen (spitzen) Winkel schließt die Tangente mit der x-Achse ein?

331. Die Tangente t an die Kurve $y = \frac{1}{8}(x^3 + 3x^2 - 9x + 5)$ bildet mit der positiven x-Achse den Winkel $\alpha = 85{,}236°$ und berührt die Kurve in jenem Punkt A, in dem die zweite Ableitung der Funktion positiv ist. Tangentengleichung?

332. Text wie Aufgabe **331.** für $y = \frac{x^2 - 5x + 9}{x - 5}$ und $\alpha = 97{,}125°$.

333. Der Kesselwandferner im Ötztal/Tirol ist ein Gletscher, der sich mehrere Jahrzehnte stark zurückgezogen hat. In den letzten Jahren ist er wieder vorgestoßen, d. h. seine Länge hat zugenommen. Aus Trendberechnungen vergangener Beobachtungen haben Geophysiker und Meteorologen[1] folgende Formel hergeleitet, die die Länge des Kesselwandferners (in m) für den Zeitraum 1922—1986 angibt:

$$l(t) = 4500 + 0{,}45(1966 - t)^2$$

Hierbei ist t als Jahreszahl einzusetzen.

Bemerkung: Die gegebene Formel gilt nur für den bestimmten Gletscher, für den sie hergeleitet wurde. Umgekehrt lässt sich aus der Formel nicht erkennen, für welchen Gletscher sie gültig ist.

a) Welche Länge hatte der Gletscher in den Jahren 1936, 1956, 1966 und 1976?

b) Wie groß war die durchschnittliche absolute Längenänderung pro Jahr, wenn der Zeitraum 1922—1986 herangezogen wird?

c) Wann hatte der Kesselwandferner seine minimale Ausdehnung?

Kesselwandferner und Brandenburger Haus (3277 m):

Der schwarze Graph beschreibt den empirischen Gletscherverlauf. Es wäre sehr schwierig, eine entsprechende Funktionsgleichung für diese Kurve anzugeben. Aus diesem Grund hatte man sich zu einer Vereinfachung entschlossen: $l(t) = 4500 + 0{,}45(1966 - t)^2$. Der Graph dieser Funktionsgleichung ist rot eingezeichnet. Das Ausmaß der vereinfachten Modellbildung ist durch die obige Figur gut abschätzbar.

[1] M. KUHN, Universität Innsbruck.

334. Der nebenstehende KURIER-Bericht ist ein Beispiel für einen verhältnismäßig glimpflich verlaufenen Verkehrsunfall, wenn man bedenkt, dass die erwähnten Personen

> **Ebenfalls frontal prallten Dienstag nachmittag die Pkw des Wiener Gerhard Steiner, 22, und der 20jährigen Maria Nußbaumer aus Perschling bei Kapelln, Bezirk St. Pölten, zusammen. Beide Lenker wurden schwer verletzt. Steiner mußte man beide Kniescheiben entfernen – er wird nie wieder gehen können.**

— mit einer Geschwindigkeit von 80 km/h unterwegs waren,

— keinen Sicherheitsgurt angelegt hatten,

— in einen Frontalzusammenstoß verwickelt waren und

— heute sehr wohl gesund sind. (Gerhard Steiner kann nicht nur wieder gehen, sondern sogar zahlreiche Sportarten — wie z. B. Gerätetauchen und Fallschirmspringen — ohne Schwierigkeiten ausüben.)

Unter diesen Gegebenheiten wäre die **letzte** Sekunde vor dem Aufprall — laut einer 1983 in den „Sozialpolitischen Informationen" veröffentlichten Studie — „normalerweise" wie folgt verlaufen:

***1,0 Sekunden**: Die Bremsen haben blockiert — Sie wissen, ein Frontal-Aufprall ist nicht mehr zu vermeiden.*

***0,9 Sekunden**: Erstarrt vor Schreck, umklammern Sie das Lenkrad.*

***0,8 Sekunden**: Noch knappe 30 cm bis zum Hindernis.*

***0,7 Sekunden**: Die vordere Stoßstange und der Kühlergrill werden zermalmt.*

***0,6 Sekunden**: Mit 80 km/h rast Ihr Körper, der nun mehr als drei Tonnen wiegt, nach vorn, Sie werden mit 20facher Schwerkraft aus dem Sitz gehoben, ihre Beine brechen am Kniegelenk.*

***0,5 Sekunden**: Die gebrochenen Kniegelenke werden gegen das Armaturenbrett gepreßt. Umhüllung und Stahlfassung des Lenkrads biegen sich unter Ihren Händen.*

***0,4 Sekunden**: 60 Zentimeter des Autobugs sind total deformiert, Ihr Körper rast weiter mit 80 km/h: Der Motor, nun fast eine halbe Tonne schwer, stößt in das Hindernis.*

***0,3 Sekunden**: Ihre Hände, in Todesangst verkrallt, biegen das Lenkrad fast vertikal, die Gelenke und Unterarme brechen. Durch die andauernde Schwerkraft werden Sie von den Lenksäule durchbohrt, Stahlsplitter dringen in den Brustkorb, reißen Löcher in die Lunge und zerfetzen die inneren Arterien. Blut dringt in die Lungenflügel.*

***0,2 Sekunden**: Ihre Füße werden aus den Schuhen gerissen, das Bremspedal bricht ab, das Fahrzeuggestell knickt in der Mitte ein. Bolzen lösen sich, Schrauben reißen ab. Ihr Kopf kracht gegen die Windschutzscheibe — Sie haben nicht einmal mehr Zeit zu schreien.*

***0,1 Sekunden**: Ihr Wagen ist zerquetscht, und Sie auch. Blut schießt aus Ihrem Mund, Ihr Herz bleibt stehen.*

***0,0 Sekunden**: Nun wissen Sie, ob es ein Leben nach dem Tod gibt oder nicht.*

Um sich die zerstörenden Kräfte, die bei Autounfällen auftreten, besser zu veranschaulichen, ist Folgendes zu berechnen:

Aus welcher Höhe müsste ein Pkw senkrecht herabfallen, um jene Kräfte freizusetzen, die einem Frontalaufprall des Pkw mit **a)** $80\,\frac{km}{h}$ **b)** $130\,\frac{km}{h}$ **c)** $200\,\frac{km}{h}$[1] entsprechen?

Anleitung: Die Geschwindigkeit ist in $\frac{m}{s}$ umzurechnen. Anschließend ist das Fallgesetz $s(t) = \frac{g}{2}t^2$ mit $g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$ und die Tatsache heranzuziehen, dass die Geschwindigkeit die erste Ableitung des Wegs nach der Zeit ist.

---

[1]) Diese Geschwindigkeit ist — auch mit Sicherheitsgurt — nicht zu überleben. *„Einen Aufprall mit 200 $\frac{km}{h}$ oder mehr"*, so Deutschlands Unfallforscher Max DANNER, *„kann das menschliche Gehirn nicht aushalten. Die Gehirnmasse wird dabei um das 80- bis 100-fache der Erdbeschleunigung verzögert, die Folge ist das Reißen von Blutbahnen."*

335. a) In der folgenden Figur wird der Kraftstoffverbrauch im 1. bis 5. Gang des „OPEL OMEGA“ veranschaulicht.

(1) Bei welcher Geschwindigkeit wird im 1. Gang am wenigsten Treibstoff verbraucht? Welche Geschwindigkeit ist in dieser Hinsicht für der 2. Gang „optimal“?

(2) Warum sind die in **(1)** gestellten Fragen für den 5. Gang ohne praktische Bedeutung?

(3) Angenommem wir fahren im 5. Gang. Ist dann eine Geschwindigkeitserhöhung von 90 km/h auf 100 km/h mit einem größeren Treibstoffmehrverbrauch verbunden als eine Geschwindigkeitserhöhung von 180 km/h auf 190 km/h?

(4) Betrachten wir die Tangentensteigung bei einer Geschwindigkeit von 30 km/h. In welchem Gang ist sie am größten? Wie kann sie interpretiert werden?

b) Die nachstehende Figur ermöglicht einen Vergleich zwischen Antriebskraft F und Fahrwiderstand R des „OPEL OMEGA“.

(1) Bei welcher Geschwindigkeit halten F und R einander das Gleichgewicht? Warum kann das Fahrzeug diese Geschwindigkeit nicht überschreiten?

(2) Wann ist die Antriebskraft am größten? Warum sinkt die Antriebskraft wieder im oberen Geschwindigkeitsbereich?

(3) Die Differenz zwischen F und R ist für die Beschleunigung des Fahrzeugs verantwortlich. Bei welcher Geschwindigkeit ist $F(v) - R(v)$ am größten?

Warum sind an dieser Stelle die Tangenten an den Kurven $F(v)$ und $R(v)$ parallel?

THINK ThInk THINK THINK THINK ThInk THINK

336. Aus dem Tagebuch einer Schülerin:

Wir haben heute im Mathematikunterricht über die Ableitung einer Funktion gelernt. Ich verstehe das überhaupt nicht, es ist auch schrecklich langweilig. Vor allem ist es widersprüchlich. Denn f an der Stelle x hat einen konstanten Wert. Im Lehrbuch habe ich gelesen, daß "die Ableitung einer Konstanten gleich null ist". Daraus habe ich, liebes Tagebuch, den Schluß gezogen, daß die Ableitung jeder Funktion an jeder Stelle gleich null ist. Aber wie ich das meinem Freund, dem Theo gesagt habe, hat er gemeint, daß das nicht stimmen kann.
Mit dem Theo ist das überhaupt so eine Sache: letztens fragt ihn

Was ist von der obigen Feststellung zu halten?

3. Kettenregel

$y_1 = (4x^2 - 5)^3,\ y_1' = ?$

Wir können y_1' berechnen, indem wir $(4x^2 - 5)^3$ in eine „Summe verwandeln" oder die Produktregel anwenden.

Bei $y_2 = (3x^2 - 1)^9$ ist dieses Verfahren schon wesentlich umständlicher, bei $y_3 = \sqrt[3]{x^5 - 9x^2 + 3}$ versagt es vollkommen.

Die Funktionen mit den Gleichungen $y_1 = (4x^2 - 5)^3$, $y_2 = (3x^2 - 1)^9$ und $y_3 = \sqrt[3]{x^5 - 9x^2 + 3}$ können alle als „Funktion einer Funktion" aufgefasst werden:

$y_1 = u_1^3$ mit $u_1 = 4x^2 - 5$

$y_2 = u_2^9$ mit $u_2 = 3x^2 - 1$

$y_3 = \sqrt[3]{u_3}$ mit $u_3 = x^5 - 9x^2 + 3$

Um derartige zusammengesetzte Funktionen zu differenzieren, verwendet man die sogenannte **Kettenregel**:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

... daß dieser Wurm an Würmern litt, die wiederum an Würmern litten ...
(Joachim RINGELNATZ)

Die obige Formel unterscheidet sich deutlich von den bisher besprochenen Regeln.

Ihre Anwendung soll anhand von $y = (4x^2 - 5)^3$ demonstriert werden.
Wir unterscheiden hierbei die

— „äußere" Funktion $y = u^3$ und die

— „innere" Funktion $u = 4x^2 - 5$

$$\Rightarrow \frac{dy}{du} = 3u^2 \text{ bzw. } \frac{du}{dx} = 8x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \overbrace{3u^2}^{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{8x}_{\text{innere Ableitung}} = 3(4x^2 - 5)^2 \cdot 8x = 24x(4x^2 - 5)^2$$

$[(4x^2 - 5)^3]' = \mathbf{24x(4x^2 - 5)^2}$

Die Kettenregel ist jenes Gesetz, das am schwierigsten zu durchschauen ist. Nur durch sehr viel Übung vermeidet man Unsicherheiten.

In der — auf der nächsten Seite — folgenden Tabelle sind einige Beispiele angeführt, um den Umgang mit der Kettenregel zu erlernen. Aus Gründen der Übersicht wurde die innere Ableitung jeweils rosa unterlegt.

Funktionsgleichung	erste Ableitung
$y=(4-8x)^9$	$y'=9(4-8x)^8\cdot(-8)=-72(4-8x)^8$
$y=(x^2-7x+6)^3$	$y'=3(x^2-7x+6)^2(2x-7)$
$y=(x^9-1)^{-2}$	$y'=-2(x^9-1)^{-3}\cdot 9x^8=\frac{-18x^8}{(x^9-1)^3}$
$y=\frac{1}{(x^3-3x^2+2)^4}=(x^3-3x^2+2)^{-4}$	$y'=-4(x^3-3x^2+2)^{-5}(3x^2-6x)=-\frac{4(3x^2-6x)}{(x^3-3x^2+2)^5}$
$y=\sqrt[4]{x-1}=(x-1)^{\frac{1}{4}}$	$y'=\frac{1}{4}(x-1)^{-\frac{3}{4}}\cdot 1=\frac{1}{4\sqrt[4]{(x-1)^3}}$
$y=\sqrt[3]{x^2+7}=(x^2+7)^{\frac{1}{3}}$	$y'=\frac{1}{3}(x^2+7)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2x=\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+7)^2}}$
$y=\frac{5}{\sqrt[6]{x^3+1}}=5(x^3+1)^{-\frac{1}{6}}$	$y'=5\left(-\frac{1}{6}\right)(x^3+1)^{-\frac{7}{6}}\cdot 3x^2=\frac{-5x^2}{2\sqrt[6]{(x^3+1)^7}}$
$y=\frac{13}{\sqrt[5]{5x^3-2x^2+5}}=13(5x^3-2x^2+5)^{-\frac{1}{5}}$	$y'=13\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)(5x^3-2x^2+5)^{-\frac{6}{5}}\cdot(15x^2-4x)=-\frac{13(15x^2-4x)}{5\sqrt[5]{(5x^3-2x^2+5)^6}}$

Bemerkung: Angenommen, wir wollen den Zahlenwert einer zusammengesetzten Funktion berechnen. Wir setzen also eine Zahl ein — und die Reihenfolge der Rechenoperationen verrät uns Folgendes:

Die zuerst zu befolgende Rechenoperation ist die der inneren Funktion. Die zuletzt zu befolgende Rechenvorschrift ist die der äußeren Funktion.

Beispiel:

Die Funktion mit der Gleichung $y=\sqrt{f(x)},\ f(x)\geqslant 0$ ist zu differenzieren.

Lösung:

$$y=\sqrt{f(x)}=[f(x)]^{\frac{1}{2}}$$

$$y'=\underbrace{\frac{1}{2}[f(x)]^{-\frac{1}{2}}}_{\text{äußere Ableitung}}\cdot\underbrace{f'(x)}_{\text{innere Ableitung}}=\frac{f'(x)}{2[f(x)]^{\frac{1}{2}}}=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

Beispiel:

Man berechne $[(2x+1)^4\sqrt[3]{1-x}\,]'$.

Lösung:

Wir wenden die Produktregel an. u′ und v′ sind jeweils nach der Kettenregel zu bestimmen:

$$[\underbrace{(2x+1)^4}_{u}\underbrace{\sqrt[3]{1-x}}_{v}\,]'=\underbrace{4(2x+1)^3\cdot 2}_{u'}\underbrace{\sqrt[3]{1-x}}_{v}+\underbrace{(2x+1)^4}_{u}\cdot\underbrace{\frac{1}{3}(1-x)^{-\frac{2}{3}}\cdot(-1)}_{v'}=$$

$$=8(2x+1)^3\sqrt[3]{1-x}-\frac{(2x+1)^4}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}=\ldots=\frac{(2x+1)^3(23-26x)}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}$$

AUFGABEN

Es ist jeweils die erste Ableitung der durch ihre Funktionsgleichung gegebenen Funktion zu bilden:

337. a) $y=(x^3-4)^8$ **b)** $y=(4-x^3)^5$ **c)** $y=(x^2-3x+1)^9$

338. a) $y=\left(x-\frac{3}{x}\right)^2$ **b)** $y=\left(x^5-\frac{1}{x^2}\right)^4$ **c)** $y=\left(3x-\frac{2}{x^3}\right)^8$

339. a) $y=(\sqrt{x}-3)^2$ **b)** $y=\left(\sqrt[3]{x}+3x\right)^2$ **c)** $y=\left(\sqrt[5]{3x^3}-7x+2\right)^3$

340. a) $y=\sqrt{x-1}$ **b)** $y=\sqrt{(3-x^2)^5}$ **c)** $y=\sqrt{(x^2-7x+9)^7}$

341. a) $y=\sqrt[3]{5-x^2}$ **b)** $y=\sqrt[4]{(9x^2-1)^3}$ **c)** $y=\sqrt[5]{(3x^2-x+1)^2}$

342. a) $y=\left(\frac{x^5-1}{x+3}\right)^3$ **b)** $y=\left(\frac{x^4-3x^2}{x}\right)^8$ **c)** $y=\left(\frac{3x^2-7x+9}{3x+5}\right)^9$

343. a) $y=\sqrt{\frac{3+4x}{3-4x}}$ **b)** $y=\sqrt[3]{\frac{x+7}{7-x}}$ **c)** $y=\sqrt[4]{\frac{3+2x}{2x-9}}$

344. a) $y=\frac{\sqrt{x^2+5}}{2x-13}$ **b)** $y=\frac{\sqrt[3]{2x^2+3}}{4x-1}$ **c)** $y=\frac{\sqrt[5]{(x^2+3)^3}}{\sqrt{x+1}}$

345. a) $y=(x+1)\sqrt{x-3}$ **b)** $y=(x^2-9)\sqrt[3]{(x^2-4)^2}$ **c)** $y=(5x-2)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

346. a) $y=\frac{x}{x-\sqrt{9+x^2}}$ **b)** $y=\frac{x+\sqrt{7+x^2}}{x-\sqrt{7-x^2}}$ **c)** $y=\sqrt{\frac{x+\sqrt{1+x}}{x-\sqrt{x-1}}}$

Bei den nachstehenden Aufgaben ist jeweils $f'(x_0)$ zu berechnen:

347. a) $y=(x^5-1)^3,\ x_0=1$ **b)** $y=(3-x^2)^6,\ x_0=-2$

348. a) $y=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3,\ x_0=3$ **b)** $y=\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^3,\ x_0=-1$

349. a) $y=(\sqrt{x}-2)^5,\ x_0=4$ **b)** $y=\left(\sqrt[3]{x}-4\right)^3,\ x_0=27$

350. a) $y=\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)^4,\ x_0=1$ **b)** $y=\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}\right)^5,\ x_0=1$

351. a) $y=\sqrt{x+1},\ x_0=3$ **b)** $y=\sqrt[3]{(3-x^2)^2},\ x_0=\sqrt{2}$

352. a) $y=\sqrt{x^2+x-1},\ x_0=-2$ **b)** $y=\sqrt[3]{(x^2-x-1)^2},\ x_0=2$

353. a) $y=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2,\ x_0=\frac{3}{2}$ **b)** $y=\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^3,\ x_0=\frac{-5}{2}$

354. a) $y=\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}},\ x_0=\frac{1}{4}$ **b)** $y=\sqrt[3]{\frac{3x-1}{3x+1}},\ x_0=\frac{2}{3}$

355. a) $y=(x-1)\sqrt{x+1},\ x_0=3$ **b)** $y=(x^2-2)\sqrt[3]{(x^2+2)^2},\ x_0=\sqrt{62}$

356. a) $y=\frac{\sqrt{x-2}}{x+2},\ x_0=6$ **b)** $y=\frac{\sqrt[3]{x+3}}{x-3},\ x_0=-2$

357. a) $y=\frac{x}{x+\sqrt{5-x^2}},\ x_0=2$ **b)** $y=\frac{x-\sqrt{2-x^2}}{x+\sqrt{2+x^2}},\ x_0=-1$

358. $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$ **a)** In welcher Hinsicht ist u eine **unabhängige** und in welcher Hinsicht ist u eine **abhängige** Variable? **b)** Bezeichnet man $\frac{dy}{du}$ als **äußere** oder **innere** Ableitung? $\frac{dy}{du}=?$ **c)** Wie lautet die Kettenregel für **drei** miteinander verkettete Funktionen: $y=y(u(v(x))),\ \frac{dy}{dx}=?$

Bei den folgenden Aufgaben sind die jeweils gesuchten Ableitungen zu bestimmen:

359. a) $P = 3z^2 - 4z \quad \frac{dP}{dz} = ?$ **b)** $s = \pi z^3 + \frac{6}{z} \quad \frac{ds}{dz} = ?$

360. a) $K = 5z - \frac{8}{z^2} \quad \frac{dK}{dz} = ?$ **b)** $Q = 36 - 12y \quad \frac{dQ}{dy} = ?$

361. a) $d\overline{P} = z(10 - z) \quad \frac{d\overline{P}}{dz} = ?$ **b)** $A = s(a - s) \quad \frac{dA}{ds} = ?$

362. a) $Q = s(3a - s) \quad \frac{dQ}{ds} = ?$ **b)** $V = (\ell - 2x)(\ell - 8x)x \quad \frac{dV}{d\ell} = ?$

363. a) $S = \frac{f + a}{f} \quad \frac{dS}{df} = ?$ **b)** $S = \frac{f + g}{g \cdot f} \quad \frac{dS}{dg} = ?$

364. a) $M = \frac{g - q}{g + q} \quad \frac{dM}{dq} = ?$ **b)** $T = \frac{3f - 2g}{4g - 7f} \quad \frac{dT}{df} = ?$

365. a) $Q = y^2 + (6 - y)^2 \quad \frac{dQ}{dy} = ?$ **b)** $L = (4 - v)^2 + v^3 \quad \frac{dL}{dv} = ?$

366. a) $R = (A - 2b)^2 (4 - b) \quad \frac{dR}{db} = ?$ **b)** $Z = (x - q)(3x - 5q)^2 \quad \frac{dZ}{dq} = ?$

367. a) $V = \sqrt{4r^2 - s} \quad \frac{dV}{dr} = ?$ **b)** $U = x + \sqrt{4r^2 - x^2} \quad \frac{dU}{dx} = ?$

368. a) $U = \sqrt{pq} + \sqrt{p - q} \quad \frac{dU}{dq} = ?$ **b)** $A = \sqrt{x^3 - 5x} - \sqrt{rx} \quad \frac{dA}{dx} = ?$

369. a) $G = \ell\sqrt{7s^2 - \ell^2} \quad \frac{dG}{d\ell} = ?$ **b)** $F = \sqrt{2hr - h^2} \cdot h \quad \frac{dF}{dh} = ?$

370. a) $\overline{A} = \sqrt[3]{s(s - a)(s - b)} \quad \frac{d\overline{A}}{ds} = ?$ **b)** $\overline{H} = \sqrt[4]{s(s - a)(s - b)(s - c)} \quad \frac{d\overline{H}}{ds} = ?$

371. a) $F = \sqrt{y^2 - o}\,(y + o^2) \quad \frac{dF}{do} = ?$ **b)** $H = (K + b^2)\sqrt{K - b} \quad \frac{dH}{db} = ?$

372. a) $B = \left(\frac{U}{2} - a\right)\sqrt{2a - \frac{U}{2}} \quad \frac{dB}{dU} = ?$ **b)** $Z = \sqrt{c^3 - m^2}\,(m - \sqrt{c}) \quad \frac{dZ}{dc} = ?$

373. a) $R = \frac{3u^2 - 7w^2}{\sqrt{w^4 - u}} \quad \frac{dR}{dw} = ?$ **b)** $Q = \frac{\sqrt{\ell^2 - h^2}}{\ell + h} \quad \frac{dQ}{dh} = ?$

374. a) $N = \sqrt{\frac{3q - m}{m^2 - q}} \quad \frac{dN}{dm} = ?$ **b)** $L = \sqrt{\frac{s^2 + t - A}{A^2 + t^2 - s}} \quad \frac{dL}{dA} = ?$

THINK ThInk THINK THINK THINK ThInk THINK

375. Aus dem Hausübungsheft einer Schülerin:

$$M = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$$

$$M' = \pi\left(\sqrt{r^2 + h^2} + \frac{r(2r + 2h)}{2\sqrt{r^2 + h^2}}\right)$$

Welcher Fehler wurde begangen?

4. NEWTONsches Näherungsverfahren

Bisher haben wir numerische Verfahren zur Lösung von Gleichungen kennen gelernt. Jetzt zeigen wir ein weiteres numerisches Verfahren, bei dem die Differenzialrechnung angewendet wird.

Beispiel:

Die Gleichung $0{,}1x^3 - 0{,}3x^2 + 0{,}5x - 0{,}7 = 0$ ist mit Hilfe des NEWTONschen Näherungsverfahrens zu lösen. Das Ergebnis ist auf 3 Dezimalstellen genau anzugeben.

Lösung:

(1) Zunächst wird die Gleichung in eine Funktion „umgewandelt“, die erste Ableitung gebildet und eine Wertetabelle aufgestellt.

$$y = 0{,}1x^3 - 0{,}3x^2 + 0{,}5x - 0{,}7$$

$$y' = 0{,}3x^2 - 0{,}6x + 0{,}5$$

x	−2	−1	0	1	2	3
y	−3,7	−1,6	−0,7	−0,4	−0,1	0,8

(2) Wir bestimmen zwei x-Werte, bei denen die Funktionswerte verschiedene Vorzeichen haben:

$$\left.\begin{array}{l} f(2) = -0{,}1 \\ f(3) = 0{,}8 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ Eine Nullstelle muss zwischen den beiden Werten $x = 2$ bzw. $x = 3$ liegen!

Die Lösung liegt im Intervall [2,3]. Innerhalb dieses Intervalls bestimmen wir einen Ausgangswert, z. B. $x = 2{,}5$.

Bemerkung: Man könnte z. B. auch 2,3 oder 2,6 wählen, der Wert x_0 muss allerdings im Intervall [2, 3] liegen.

(3) Im Hinblick auf die nebenstehende Formel berechnen wir die einzelnen Werte in der folgenden Tabelle:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	2,5	0,2375	0,875	2,229
1	2,229	$31{,}15 \cdot 10^{-3}$	0,6528	2,181
2	2,181	$0{,}828 \cdot 10^{-3}$	0,6183	2,1795
3	2,1795	$0{,}636 \cdot 10^{-6}$	0,6174	2,1795

(4) Bei $n = 3$ stimmen die Ergebnisse der letzten zwei verbesserten Werte auf 4 Dezimalstellen überein: $x_2 = x_3 = 2{,}1795$. Die Verbesserung der Näherungslösung ist damit im Bereich der verlangten Genauigkeit beendet. Wir runden auf 3 Dezimalstellen! Die Lösung x der Gleichung $0{,}1x^3 - 0{,}3x^2 + 0{,}5x - 0{,}7 = 0$ können wir mit $\bar{x} = \mathbf{2{,}180}$ angeben.

Bemerkung: Um allgemein das Ergebnis auf $n\,(n \in \mathbb{N}^*)$ Dezimalstellen genau anzugeben, ist so lange zu rechnen, bis sich die $(n+1)$-te Dezimalstelle nicht mehr ändert. Dann ist auf n Dezimalstellen zu runden.

Isaac NEWTON (1643—1727) entwickelte das nach ihm benannte Näherungsverfahren zur Lösung von Gleichungen.

„1799 hatte der junge Carl Friedrich Gauß in seiner Dissertation ... den 1746 von d'Alembert aufgestellen sogenannten ‚Fundamentalsatz der Algebra' bewiesen. Er lautet: Jede Gleichung n-ten Grades hat genau n Wurzeln, nicht mehr und nicht weniger, Das mag uns nicht überraschen, wenn wir daran denken, daß sich bei der quadratischen Gleichung zwei Lösungen ergaben. Sie waren allerdings nicht immer mit reellen Wurzeln angebbar. Auch für die kubische Gleichung lernten wir bisher höchstens eine reelle Lösung kennen. Tatsächlich meint der ‚Fundamentalsatz', daß unter den n Wurzeln auch ‚komplexe Zahlen', ... sein können." [2]

(5) $\bar{x}$ muss keineswegs die einzige reelle Lösung sein. Die Gleichung $0{,}1x^3 - 0{,}3x^2 + 0{,}5x - 0{,}7 = 0$ hat genau **drei** Lösungen — vgl. den in der Außenspalte erwähnten **„Fundamentalsatz der Algebra"**.[1]

Vielleicht sind die zwei anderen Lösungen komplex. Um dies herauszufinden dividieren wir die Gleichung durch den Linearfaktor $(x - 2{,}180)$ und lösen anschließend die quadratische Gleichung:

$$(0{,}1x^3 - 0{,}3x^2 + 0{,}5x - 0{,}7) : (x - 2{,}180) = 0{,}1x^2 - 0{,}082x + 0{,}321$$

$$\begin{array}{l} -(0{,}1x^3 - 0{,}218x^2) \\ \hline \quad -0{,}082x^2 + 0{,}5x \\ \quad -(-0{,}082x^2 + 0{,}179x) \\ \hline \qquad 0{,}321x - 0{,}7 \\ \qquad -(0{,}321x - 0{,}69978 \\ \hline \qquad\quad -0{,}22 \cdot 10^{-3} \text{ Rest} \end{array}$$

Wenn wir nun für $0{,}1x^2 - 0{,}082x + {}+ 0{,}321 = 0$ die Lösungsformel der quadratischen Gleichung verwenden, zeigt sich: Die Lösungen dieser Gleichung sind komplex.

$\Rightarrow \bar{x} = 2{,}180$ ist die einzige reelle Lösung der Gleichung $0{,}1x^3 - 0{,}3x^2 + 0{,}5x - 0{,}7 = 0$.

Beherrscht man die 4 Grundrechnungsarten und kann man eine Funktion differenzieren, so bietet das NEWTONsche Näherungsverfahren wenig Schwierigkeiten.

Die sukzessive Durchführung der Punkte (1) bis (5) ist ja nun wirklich keine Hexerei. Mathematik ist freilich mehr als nur die **mechanische** Ausführung von Regeln und Gesetzen. Wer die Theorie versteht, die hinter der Methode „steckt", kann die folgenden Fragen beantworten:

— „Funktioniert" das NEWTONsche Näherungsverfahren immer? Was mache ich, wenn die Näherungswerte nicht konvergieren, sondern stark voneinander abweichen?

— Angenommen, $f'(x) = 0$. Kann das überhaupt passieren? Und wenn ja, was kann ich unter diesen Umständen machen, um dennoch zu einer Lösung zu kommen?

— Kann der Fall eintreten, dass ich beim Einsetzen in $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ für den Bruch $\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ erhalte? Ist es sinnvoll, unter diesen Umständen weiter zu rechnen?

Vielleicht erscheinen die obigen Fragen wie akademische Probleme, die ohne jede praktische Bedeutung sind. Dem ist dagegenzuhalten, dass die Vermittlung mathematischer Ideen und Gedankengänge ein wesentlich wichtigeres Lehrziel darstellt als der Automatismus der „Beispiel-Durchrechnung". Ja, noch mehr: Jeder, der mathematische Zusammenhänge versteht, kann unsere Welt besser begreifen. Mathematik ist einer der wenigen Unterrichtsgegenstände, in dem Argumentation und folgerichtiges Denken gelehrt werden kann.

Unter diesem Aspekt ist der folgende Übungsteil aufgebaut: Die ersten 14 Aufgaben dienen dazu, mit der technischen Abwicklung des NEWTONschen Näherungsverfahrens vertraut zu werden. Damit ist das Rüstzeug gegeben, um sich anhand der schon weiter oben erwähnten Aufgaben den theoretischen Hintergrund, gleichsam die „Theorie hinter der Methode", zu erarbeiten.

---

[1]) Mehr über den Fundamentalsatz der Algebra vgl. Seite 40.

[2]) Aus „ KARLSON, Zauber der Zahlen" (Ullstein Verlag).

AUFGABEN

Bei den folgenden Aufgaben ist die Lösungsmenge in $\mathbb{R}$ auf 3 Dezimalstellen genau zu ermitteln. Wenn ein Wert für x_0 gegeben ist, soll dieser als Ausgangswert für das NEWTONsche Näherungsverfahren herangezogen werden!

376. a) $x^3 - 3x - 2 = 0,\ x_0 = 3$ **b)** $x^3 - 3x + 1 = 0,\ x_0 = 0{,}5$

377. a) $x^3 + 9x^2 - 94x - 336 = 0,\ x_0 = 0$ **b)** $x^3 - 3x^2 - 4x + 7 = 0,\ x_0 = -1{,}5$

378. a) $x^3 + 2x^2 - 6x + 3 = 0,\ x_0 = -4$ **b)** $-2x^3 + 4{,}2x^2 - 0{,}06x - 1{,}33 = 0,\ x_0 = 1$

379. a) $\frac{x^3}{9} - \frac{4x}{3} + \frac{11}{9} = 0,\ x_0 = 0$ **b)**[1] $x^3 + 6x^2 + 9x + 4 = 0,\ x_0 = 0$

380. a) $x^3 - 4x^2 + 6x - 4 = 0$ **b)** $x^3 + 18x^2 + 141x + 488 = 0$

381. a) $5x^3 + 36x^2 - 169x + 616 = 0$ **b)** $-2x^3 + 5{,}6x^2 - 24{,}44x - 50{,}68 = 0$

382. a) $-\sqrt{3}x^3 + \sqrt{6}x^2 - 2\sqrt{24} = 0$ **b)** $x^3 - (2 + \sqrt{3})x^2 + (4 + 2\sqrt{3})x - 4\sqrt{3} = 0$

383. a) $x^3 + 1{,}277x^2 + 11{,}035x - 137{,}3 = 0$ **b)** $-0{,}1x^3 + 5{,}061x^2 - 73x + 202{,}11 = 0$

Bei den folgenden Aufgaben ist zu zeigen, dass die Funktion im gegebenen Intervall einen Zeichenwechsel durchmacht. Anschließend ist die im Intervall liegende Nullstelle von f (x) zu berechnen.

384. a) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x - 15,\ [-10,\ 2]$ **b)** $f(x) = -4x^4 - 10x^3 + 5x^2 + 9,\ [-7,\ 1[$

385. a) $f(x) = 8x^4 - 34x^3 + 49x^2 - 29x + 6,\ ]0{,}5,\ 1[$ **b)** $f(x) = 0{,}75x^4 + 2x^3 - 13{,}5x^2 - 54x + 5,\ [1,\ 5]$

386. $f(x) = x^5 - 5x^4 - 24x^3 + 120x^2 - 25x + 125,\ [-5{,}5,\ -4]$

387. $f(x) = 2x^6 - 5x^5 - 74x^4 + 190x^3 - 74x^2 - 5x + 1,\ [1{,}2\ \ 2{,}1]$

388. $f(x) = -0{,}001x^5 + 0{,}01x^4 + 0{,}02x^3 - 0{,}15x^2 - x + 1,\ [2,\ 9]$

389. $f(x) = -\frac{x^7}{10} + \frac{21x^5}{5} - 84x^3 + 504x,\ [-5,\ 0[$

390. Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $y = f(x)$:
Um die Nullstelle x der Funktion zu bestimmen, legen wir im Punkt P — vgl. die nebenstehende Figur — die Tangente t_0 an den Graphen von f.

a) Die Koordinaten des Punktes P sind anzugeben.
b) Wie lautet die Gleichung von t_0?
c) An welcher Stelle x_1 schneidet t_0 die x-Achse?
d) Man ermittle die Gleichung der Tangente t_1 im Punkt x_1.
e) Die Nullstelle x_2 der Tangente t_1 ist zu bestimmen.

391. Im Hinblick auf Aufgabe **390.** ist die Formel für das NEWTONsche Näherungsverfahren herzuleiten:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

392. Die nachstehenden Funktionsgleichungen haben Folgendes gemeinsam: Der für x_0 gegebene Wert ist bereits eine Nullstelle der Funktion. Was geschieht, wenn man das NEWTONsche Näherungsverfahren mit x_0 als Ausgangswert anwendet?

a) $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 2,\ x_0 = 1$ **b)** $y = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 2,\ x_0 = 1$

[1]) Für die Lösung sind mehr Schritte nötig als sonst.

393. Wer die Gleichung $x^3 - 3x^2 + x + 3 = 0$ mit Hilfe des NEWTONschen Näherungsverfahrens lösen möchte und den Ausgangswert $x_0 = 2{,}1$ wählt, erhält überraschende Ergebnisse: $x_1 = 1{,}406$, $x_2 = 2{,}24$, $x_3 = 1{,}69$, $x_4 = 3{,}39$.

a) Die gegebenen Näherungswerte x_1 bis x_4 sind zu überpüfen — wie lautet x_5?

b) Es ist zu begründen, warum die Näherungswerte nicht konvergieren.

Anleitung: Der Funktionsgraph von $y = x^3 - 3x^2 + x + 3$ ist in einem Koordinatensystem darzustellen.

394. Lässt sich für $f(x) = \frac{x^4}{128} - \frac{5x^3}{48} + \frac{x^2}{8} + 2x - 2$ das NEWTONsche Näherungsverfahren anwenden, wenn wir als Startwert $x_0 = 4$ wählen?

395. Die Firma PACKFIX ist auf die Herstellung von Verpackungsmaterial spezialisiert. In das Produktionsprogramm soll ein würfelförmiger Karton mit dem Volumen $V = 8$ Liter aufgenommen werden. Mit welcher Ungenauigkeit p_x darf die Würfelkante x maximal behaftet sein, damit V um nicht mehr als $p_v = 3\,\%$ schwankt?

Anleitung: $p_v = \frac{dV}{V} \cdot 100\,\%$, $p_x = \frac{dx}{x} \cdot 100\,\%$, $\frac{p_v}{p_x} = \ldots$

Die sogenannte **Fehlerrechnung** ist ein Teilgebiet der Mathematik, das sich mit der **Genauigkeit** von Resultaten und Zahlenangaben beschäftigt. Es geht also **nicht** — wie man vielleicht glauben könnte — um Rechenfehler, die auf Schlamperei oder falsche mathematische Überlegungen beruhen. Die nebenstehenden Aufgaben sind „Problemstellungen der Fehlerrechnung".

396. a) Wie lauten die Lösungen der Gleichung $x^2 - 2x + 1 = 0$?

b) Eine reelle Lösung der Gleichung $x^2 - 2x + 1 = 0$ soll mit Hilfe des NEWTONschen Näherungsverfahrens bestimmt werden. Um wie viel Prozent weicht die Näherung x_2 von der exakten Lösung ab, wenn als Ausgangswert $x_0 = 1{,}5$ gewählt wurde?

397. a) Die Lösungsmenge der Gleichung $2x^2 + x - 15 = 0$ ist in $\mathbb{R}_0^-$ zu bestimmen.

b) Wie oft muss das NEWTONsche Näherungsverfahren angewendet werden, wenn $x_0 = -2{,}5$ als Ausgangswert gewählt wurde und die Abweichung vom exakten Wert geringer als 0,5 % sein soll?

398. a) Gegeben ist die Gleichung $\frac{x^2}{4} + x - 3 = 0$. Ihre Lösungsmenge L ist in $\mathbb{R}^+$ zu ermitteln.

b) Mit welchem Anfangswert x_0 ist das NEWTONsche Näherungsverfahren zu beginnen, damit die Näherung x_1 von der exakten Lösung um genau 1% abweicht?

399. $x = 0{,}847$ ist die einzige reelle Lösung der Gleichung $x^3 + 3x^2 + 5x - 7 = 0$. Unter Verwendung dieser Information sind die folgenden Fragen zu beantworten:

a) In welchen Punkten schneiden einander die Funktionen mit den Gleichungen $y_1 = -x^3$ und $y_2 = 3x^2 + 5x - 7$?

b) Wie lautet die Nullstelle der ersten Ableitung von $f(x) = \frac{x^4}{4} + x^3 + \frac{5x^2}{2} - 7x + 3$?

c) Gesucht ist die x-Koordinate, in der die horizontale Gerade $y_1 = 7$ die Kurve $y_2 = x(x^2 + 3x + 5)$ schneidet.

400. a) Wie lautet eine reelle Lösung der Gleichung $x^3 - 2x^2 + 3x - 10 = 0$ auf 2 Dezimalstellen genau?

b) Es ist nachzuweisen, dass die in **a)** gefundene Lösung die einzige reelle Lösung der Gleichung ist.

401. Die abgebildete österreichische Milchpackung hat die Form eines quadratischen Prismas mit dem Volumen $V = 980\,cm^3$ und der Oberfläche $O = 658\,cm^2$. Wie lang sind Grundkante a und Höhe h?

402. Der abgebildete österreichische Sauerrahm-Becher hat — in erster Näherung — die Form eines geraden Kegelstumpfs mit $r_1 = 35\,mm$, $r_2 = 25\,mm$ und der Höhe $h = 98\,mm$. Radius und Höhe sollen um die selbe Länge x vergrößert werden, so dass sich das Volumen des Bechers verdoppelt. Die Länge x ist in Millimetern auf eine Dezimalstelle genau anzugeben.

Bemerkung: Wie man leicht zeigen kann, besteht zwischen dem alten und dem neuen Becher keine (mathematische) Ähnlichkeit. Letzteres kann sich auf das Kaufverhalten der Konsumenten auswirken!

403. Eine kugelförmige Boje aus Stahlblech ($\rho_{Fe} = 7{,}5\,g/cm^3$, $R = 20\,cm$, $s = 4\,mm$) schwimmt im Wasser. Bis zu welcher Tiefe h taucht sie ein?

Anleitung: Die verdrängte Flüssigkeit hat die Form eines Kugelsegments, für dessen Volumen $V = \frac{\pi h^2}{3}(3R - h)$ gilt. Damit der Körper schwimmt, muss das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit (also der Auftrieb F_k) dem gesamten Gewicht G der Boje gleich sein.

404. Eine Kugel mit dem Volumen $V = 33{,}5\,cm^3$ soll durch zwei parallele Schnitte in drei volumsgleiche Teile zerlegt werden. Die Höhen h_1 und h_2 dieser Kugelteile sind zu ermitteln.

Anleitung: Kugelsegment $V_1 = \frac{\pi h_1^2}{3}(3r - h_1)$

405. Von welcher Zahl ist das Quadrat um **a)** 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 größer als die Quadratwurzel?

406. Von welcher Zahl ist die dritte Potenz um **a)** 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 größer als die Kubikwurzel?

407. Wurzelziehen ohne Wurzel?

Angenommen, wir wollen $\sqrt{19}$ bestimmen, ohne die Tasten √, x^y oder $x^{1/y}$ auf dem Taschenrechner zu benützen[1]. Auch logarithmische und exponentielle Funktionen liegen uns — für den Augenblick — fern. In diesem Fall wählen wir eine **beliebige** positive Zahl x und berechnen mit ihr den Term $\frac{1}{2}\left(x + \frac{19}{x}\right)$. Den so gewonnenen Zahlenwert nennen wir erneut x und setzen ihn in den obigen Term $\frac{1}{2}\left(x + \frac{19}{x}\right)$ ein. Auf diese Weise kann man $\sqrt{19}$ beliebig genau ermitteln.

a) Warum funktioniert dieses Verfahren?

Anleitung: Man löse das zugehörige Nullstellenproblem mit Hilfe des NEWTONschen Näherungsverfahrens.

b) Will man allgemein $\sqrt{a}$ bestimmen, so hat man den Term $\frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$ zu verwenden.

Es ist — unter Verwendung des NEWTONschen Näherungsverfahrens — zu begründen, warum diese Iteration für jedes $a > 0$ und jeden Startwert $x > 0$ gegen $\sqrt{a}$ konvergiert.

Anleitung: Vgl. Aufgabe a).

[1]) Viele kaufmännische Rechenmaschinen besitzen derartige Funktionen gar nicht!

THINK ThInk THINK THINK THINK ThInk THINK

408.

(1) $x^3 + 4x - 33 = 0$ (2) $x^3 + 2x - 8 = 0$ (3) $x^3 - 6x - 10 = 0$

(4) $x^3 + 2x - 5 = 0$ (5) $x^3 - 19x + 21 = 0$ (6) $x^3 - 66x + 84 = 0$

(7) $x^3 - 8x^2 - 13 = 0$ (8) $x^3 - 4x^2 + 4 = 0$ (9) $2x^3 + 100x^2 - 50\,000 = 0$

(10) $4x^3 - 55x^2 - 13\,500 = 0$ (11) $3x^3 + 6x^2 + 16x + 20 = 0$ (12) $2x^3 - 3x^2 - 6x + 9 = 0$

(13) $x^4 + 16x - 43 = 0$ (14) $x^3 - 336x - 7795 = 0$

Die Gleichungen **(1)** bis **(14)** sind in ℝ auf drei Dezimalstellen zu lösen. Anschließend werden die Lösungen derart in die Rätselfelder eingetragen, dass für jede Ziffer (und für **negative** Vorzeichen) ein Kästchen verwendet wird, wobei die Zahlen nicht gerundet, sondern nur „abgetrennt" werden.

a) Welches Zeichen wird durch die rot eingezeichneten Striche angedeutet?

b) Welche berühmte Zahl wird durch die Zahlen in den Kästchen 1 bis 15 festgelegt?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

5. Kurvendiskussion

Es steht außer Frage, dass die Lufthülle der Erde durch Chlor-Fluor-Kohlenwasserstoff-getriebene Spraydosen gefährdet wird. Der Ozongürtel, der die Erde umgibt und das Eindringen der schädlichen UV-Strahlen der Sonne behindert, ist löchrig geworden.

Am Südpol hat sich bereits ein „Ozonloch" gebildet, dessen Größe der Fläche Nordamerikas entspricht. Ist es eine Laune der Natur, die das Ozon verschwinden lässt? Oder ist es ein Warnsignal?

Foto Max-Planck-Gesellschaft,[1] MPG-Spiegel 6/87

Es müsste nicht so sein, wie auf dem obigen Foto symbolisch dargestellt, dass wir die Lufthülle der Erde durch umweltfeindliche Spraydosen gefährden. Schließlich gibt es ja auch bei uns in Österreich Sprays mit umweltfreundlichem „Alternativ-Antrieb".

Um das Problem wissenschaftlich zu erforschen, werden unter anderem Messgeräte eingesetzt, die in genau festgelegte Höhen der Erdatmosphäre transportiert werden. Die Flughöhe derartiger „Höhenforschungsraketen" lässt sich vom Zeitpunkt des Brennschlusses an durch eine Funktionsgleichung beschreiben, aus der man

— die maximale Flughöhe h und

— den Zeitpunkt t, zu dem h erreicht wird

ermitteln kann.

Zunächst aber gilt es, einige neue Begriffe zu erläutern und die mathematischen Voraussetzungen zu schaffen. Aber anstatt „nüchterne Definitionen" an den Beginn unserer Betrachtungen zu stellen, sollen die neuen mathematischen Ausdrücke behutsam — durch entsprechende Vergleiche — erklärt werden.

Stellen wir uns doch einfach folgende Situation vor: Wir befinden uns auf einer Straße, die dem Verlauf der nebenstehenden Kurve **(1)** entspricht. Auf dem Weg von P nach N_3 fahren wir mit unserem Pkw zunächst in einer Linkskurve. Autofahrerinnen und Autofahrer wissen, dass sie der Straßenkrümmung Rechnung tragen müssen: Im Bereich des Punktes N_1 beginnen wir das nach links eingeschlagene Lenkrad langsam nach rechts zu drehen, weil die Krümmung abnimmt. Etwas später befinden wir uns in einer Rechtskurve. Interessant ist nun, dass im Punkt W die Straße weder eine Links- noch eine Rechtskurve macht und daher das Auto vollkommen gerade fährt. Die Straße hat in W keine Krümmung. Den Punkt W nennt man **Wendepunkt**.

(1)

Betrachten wir die Kurve **(1)** unter einem anderen Aspekt: Stellen wir uns nun dabei ein gebirgiges Gelände vor. Von Punkt P kommend, erreichen wir im Punkt E_1 die Talsohle, also den tiefstgelegenen Punkt der Umgebung. Wenn wir unsere Wanderung fortsetzen, so gelangen wir nach einiger Zeit zum Gipfel E_2, dem höchstgelegenen Punkt der Umgebung. Der höchst- bzw. tiefstgelegene Punkt der Umgebung wird **(lokaler) Extrempunkt** genannt.

Die mathematische Untersuchung des Graphen einer Funktion heißt **Kurvendiskussion**. Besonders die Differenzialrechnung wird uns dabei gute Dienste leisten.

Die Tangenten in E_1 und E_2 an den Graphen sind parallel zur x-Achse, wobei die x-Achse mit einer der beiden Tangenten identisch ist. Damit haben wir aber eine zusätzliche Eigenschaft von Extrempunkten erkannt: Extrempunkte besitzen waagrechte (zur x-Achse parallele) Tangenten.

Wir können für dieses Beispiel sogar die Gleichungen der Tangenten in den Extrempunkten angeben: $y = 0$ für E_1, $y = a$ für E_2.

[1]) Benannt nach **Max PLANCK** (1858—1947), deutscher Physiker.

(2)

P_1 ..... absoluter Tiefpunkt (absolutes Minimum)

P_2 ..... Nullstelle: $y = 0$

P_3 ..... relativer Hochpunkt (relatives Maximum): $y' = 0,\ y'' < 0$

P_4 ..... Rechts-links-Wendepunkt: $y' < 0,\ y'' = 0,\ y''' > 0$

P_5 ..... Links-rechts-Sattelpunkt (Links-rechts-Wendepunkt mit horizontaler Tangente): $y' = 0,\ y'' = 0,\ y''' < 0$

P_6 ..... Rechts-links-Wendepunkt, Rechts-links-Flachpunkt mit schräger Tangente: $y' < 0,\ y'' = 0,\ y''' = 0,\ y'''' = 0,\ y''''' > 0$

P_7 ..... Nullstelle: $y = 0$

P_8 ..... relativer Tiefpunkt (relatives Minimum): $y' = 0,\ y'' > 0$

P_9 ..... Nullstelle: $y = 0$

P_{10} ..... Links-rechts-Wendepunkt: $y' > 0,\ y'' = 0,\ y''' < 0$

P_{11} ..... relativer Hochpunkt (relatives Maximum), Rechts-rechts-Flachpunkt mit horizontaler Tangente: $y' = 0,\ y'' = 0,\ y''' = 0,\ y'''' < 0$

P_{12} ..... Rechts-links-Wendepunkt: $y' < 0,\ y'' = 0,\ y''' > 0$

P_{13} ..... relativer Tiefpunkt (relatives Minimum): $y' = 0,\ y'' > 0$

P_{14} ..... Links-links-Flachpunkt mit schräger Tangente: $y' > 0,\ y'' = 0,\ y''' = 0,\ y'''' > 0$

P_{15} ..... absoluter Hochpunkt (absolutes Maximum)

Betrachten wir nun die nebenstehende Kurve **(2)** und klären wir noch einige Begriffe:

Als **relatives Maximum** (oder **relativen Hochpunkt H**) bezeichnet man jenen Punkt eines Graphen, dessen benachbarte Punkte (links und rechts von H) alle einen **kleineren** y-Wert aufweisen. Die Tangente in H verläuft parallel zur x-Achse. Sie hat die Steigung $k = 0$.

Als **relatives Minimum** (oder **relativen Tiefpunkt T**) bezeichnet man jenen Punkt eines Graphen, dessen benachbarte Punkte (links und rechts von T) alle einen **größeren** y-Wert aufweisen. Die Tangente in T verläuft parallel zur x-Achse. Sie hat die Steigung $k = 0$.

Inwieweit ist es einzusehen, dass die Tangente in T **parallel** zur x-Achse verläuft? Eine plausible Argumentation wäre die Folgende: Denken wir uns den Graphen als festes Drahtstück, das wir — ohne ihn zu verdrehen oder zu verbiegen — auf den Tisch „stellen". Ohne Frage berührt der Draht den Tisch mit seinem tiefstem Punkt. Die **waagrechte** Tischplatte ist also eine Tangentialebene an das Drahtstück — denn wenn es noch einen tieferen Punkt gibt, bohrt sich dieser in den Tisch.

Die Tangente im Wendepunkt nennt man **Wendetangente**. Ein Wendepunkt mit zur x-Achse **paralleler** Tangente heißt **Sattelpunkt S**.

Viele Worte um Begriffe, die ohnehin klar sind? Mathematiker werden diese Frage empört zurückweisen. Es stimmt schon: Der Leser hat inzwischen schon eine Ahnung, was ein Maximum oder Minimum ist. Aber um in der Mathematik Irrtümer und Fehlschlüsse zu vermeiden, muss alles genau definiert und beschrieben werden. Unsere bisherigen Erläuterungen würden von strengen Mathematikern als „ungenaue Plausibilitätserklärungen" vom Tisch gefegt werden. Schauen wir uns einmal an, wie die **exakten Definitionen** einiger der von uns beschriebenen Begriffe lauten:

„Ein Funktionswert $f(x_{max})$ einer in einem Intervall $]a, b[$ definierten Funktion $f(x)$ heißt ***relatives Maximum*** *von $f(x)$ in $]a, b[$, wenn es eine Umgebung $U \subset]a, b[$ von x_{max} gibt, so daß für alle $x \in U$ mit $x \neq x_{max}$ gilt: $f(x_{max}) > f(x)$. Entsprechend heißt $f(x_{min})$* ***relatives Minimum*** *von $f(x)$ in $]a, b[$, wenn es eine Umgebung $U^* \subset]a, b[$ von x_{min} gibt, so daß für alle $x \in U^*$ mit $x \neq x_{min}$ gilt: $f(x_{min}) < f(x)$."* [1]

Jeder, der das Zitat sofort versteht, kann von sich behaupten, eine außergewöhnliche Auffassungsgabe für abstrakte Sachverhalte zu besitzen.

Ein Mittelmaß zwischen anschaulich-intuitiver Darstellung und obigem Zitat (aus einem der erfolgreichsten Mathematikbücher dieses Jahrhunderts — mehr als eine Million Exemplare wurden von dem Werk „Kleine Enzyklopädie Mathematik" bereits verkauft) findet sich in den folgenden Absätzen:

„Der Punkt $P(x_0, f(x_0))$ heißt ***relativer Tiefpunkt*** *des Graphen der Funktion f, wenn es eine Umgebung U um x_0 gibt, so daß gilt: $f(x_0) \leq f(x)$ für alle $x \in U$. $f(x_0)$ nennt man das* ***relative Minimum****.*

Der Punkt $P(x_0, f(x_0))$ heißt ***relativer Hochpunkt*** *des Graphen der Funktion f, wenn es eine Umgebung U um x_0 gibt, so daß gilt: $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in U$. $f(x_0)$ nennt man das* ***relative Maximum****."* [1]

Um von einer gegebenen Funktion die Koordinaten eines Extrempunkts zu ermitteln, könnte man den Funktionsgraphen zeichnen und den x- bzw. y-Wert ablesen. Allerdings lassen sich die Koordinaten der definierten Punkte (und sogar die Gleichungen ihrer Tangenten) auch **berechnen**.

---

[1]) Aus „Kleine Enzyklopädie Mathematik" (Verlag Harri Deutsch).

Beispiel:

Die Extremwerte der durch ihre Gleichung gegebenen Funktion $y = x^2 - 6x + 5$ sind rechnerisch zu ermitteln.

Lösung:

(1) $f(x) = x^2 - 6x + 5$

$f'(x) = 2x - 6$

$f''(x) = 2$

$f'''(x) = 0$

(2) $2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

(3) $f(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 5 = -4$

(4) $f''(3) = 2 \Rightarrow$ Minimum (Tiefpunkt) $\Rightarrow$ Der Punkt $P(3, -4)$ ist ein Tiefpunkt (Minimum)!

Graph der Funktion $f(x) = x^2 - 6x + 5$ über $D = [0, 6]$:

Die erste Ableitung gibt uns Auskunft über das Anstiegsverhalten einer Funktion $f(x)$:

$f'(x) > 0 \Rightarrow$ **Anstieg ist positiv $\Rightarrow$ f(x) ist streng monoton wachsend**

$f'(x) < 0 \Rightarrow$ **Anstieg ist negativ $\Rightarrow$ f(x) ist streng monoton fallend**

$f'(x) = 0 \Rightarrow$ **f(x) ist waagrecht**

Die zweite Ableitung gibt daher analog Auskunft über das Anstiegsverhalten der ersten Ableitung. Dieses wiederum entspricht dem Krümmungsverhalten der ursprünglichen Funktion:

$f''(x) > 0 \Rightarrow$ **Anstieg wird größer $\Rightarrow$ positive Krümmung**

$f''(x) < 0 \Rightarrow$ **Anstieg wird kleiner $\Rightarrow$ negative Krümmung**

$f''(x) = 0 \Rightarrow$ **Anstieg konstant $\Rightarrow$ keine Krümmung**

Beispiel:

Gegeben ist die Funktionsgleichung $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Gesucht sind Extrema, Wendepunkt und Gleichung der Wendetangente.

Lösung:

(1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f''(x) = 6x - 6$

$f'''(x) = 6$

(2) $3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$

(3) $f(0) = 0 - 0 + 2 = 2$

$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 =$

$= -2$

(4) $f''(0) = 6 \cdot 0 - 6 = -6 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Maximum (Hochpunkt) $\Rightarrow$ Der Punkt $H(0, 2)$ ist ein Hochpunkt (Maximum)!

Graph der Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ über $D = [-1, 3]$:

$f''(2) = 6 \cdot 2 - 6 = 6 \Rightarrow$ Minimum (Tiefpunkt) $\Rightarrow$ Der Punkt $T(2, -2)$ ist ein Tiefpunkt (Minimum)!

(5) $6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

(6) $f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 2 = 0$

(7) $f'''(1) = 6 \neq 0 \Rightarrow$ Der Punkt $W(1, 0)$ ist ein Wendepunkt!

(8) $f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 = -3$

$0 = -3 \cdot 1 + d \Leftrightarrow d = 3$ $\quad$ $y = -3x + 3$

Vorgangsweise bei Kurvenuntersuchungen:

(1) Zunächst werden jene Ableitungen berechnet, die für die Kurvendiskussion benötigt werden.

(2) Es wird $f'(x) = 0$ gesetzt und die Gleichung nach x gelöst.

(3) Einsetzen in $f(x)$ liefert die y-Koordinate des potenziellen Extrempunkts.

(4) Einsetzen in $f''(x)$ gibt Auskunft, ob tatsächlich ein Extrempunkt vorliegt und ob es sich um einen Hoch- oder Tiefpunkt handelt.

$f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ **Tiefpunkt (positive Krümmung)**

$f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ **Hochpunkt (negative Krümmung)**

(5) Es wird $f''(x) = 0$ gesetzt und die Gleichung nach x gelöst.

(6) Einsetzen in $f(x)$ liefert die y-Koordinate des potentiellen Wendepunkts.

(7) Einsetzen in $f'''(x)$ gibt Auskunft, ob tatsächlich ein Wendepunkt vorliegt.

(8) Die x- und y-Koordinaten des Wendepunkts werden in die Geradengleichung $y = f'(x)x + d$ eingesetzt. Dadurch erhalten wir die Gleichung der Wendetangente.

In jedem Stadium der Kurvendiskussion sollte man die Übersicht haben: „Gefühlsentscheidungen“ im Stil von „ein weiteres Mal zu differenzieren kann nicht schaden, und wo ich dann den x-Wert einsetze, ist nicht so wichtig“ sind meistens falsch. Die nachstehende methodische Zusammenfassung bezieht sich auf die ersten vier Ableitungen der Funktion f an der betrachteten Stelle x_0:

<table>
<tr><th colspan="3">Klassifikation des Punktes $(x_0, f(x_0))$</th><th>$f'(x_0)$</th><th>$f''(x_0)$</th><th>$f'''(x_0)$</th><th>$f''''(x_0)$</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Relativer Extrempunkt</td><td>Maximum</td><td></td><td rowspan="4">= 0 (horizontale Tangente)</td><td>< 0</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>Minimum</td><td></td><td>> 0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Sattelpunkt (Wendepunkt mit horizontaler Tangente!)</td><td>Links-rechts-Sattelpunkt</td><td></td><td rowspan="6">= 0</td><td>< 0</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>Rechts-links-Sattelpunkt</td><td></td><td>> 0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Wendepunkt</td><td>Links-rechts-Wendepunkt</td><td></td><td rowspan="4">≠ 0 (schräge Tangente)</td><td>< 0</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>Rechts-links-Wendepunkt</td><td></td><td>> 0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Flachpunkt</td><td>Rechts-rechts-Flachpunkt</td><td></td><td rowspan="2">= 0</td><td>< 0</td></tr>
<tr><td>Links-links-Flachpunkt</td><td></td><td>> 0</td></tr>
</table>

In unserer Tabelle hat sich ein weiterer Begriff eingeschlichen: der **Flachpunkt**. Was soll man sich darunter vorstellen? Die zugehörigen Graphen in nebenstehender Übersicht deuten es bereits an: Es muss sich um einen Punkt handeln, in dem die Kurve „irgendwie flachgedrückt" ist. In der Außenspalte ist die Geschichte einer derartigen „Kurvenmisshandlung" dargestellt: Kurve **(1)** besitzt zwei deutlich verschiedene Wendepunkte, die symmetrisch zu F liegen. Nun stellen wir uns vor, dieses wellige Gebiet wird allmählich geglättet (wie eine verbeulte Karosserie vom Autospengler). Dabei kommen beide Wendepunkte einander näher (vgl. Kurve **(2)**). In Kurve **(3)** haben wir schließlich das Spiel so weit getrieben, dass sie mit F zusammenfallen. Jetzt sagt man: **Die Kurve (3) besitzt in F einen Flachpunkt.** Bei weiterer Ausbeulung (vgl. Kurve **(4)**) verschwindet dieser sofort wieder.

Wem allerdings diese Erklärung zu schwierig erscheint, kann es ja mit der folgenden versuchen: Setzen wir uns wieder ins Auto und fahren wir auf einer Straße, deren Verlauf jetzt der Kurve **(3)** entspricht. Auf unserem Weg von A nach B befinden wir uns vor F zunächst in einer **Linkskurve**. Im Augenblick, wo wir uns F nähern, nimmt die Straßenkrümmung ab. Demzufolge haben wir den Einschlag des Lenkrads abzuschwächen. Den Flachpunkt F müssen wir dann **geradlinig** durchfahren, da die Straße dort keine Krümmung ($\Rightarrow f''(x_0) = 0$) aber auch keine Krümmungsänderung ($\Rightarrow f'''(x_0) = 0$) aufweist. Kurz darauf befinden wir uns bereits wieder in einer **Linkskurve**. Wir sprechen in diesem Fall von einem **Links-links-Flachpunkt**.

Aber auch relative Extrempunkte, Sattelpunkte und Wendepunkte können unter gewissen Bedingungen zusätzlich Flachpunkte sein.

(4) (3) (2) (1)
A B F W W

Beispiel:

Gegeben: $y = -x^3 - 6x^2 - 9x - 3$

Gesucht:
a) Umfassendste Definitionsmenge
b) Nullstellen (auf 3 Dezimalstellen genau)
c) Extremwerte
d) Wendepunkt(e), Wendetangente(n)
e) Graph

Lösung:

a) In der Menge $\mathbb{R}$ ist jeder Wert zulässig, da bei der gegebenen Funktion die Variable x nicht im Nenner auftritt. Somit gibt es keine Probleme mit der Division durch Null. $\Rightarrow D = \mathbb{R}$

b) Um die Nullstellen zu berechnen, setzen wir $f(x) = 0$:

$-x^3 - 6x^2 - 9x - 3 = 0$

Wir können diese Gleichung näherungsweise lösen und wenden das NEWTONsche Näherungsverfahren an:

$y' = -3x^2 - 12x - 9$

x	−5	−4	−3	−2	−1	0
y	17	1	−3	−1	1	−3

Die drei Nullstellen liegen in den Intervallen $[-4, -3]$, $[-2, -1]$ und $[-1, 0]$. Beginnen wir mit dem ersten Intervall und wählen wir dessen linke Grenze -4 als Startwert x_0 unserer Iteration.

b)

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	-4	1	-9	$-3{,}8$
1	$-3{,}8$	0,0727	$-7{,}704$	$-3{,}8795$
2	$-3{,}8795$	$5{,}04 \cdot 10^{-4}$	$-7{,}597$	$-3{,}8794$

$\Rightarrow \bar{x}_1 = -3{,}879$

$\Rightarrow$ **$N_1(-3{,}789,\ 0)$**[1]

Die übrigen Nullstellen erhalten wir bekanntlich, indem wir die ursprüngliche Gleichung durch den Linearfaktor $(x - x_1)$ dividieren:

$$
\begin{array}{l}
(-x^3 - 6x^2 \quad -9x \quad -3) : (x + 3{,}879) = -x^2 - 2{,}121x - 0{,}773 \\
-(-x^3 - 3{,}879x^2) \\
\qquad -2{,}121x^2 - 9x \\
\quad -(-2{,}121x^2 - 8{,}227x) \\
\qquad\qquad -0{,}773x - 3 \\
\qquad\quad -(-0{,}773x - 2{,}997) \\
\qquad\qquad\quad -0{,}003 \text{ Rest}
\end{array}
$$

Die so gewonnene Gleichung $-x^2 - 2{,}121x - 0{,}773 = 0$ besitzt die zwei Nullstellen $\bar{x}_2 = -1{,}654$ und $\bar{x}_3 = -0{,}467$. (Theoretisch müssten sie auch Nullstellen unserer kubischen Gleichung sein).

Nun haben wir aber mit x_1 keine **exakte** Nullstelle, was auch den Rest von $-0{,}003$ bei der Division durch den zugehörigen Linearfaktor erklärt. Auch der quadratische Quotient daraus hat nur gerundete Koeffizienten und die Lösungen $\bar{x}_2$ und $\bar{x}_3$ der quadratischen Gleichung sind ebenfalls nur dreistellig angegeben.

Im Zug unserer Rechnung dürften sich demnach einige Ungenauigkeiten eingeschlichen haben. Diese aber lassen sich einfach ausmerzen, indem wir sie einer NEWTON-Iteration unterwerfen[2].

Als Startwerte sind sie ohne weiteres zu gebrauchen, denn es gilt: $\bar{x}_2 \in [-2,\ -1]$, $\bar{x}_3 \in [-1,\ 0]$. In diesen zwei Intervallen müssen ja auch die tatsächlichen Nullstellen liegen!

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	$-1{,}654 = \bar{x}_2$	$-3{,}4 \cdot 10^{-3}$	2,641	$-1{,}6527$
1	$-1{,}6527$	$-1{,}7 \cdot 10^{-6}$	2,638	$-1{,}6527$

$\Rightarrow \bar{x}_2 = -1{,}653$

$\Rightarrow$ **$N_2(-1{,}653,\ 0)$**

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	$-0{,}467 = \bar{x}_3$	$-3{,}7 \cdot 10^{-3}$	$-4{,}050$	$-0{,}4679$
1	$-0{,}4679$	$-3{,}8 \cdot 10^{-6}$	$-4{,}042$	$-0{,}4679$

$\Rightarrow \bar{x}_3 = -0{,}468$

$\Rightarrow$ **$N_3(-0{,}468,\ 0)$**

In beiden Fällen ergab sich also eine Korrektur an der letzten Stelle!

[1] Wer den Wert $x_1 = -3{,}879$ in die Funktion $f(x)$ einsetzt, wird — je nach Genauigkeit des Taschenrechners — nicht exakt Null erhalten. Null zu erhalten wäre allerdings auch nach beliebig vielen Iterationen nie möglich.

[2] Man nennt dieses Verfahren auch **Nachiteration**.

c) ① $f(x) = -x^3 - 6x^2 - 9x - 3$

$f'(x) = -3x^2 - 12x - 9$

$f''(x) = -6x - 12$

$f'''(x) = -6$

② $-3x^2 - 12x - 9 = 0$

$x^2 + 4x + 3 = 0$

$x = -2 \pm \sqrt{4-3} = -2 \pm 1$

$x = -3 \vee x = -1$

③ $f(-3) = \ldots = -3$

$f(-1) = \ldots = 1$

④ $f''(-3) = -6(-3) - 12 = 6 \Rightarrow$ Minimum **T(−3, −3)**

$f''(-1) = -6(-1) - 12 = -6 \Rightarrow$ Maximum **H(−1, 1)**

d) ⑤ $-6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ⑥ $f(-2) = \ldots = -1$

⑦ $f'''(-2) = -6 \neq 0 \Rightarrow$ (einziger) Wendepunkt **W(−2, −1)**

⑧ $f'(-2) = -3(-2)^2 - 12(-2) - 9 = 3 \Rightarrow k = 3$

$y_W = kx_W + d \Leftrightarrow -1 = 3(-2) + d \Leftrightarrow d = 5$

Da nur ein Wendepunkt existiert, gibt es daher auch nur eine einzige Wendetangente t. Diese hat die Gleichung $y = 3x + 5$.

e) In **b)** bis **d)** haben wir eine Reihe von Informationen zusammen getragen, aus denen wir die wesentlichen Eigenschaften des Graphen von f (x) erschließen können. Tragen wir sie in ein kartesisches Koordinatensystem ein:

Nun bedarf es nur noch weniger weiterer Werte, um den Graphen zeichnen zu können!

x	0	− 2,5	− 3,5	− 4
y	− 3	− 2,375	− 2,125	1

Erinnern wir uns daran, wie wir früher den Graphen einer Funktion zeichnen mussten. Wir hatten mittels der Funktionsgleichung zunächst eine Wertetabelle und daraus eine große „Punktwolke“ zu fabrizieren, um ein einigermaßen befriedigendes Ergebnis zu erhalten. Diese Mühe können wir uns jetzt größtenteils sparen (vgl. nebenstehende Figuren): Die Tangente in einem Punkt ersetzt gewissermaßen eine Reihe weiterer Punkte in seiner Nachbarschaft.

Leider kann es im schönsten Kurvenverlauf Störenfriede geben — wie überall im Leben, so also auch in der Mathematik. Es handelt sich dabei um sogenannte **Lücken**. Der zugehörige Graph ist an diesen Stellen unterbrochen.

Wird für einen x-Wert Zähler und Nenner einer gebrochenrationalen Funktion mit der Gleichung $f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$ gleichzeitig Null, so hat die Funktion an dieser Stelle eine Lücke:
$f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{0}{0}$

Schauen wir uns z. B. die Funktion $f: x \mapsto \frac{x^2 - 9}{x + 3}$ an. f hat an der Stelle $x = -3$ eine Lücke, denn bei $x = -3$ werden Zähler und Nenner der Funktionsgleichung $y = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$ **gleichzeitig** Null.

Die **„Lücke“** ist ein Begriff, der bei der vollständigen Kurvendiskussion gebrochenrationaler Funktionen zu behandeln ist. Außerdem ist bei Funktionen mit der Gleichung $y = \frac{Z(x)}{N(x)}$ Folgendes abzuklären:

— Hat die Funktion Pole?

— Liegen Asymptoten vor? Wie verhält sich die Funktion im Unendlichen?

Die Antworten auf Fragen dieser Art werden wir uns anhand einer konkreten Kurvendiskussion überlegen.

Man sagt: $x \mapsto x^0$ hat an der Stelle 0 eine **Lücke**.

Beispiel:

Die durch ihre Gleichung $y = x^2 + \frac{15}{x}$ gegebene Funktion ist hinsichtlich **(1)** umfassendster Definitionsmenge, **(2)** Polstelle(n) und Lücken, **(3)** Asymptoten, **(4)** Nullstelle(n), **(5)** Relativer Extrema, **(6)** Wendepunkt(e), Wendetangente(n) und **(7)** Graphen zu diskutieren.

Lösung:

(1) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(2) Die Funktion hat bei $\mathbf{x_1 = 0}$ eine Polstelle, da sie an dieser Stelle nicht definiert ist und der Zähler bei $x_1 = 0$ ungleich Null ist. **g: x = 0** ist senkrechte Asymptote.

Die Funktion hat **keine Lücken**, denn es gibt keinen Wert, für den Zähler und Nenner gleichzeitig Null werden.

(3) **Wiederholung:**

$$f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_0}$$

(1) $m > n$ → x-Achse ist Asymptote[1]

(2) $m = n$ → Gerade $y = \frac{a_n}{b_n}$ ist Asymptote[1]

(3) $m < n$ → $\frac{Z(x)}{N(x)} = y_1 + y_2$, y_1 ist Asymptote[1]

$y = x^2 + \frac{15}{x} = \frac{x^3 + 15}{x}$, d. h. Fall **(3)** ist zutreffend: $m < n$

$\frac{x^3 + 15}{x} = \underbrace{x^2}_{y_1} + \underbrace{\frac{15}{x}}_{y_2} \Rightarrow \mathbf{y_1 = x^2}$ ist Asymptote der Funktion.

Weiters gibt es die senkrechte Asymptote bei der Polstelle (g: x = 0).

(4) $f(x) = x^2 + \frac{15}{x} = 0 \Leftrightarrow x^3 + 15 = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{15} \Rightarrow$ **N(−2,466, 0)**

Was ist ein Pol?

Sofern der Nenner einer gebrochenrationalen Funktion an einer Stelle x = a gleich Null ist, ist die Funktion an dieser Stelle nicht definiert. Wenn nun der Zähler bei x = a ungleich Null ist, sagt man: Die Funktion besitzt an dieser Stelle einen sogenannten **Pol** (eine **„Unendlichkeitsstelle“**). g: x = a ist eine **senkrechte Asymptote**.

Was ist eine Asymptote?

Unter einer **Asymptote** der Funktion f versteht man eine Funktion g, wobei sich der Graph der Funktion f dem Graphen der Funktion g immer mehr nähert, ohne ihn jemals zu berühren.

[1]) Asymptote, die (griech.): nicht zusammenfallend.

(5) $f(x) = x^2 + \frac{15}{x}$

$f'(x) = 2x - \frac{15}{x^2} \Rightarrow 2x - \frac{15}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x = 1{,}957$

$f''(x) = 2 + \frac{30}{x^3} \qquad f''(1{,}957) = 2 + \frac{30}{7{,}5} = 6 \Rightarrow \text{Minimum}$

T(1,957, 11,495)

(6) $2 + \frac{30}{x^3} = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{15}$

$f'''(x) = -\frac{90}{x^4} \qquad f'''(-\sqrt[3]{15}) = -90 \cdot \frac{1}{(-\sqrt[3]{15})^4} \neq 0$

$\Rightarrow$ f hat bei $x = -\sqrt[3]{15} = -2{,}466$ einen Wendepunkt:
W(–2,466, 0)

Für die Gleichung der Wendetangente liefert f′ den Anstieg derselben:

$f'(-\sqrt[3]{15}) = \ldots = -7{,}399$

$0 = -7{,}399\,(-\sqrt[3]{15}) + d \Leftrightarrow d = -18{,}247$

$\mathbf{y = -7{,}399\,x - 18{,}247}$

(7) Um den Graphen zu zeichnen, legen wir zunächst eine **waagrechte Wertetabelle** an: (Der Graph findet sich in der Außenspalte!)

x	…	– 3	– 2,466	– 2	– 1	1	1,957	3	…
y	…	4	0	– 3,5	– 14	16	11,495	14	…

↑ N = W (bei x = – 2,466) ↑ T (bei x = 1,957)

Schauen wir uns das vorige Beispiel noch einmal an. Einige der „Teilprobleme" wurden mit, andere ohne Differenzialrechnung gelöst:

(1) Umfassendste Definitionsmenge
(2) Polstelle(n) und Lücken
(3) Asymptote(n)
(4) Nullstelle(n)
} ohne Differenzialrechnung

(5) Relatives Extremum (relative Extrema)
(6) Wendepunkt(e), Wendetangente(n)
(7) Graph
} mit Differenzialrechnung

Es empfiehlt sich, die obige Rechenfolge auch dann bei einer Kurvendiskussion einzuhalten, wenn die Beispielangabe keine Ordnung bestimmt.

Beim letzten Beispiel wurde der Text formal anders gestaltet, als früher: Die Berechnungen waren nicht in die Punkte (1), (2), (3) usw. gegliedert und einige Zwischenrechnungen wurden nur angedeutet. Es ist klar, dass Verständnisschwierigkeiten leichter auftreten, wenn die Lösung nicht allzu ausführlich kommentiert ist. Die einzige Mölichkeit, Beispiele nicht nur zu **kennen**, sondern auch zu **können**, ist das „Lesen" mit Papier und Bleistift, d. h. das **selbständige Finden** der Resultate. Das folgende Beispiel ist in diesem Sinn eine Aufforderung selbsttätig zu werden, zumal die Lösung bewusst in vielen Teilen besonders knapp gehalten wurde.

Beispiel:

Gegeben ist die Funktionsgleichung $y = \frac{x^3}{2x^2 - x - 1}$.

Gesucht ist/sind: **(1)** Umfassendste Definitionsmenge, **(2)** Unstetigkeitsstellen (Pole, Lücken), **(3)** Asymptote(n), **(4)** Nullstelle(n), **(5)** Relative Extrema, **(6)** Wendepunkt(e), Wendetangente(n) und **(7)** Graph.

Lösung:

(1) $D = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - x - 1 = 0\} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$

(2) $\mathbf{x_1 = -\frac{1}{2}}$ und $\mathbf{x_2 = 1}$ sind Polstellen der Funktion. $\mathbf{g_1: x = -\frac{1}{2}}$ und $\mathbf{g_2: x = 1}$ sind senkrechte Asymptoten.

(3) Da der Grad des Zählers größer als der Grad des Nenners ist, sind die Asymptoten durch Ausführung der Division $Z(x): N(x)$ zu ermitteln:

$$x^3 : (2x^2 - x - 1) = \underbrace{\frac{x}{2} + \frac{1}{4}}_{y_1} + \underbrace{\frac{\frac{3x}{4} + \frac{1}{4}}{2x^2 - x - 1}}_{y_2} \Rightarrow \mathbf{y_1 = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}} \text{ ist Asymptote der Funktion.}$$

Weiters gibt es die senkrechten Asymptoten bei den Polstellen (g_1: $x = -\frac{1}{2}$, g_2: $x = 1$).

(4) $\frac{x^3}{2x^2 - x - 1} = 0 \Leftrightarrow x^3 = 0 \Rightarrow$ f hat bei $x_3 = 0$ eine dreifache Nullstelle: $\mathbf{N(0,\ 0)}$.

(5) $y' = \frac{3x^2(2x^2 - x - 1) - x^3(4x - 1)}{(2x^2 - x - 1)^2} = \ldots = \frac{2x^4 - 2x^3 - 3x^2}{(2x^2 - x - 1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2(2x^2 - 2x - 3) = 0$

$\mathbf{x_3 = 0 \quad x_4 = 1{,}82 \quad x_5 = -0{,}82}$

$y'' = \ldots = \frac{6x^3 + 6x^2 + 6x}{(2x^2 - x - 1)^3}$ $\quad f''(0) = 0 \Rightarrow$ noch keine Entscheidung möglich, y''' wird benötigt. (Vgl. (6))

$\left.\begin{array}{l} f''(1{,}82) = 1{,}22 \\ f''(-0{,}82) = -2{,}65 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{T(1{,}82,\ 1{,}58),\ \ H(-0{,}82,\ -0{,}27)}$

(6) $\frac{6x^3 + 6x^2 + 6x}{(2x^2 - x - 1)^3} = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + x + 1) = 0 \Rightarrow \mathbf{x_3 = 0}$ (einzige reelle Lösung der Gleichung)

$y''' = \ldots = \frac{-36x^4 - 48x^3 - 72x^2 - 6}{(2x^2 - x - 1)^4}$, $f'''(0) = -6 \neq 0 \Rightarrow$ wegen $f'(0) = 0$ liegt ein **Sattelpunkt W** vor.

$f(0) = 0 \Rightarrow \mathbf{W(0,\ 0)}$

Wendetangente ist die x-Parallele: $\mathbf{y = 0}$ (x-Achse)

(7)

x	…	−4	−3	−2
y	…	−1,83	−1,35	−0,89

x	−1	−0,82	−0,62	0
y	−0,50	−0,47	−0,61	0
		↑ H		↑ W = N

x	0,5	1,62	1,82	2
y	−0,13	1,62	1,58	1,60
			↑ T	

x	3	4	…
y	1,93	2,37	…

Es gibt Beispiele, bei denen bestimmte Eigenschaften einer Funktion gegeben sind und die Funktionsgleichung gesucht ist. Die Art der Gleichung liegt bei derartigen **„Umkehraufgaben zur Kurvendiskussion"** immer vor, d. h. man weiß, ob es sich z. B. um eine Funktion der Form $y = ax^2 + bx + c$ oder um $y = \frac{a}{x} + b$ handelt. Diese Problemstellungen, also das Finden der Koeffizienten der Funktionsgleichung, wird nun anhand von Beispielen erklärt.

Umkehraufgaben zur Kurvendiskussion werden auch als **allgemeines Interpolationsproblem** bezeichnet.

Beispiel:

Der Graph der Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ hat in $P_1\left(-1, \frac{16}{3}\right)$ einen relativen Extrempunkt und in W(1, y) einen Wendepunkt. Der Graph schneidet die y-Achse bei $\frac{11}{3}$. Gesucht sind die Koeffizienten a, b, c und d der Funktionsgleichung!

Lösung:

Gegebene Bedingungen	Übersetzung in die „Sprache der Mathematik"
Der Graph der Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ hat in $P_1\left(-1, \frac{16}{3}\right)$ ...	$P_1\left(-1, \frac{16}{3}\right) \in f \Rightarrow$ $\frac{16}{3} = a(-1)^3 + b(-1)^2 + c(-1) + d$ **(1)** $\frac{16}{3} = -a + b - c + d$
...einen relativen Extrempunkt ...	$P_1\left(-1, \frac{16}{3}\right)$ ist relativer Extrempunkt $\Rightarrow f'(x_1) = 0$ $f'(-1) = 0 \Rightarrow 0 = 3a(-1)^2 + 2b(-1) + c$ **(2)** $0 = 3a - 2b + c$
... und in W(1, y) einen Wendepunkt.	W(1, y) ist Wendepunkt $\Rightarrow f''(x_W) = 0$ $f''(1) = 0 \Rightarrow 0 = 6a \cdot 1 + 2b$ **(3)** $0 = 6a + 2b$
Der Graph schneidet die y-Achse bei $\frac{11}{3}$.	$P_2\left(0, \frac{11}{3}\right) \in f \Rightarrow \frac{11}{3} = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d$ **(4)** $d = \frac{11}{3}$

Ein Punkt P liegt genau dann auf einer Kurve mit der Funktionsgleichung $y = f(x)$, wenn seine Koordinaten die Funktionsgleichung erfüllen.

Es empfiehlt sich, die ersten zwei Ableitungen der Funktionsgleichung zu bilden:

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$y' = 3ax^2 + 2bx + c$

$y'' = 6ax + 2b$

An der Stelle, an der ein Graph g die y-Achse schneidet, ist $x = 0$:

Damit sind für a, b, c und d genau 4 lineare Gleichungen gegeben, die gleichzeitig erfüllt werden müssen.

$$\left.\begin{aligned} (1)\quad \tfrac{16}{3} &= -a + b - c + d \\ (2)\quad 0 &= 3a - 2b + c \\ (3)\quad 0 &= 6a + 2b \\ (4)\quad d &= \tfrac{11}{3} \end{aligned}\right\}$$

Wird dieses Gleichungssystem mit einer der üblichen Methoden gelöst (z. B. mit dem Einsetzungsverfahren bzw. dem Eliminationsverfahren), so ergibt sich:

$a = \frac{1}{3} \qquad b = -1 \qquad c = -3 \qquad d = \frac{11}{3}$

Beispiel:

Eine Polynomfunktion dritten Grads hat im Punkt $W(x_W, 44)$ einen Wendepunkt mit der Wendetangente $y = 27x - 64$. Ferner geht sie durch den Ursprung. Funktionsgleichung?

Lösung:

Gegebene Bedingungen	Übersetzung in die „Sprache der Mathematik"
Eine Polynomfunktion dritten Grads ...	$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$
...hat im Punkt $W(x_W, 44)$...	$W(x_W, 44)$ liegt auf der Wendetangente $y = 27x - 64$. $\Rightarrow 44 = 27x_W - 64 \Leftrightarrow x_W = 4 \Rightarrow W(4, 44)$ $W(4, 44) \in f \Rightarrow 44 = a \cdot 4^3 + b \cdot 4^2 + c \cdot 4 + d$ **(1)** $44 = 64a + 16b + 4c + d$
... einen Wendepunkt ...	$W(4, 44)$ ist Wendepunkt $\Rightarrow f''(x_W) = 0$ $f''(4) = 0 \Rightarrow 0 = 6a \cdot 4 + 2b$ **(2)** $0 = 12a + b$
... mit der Wendetangente $y = 27x - 64$.	$y = 27x - 64$ ist Wendetangente $\Rightarrow f'(x_W) = 27$ $f'(4) = 27 \Rightarrow 27 = 3a \cdot 4^2 + 2b \cdot 4 + c$ **(3)** $27 = 48a + 8b + c$
Ferner geht sie durch den Ursprung.	$N(0, 0) \in f \Rightarrow 0 = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d$ **(4)** $d = 0$

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & 44 = 64a + 16b + 4c + d \\ (2) & 0 = 12a + b \\ (3) & 27 = 48a + 8b + c \\ (4) & d = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = -1, \quad b = 12, \\ c = -21, \quad d = 0 \end{array}$$

Die Gleichung einer Polynomfunktion dritten Grads lautet allgemein:

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Die obige Funktionsgleichung $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ wird oft auch als **Gleichung einer kubischen ganzrationalen Funktion** oder als **Parabel dritter Ordnung** bezeichnet.

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$y' = 3ax^2 + 2bx + c$

$y'' = 6ax + 2b$

Graph der Funktion mit der Gleichung $y = -x^3 + 12x^2 - 21x$:

Einige historische Bemerkungen zur Differenzialrechnung:

Im 19. Jahrhundert beschäftigten sich namhafte Mathematiker mit der Entwicklung der Differenzialrechnung und ihrer Anwendung auf die Mechanik. Zu jener Zeit spielte der Unterricht an den Universitäten eine geringe Rolle. An den Gymnasien und Lehrerfortbildungsanstalten befasste man sich im Mathematikunterricht mit Arithmetik, Geometrie, Trigonometrie und Logarithmen. Das Lehrziel war die „Verstandesschulung".

Da die fortschreitende Entwicklung von Technik und Wirtschaft einen verstärkten Einsatz der Differenzialrechnung mit sich brachte, wurde in Österreich im Jahre 1905 der mathematisch-naturwissenschaftliche Unterricht neu geregelt. Eine Kommission legte eine Arbeit vor, die unter dem Namen „Meraner Vorschläge" in die Geschichte einging und deren Realisierung dazu führte, dass unter anderem die Differerenzialrechnung in den Schulen gelehrt wurde, und zwar *„zur Kennzeichnung des Verlaufs einer Funktion und deren Änderung"*.

AUFGABEN

Für die folgenden durch ihre Funktionsgleichung gegebenen Funktionen ist zu ermitteln: **(1)** Nullstelle(n), **(2)** Relative Extrema, **(3)** Wendepunkt(e), Wendetangente(n) und **(4)** Graph.

409. a) $y = x^2 - 5x$ **b)** $y = x^2 - x - 12$ **c)** $y = \frac{1}{10}(5x^2 - 12x - 99)$

410. a) $y = \frac{x^3}{4} - 3x$ **b)** $y = \frac{1}{2}(x^3 + 3x^2)$ **c)** $y = \frac{x^3}{6} + x^2$

411. a) $y = -\frac{x^4}{2} + 2x^2$ **b)** $y = \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2}$ **c)** $y = \frac{x^4}{24} - x^2$

412. a) $y = \frac{1}{5}(x^3 - 2x^2 - 15x)$ **b)** $y = \frac{1}{50}(8x^3 + 12x^2 + 17x)$ **c)** $y = \frac{1}{500}(16x^3 - 64x^2 + 89x)$

413. a) $y = \frac{x^4}{24} - x^2 + \frac{16}{3}$ **b)** $y = \frac{x^4}{8} - \frac{3x^3}{4} + \frac{3x^2}{2}$ **c)** $y = \frac{1}{2}(x^4 - 6x^2 + 9)$

414. a) $y = \frac{1}{4}(x^3 - 3x^2 - 9x + 27)$ **b)** $y = \frac{1}{5}(x^3 + \frac{3x^2}{2} - 6x - 9)$

415. a) $y = \frac{1}{5}(x^3 + 2x^2 + 4x + 8)$ **b)** $y = \frac{1}{9}(x^3 + x^2 - 16x - 16)$

416. a) $y = \frac{1}{5}(x^3 - 3x^2 - 9x + 11)$ **b)** $y = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x - 1$

417. a) $y = \frac{1}{8}(3x^3 + 7x^2 - 7x - 3)$ **b)** $y = \frac{1}{20}(8x^4 + 14x^3 - 69x^2 + 14x + 8)$

418. In welcher Reihenfolge soll eine Kurvendiskussion durchgeführt werden? Sicherlich wird man nicht zuerst den Graphen zeichnen und sich anschließend Gedanken über Extrema machen. Gegeben ist eine ungeordnete Zusammenstellung von Arbeiten:

- Extrempunkte (Hoch- und Tiefpunkte)
- Symmetrieeigenschaften
- Wertetabelle für f, Zeichnung des Graphen von f
- Umfassendste Definitionsmenge, Unstetigkeitsstellen, Lücken, Pole
- Monotonie, Krümmungsverhalten
- Nullstellen (Schnittpunkte des Graphen mit der x-Achse)
- Wendepunkte, Wendetangenten
- Asymptoten, Grenzwerte.

a) In welcher Reihenfolge sollen die angeführten Begriffe im Allgemeinen behandelt werden?

b) In welchen Fällen sind Kenntnisse der Differenzialrechnung notwendig? In welchen Fällen kommt man ohne Differenzialrechnung aus?

Man diskutiere die durch ihre Funktionsgleichung gegebenen gebrochenrationalen Funktionen hinsichtlich folgender Kriterien: **(1)** Umfassendste Definitionsmenge, **(2)** Unstetigkeitsstellen (Pole, Lücken), **(3)** Asymptote(n), **(4)** Nullstelle(n), **(5)** Relative Extrema, **(6)** Wendepunkt(e), Wendetangente(n) und **(7)** Graph!

419. a) $y = x^2 + \frac{8}{x}$ **b)** $y = \frac{27 - x^3}{x}$ **c)** $y = \frac{x^3 - 1}{x}$

420. a) $y = \frac{x^2 + 4}{x - 1}$ **b)** $y = \frac{x^2 + 6}{x + 4}$ **c)** $y = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$

421. a) $y = \frac{x^2 - \frac{1}{100}}{x^2 + \frac{1}{10}}$ **b)** $y = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$ **c)** $y = \frac{3x^2 + 1}{10 - 2x^2}$

422. a) $y = \frac{8x}{x^2 + 1}$ **b)** $y = \frac{30x}{x^2 + 4}$ **c)** $y = \frac{48x}{x^2 + 12}$

423. a) $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ **b)** $y = \frac{x^2 + 1}{x}$ **c)** $y = \frac{x^4 - 1}{2x^2}$

424. a) $y = \frac{2(3 - x^2)}{x^2 - 4}$ **b)** $y = \frac{3(x^2 - 2x)}{x^2 + 2x + 1}$ **c)** $y = \frac{(x - 5)(x + 1)(x + 2)}{x^2 - 9}$

Bei den durch ihre Funktionsgleichung festgelegten allgemeinen Wurzelfunktionen ist zu ermitteln: **(1)** Umfassendste Definitionsmenge, **(2)** Nullstelle(n), **(3)** Asymptote(n), **(4)** Relative Extrema, **(5)** Wendepunkt(e), Wendetangente(n) und **(6)** Graph.

425. a) $y = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ **b)** $y = \sqrt{x^2 - 6x + 8}$ **c)** $y = \sqrt{3x^2 - 4x + 1}$

426. a) $y = \sqrt{\frac{x}{1-x^2}}$ **b)** $y = \sqrt[3]{\frac{1+x^2}{x}}$ **c)** $y = \frac{1-x^2}{\sqrt{x^2+1}}$

427. a) $y = \sqrt{\frac{x^3}{x^2 - 3x - 4}}$ **b)** $y = \sqrt[3]{\frac{x^2}{6(x-1)^2}}$ **c)** $y = \sqrt[4]{\frac{x(x^2-5)}{x^2 - x - 2}}$

Bei den durch ihre Zuordnungsgleichung gegebenen Relationen ist zu ermitteln: **(1)** Umfassendste Definitionsmenge, **(2)** Nullstelle(n), **(3)** Relative Extrema, **(4)** Wendepunkt(e), Wendetangente(n) und **(5)** Graph.

428. a) $y^2 = x^4$ **b)** $y^2 = x^2(x-1)$ **c)** $y^2 = 9x^2 - x^4$

429. a) $4y^2 = 9x^2 + x^3$ **b)** $3y^2 = -9x^2 + 4x^3$ **c)** $x^3 = (2y - x^{\frac{1}{2}})^3$

430. a) $y^2 = \frac{(x+3)^3}{27}$ **b)** $y^2x + 1 = x - y^2$ **c)** $y^2 = x^2 \cdot \frac{x-1}{x+1}$

Bei den folgenden Aufgaben ist jeweils die Funktionsgleichung zu bestimmen:

431. Eine Polynomfunktion zweiten Grads hat im Punkt $P_1(-1, 5)$ eine waagrechte Tangente und geht ferner durch $P_2(1, 17)$.

432. Eine Polynomfunktion dritten Grads geht durch $P_1(2, -2)$ und $P_2(4, 8)$. Im Punkt P_1 beträgt der Anstieg $k = -1$, während die zweite Ableitung dort den Wert 2 hat.

433. Im Punkt $P_1(1, 6)$ einer Polynomfunktion dritten Grads beträgt der Anstieg $k = -4$. Im Punkt $P_2(3, 18)$ nimmt die zweite Ableitung den Wert 26 an.

434. Eine Polynomfunktion dritten Grads hat die Nullstelle 1 und geht durch $P(2, 7)$. An der Nullstelle $N_1(1, 0)$ gilt: $f'(1) = 1$, $f''(1) = 10$.

435. Eine Polynomfunktion dritten Grads hat im Punkt $P_1(-2, 8)$ eine waagrechte Tangente. An der Stelle $x_2 = 3$ beträgt der Anstieg -15, an der Stelle $x_3 = 1$ liegt ein Wendepunkt vor.

436. Eine Polynomfunktion dritten Grads hat den relativen Hochpunkt $H(1, 5)$ und den Wendepunkt $W(2, 3)$.

437. Eine Polynomfunktion dritten Grads hat den Wendepunkt $W(1, -1)$ und im Punkt $P(2, -1)$ den Anstieg $k = 2$.

438. Eine Polynomfunktion dritten Grads hat im Punkt $P(-3, 4)$ eine waagrechte Tangente, bei $x = -2$ einen Wendepunkt und die Nullstelle $N(-1, 0)$.

439. Eine Polynomfunktion dritten Grads geht durch $P(2, -9)$ und hat den relativen Hochpunkt $H(-2, 7)$, in welchem die zweite Ableitung den Wert -18 annimmt.

440. Eine Polynomfunktion dritten Grads geht durch $P_1(3, 8)$ und $P_2(1, 6)$ ist Wendepunkt. An der Stelle $x_3 = 4$ liegt ein relatives Extremum vor.

441. Eine Polynomfunktion dritten Grads hat den Wendepunkt $W\left(2, \frac{2}{3}\right)$ und die Nullstelle $N_1(3, 0)$. Der Anstieg der Wendetangente sei $k = -1$.

442. Eine Polynomfunktion dritten Grads schneidet die x-Achse bei $x_1 = 1$, hat im Punkt $P_2(-2, 3)$ ein relatives Extremum und bei $x_3 = 0$ einen Wendepunkt.

443. Eine Polynomfunktion dritten Grads hat in den Punkten $P_1(-2, 11)$ und $P_2(1, y_2)$ relative Extrema. Ferner geht sie durch $P_3(4, -9)$.

444. Eine Polynomfunktion dritten Grads hat das relative Extremum $P(3, -19)$ und den Wendepunkt $W(1, -3)$.

445. Eine Polynomfunktion dritten Grads hat im Punkt $P_1(4, 48)$ den Anstieg $k = 26$. Ferner besitzt sie im Punkt $P_2(-2, 0)$ einen Wendepunkt.

446. Eine Polynomfunktion dritten Grads schneidet die y-Achse bei $y_1 = 7$ und hat im Wendepunkt $W(1, 11)$ den Anstieg $k = 3$.

447. Eine Polynomfunktion dritten Grads hat im Punkt $P_1(2, 4)$ ein relatives Extremum und an der Stelle $x_2 = 3$ eine Nullstelle. Die Tangente im Punkt $P_3(1, y_3)$ schließt mit der positiven x-Achse den Winkel $\alpha = 71{,}565°$ ein.

448. Eine durch den Koordinatenursprung gehende Polynomfunktion dritten Grads geht durch den Punkt $P_2(2, 2)$ und berührt die x-Achse bei $x_3 = 4$.

449. Eine durch den Koordinatenursprung gehende Polynomfunktion vierten Grads geht durch die Punkte $P_1(-2, 12)$ und $P_2(2, y_2)$. P_2 ist ein Wendepunkt. An der Stelle $x_3 = -1$ besitzt die Funktion eine zur x-Achse parallele Wendetangente.

450. Eine Polynomfunktion vierten Grads, die die x-Achse im Ursprung berührt, hat im Punkt $P_2(2, 2)$ eine gegen die positive x-Achse unter einem Winkel $\alpha = 45°$ geneigte Wendetangente.

451. Eine Polynomfunktion vierten Grads geht durch die Punkte $P_1(-1, 9)$ und $P_2(1, 1)$ und berührt die x-Achse an der Stelle $x_3 = 2$. P_2 ist ein relatives Extremum.

452. Eine zur y-Achse symmetrische Polynomfunktion vierten Grads geht durch den Punkt $P_1(-2, 16)$ und hat im Punkt $P_2(1, 7)$ eine zur x-Achse parallele Tangente.

Anleitung: In der Funktionsgleichung $y = f(x)$ dürfen wegen der Symmetrie zur y-Achse nur Potenzen von x mit gerader Hochzahl auftreten, da sonst die Bedingung $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ nicht erfüllt wäre. Der allgemeine Ansatz lautet daher: $y = ax^4 + bx^2 + c$.

453. Eine zur y-Achse symmetrische Polynomfunktion vierten Grads hat im Punkt $P_1(-4, 1)$ ein relatives Extremum und schneidet die y-Achse bei $y_2 = 5$.

454. Eine Polynomfunktion fünften Grads hat im Koordinatenursprung die x-Achse als Wendetangente und geht durch die Punkte $P_1(2, 56)$ und $P_2(-1, 2)$. Der Punkt P_2 ist ein relativer Extrempunkt.

455. Von der Funktion mit der Gleichung $y = \frac{a - bx^2}{x^2 - 4}$ kennt man **a)** $P(1, 1)$, $f'(4) = 0$ **b)** $N(3, 0)$ Anstieg bei $x_2 = 1$ ist $k = -1$. Man berechne a und b.

456. Die Funktion $f: x \mapsto \frac{2x^2 - 2}{ax^2 - 4}$ hat die Asymptoten a_1: $x = -3$ und a_2: $x = 3$. Man berechne den Koeffizienten a.

457. Die Funktion $f: x \mapsto \frac{2x^3 - 6}{ax^2 - bx + c}$ hat **a)** die Asymptote a: $y = 4x + 1$ und ein relatives Extremum bei $x_1 = -3$ **b)** die Asymptote a: $y = -x + 4$ und ein relatives Extremum bei $x_1 = -1$ **c)** die Asymptote a: $y = 2x - 4$ und einen Wendepunkt bei $x_1 = 1$. Koeffizienten a, b, c?

458. Die Funktion mit der Gleichung $y = \frac{a}{x^2} + b$ berührt die Gerade mit der Gleichung $y = -\frac{1}{9}(16x - 38)$ im Punkt $P\left(x, -\frac{2}{9}\right)$. Koeffizienten a, b?

Vermischte Aufgaben

459. Gegeben ist $y = x^4 - 4x^3 + 6$. Gesucht ist die Gleichung der Tangente im Kurvenpunkt $P(1,\ y)$. Weiters sind die Schnittpunkte der Tangente mit der Kurve zu berechnen.

460. Es ist eine nach steigenden Argumenten geordnete Tabelle der y-Werte und y'-Werte der Funktion mit der Gleichung $y = -\frac{x^4}{8} + \frac{x^3}{2} + 2$ im Intervall $[-2,\ 4{,}5]$ aufzustellen. In die Tabelle sind auch die berechneten Extrema, Wendepunkte und Nullstellen aufzunehmen. (Nichtganzzahlige x-Werte sind mit 5 Nachkommastellen, y-Werte mit 3 und y'-Werte mit 2 Nachkommastellen anzugeben.) Anschließend ist die Funktion in einem kartesischen Koordinatensystem darzustellen.

461. Von einer Polynomfunktion dritten Grads sind der Wendepunkt $W(3{,}5,\ 19{,}25)$ und ein Extrempunkt $P(5,\ 12{,}5)$ gegeben. Handelt es sich bei dem Punkt P um einen Hoch- oder um einen Tiefpunkt? Wie lauten die Koordinaten des zweiten Extrempunkts der Parabel?

462. **Gegeben:** **a)** $y = 0{,}1x^4 - 0{,}8x^3 + 1{,}8x^2$, $[-1,\ 4]$ **b)** $y = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{6}x$, $[3,\ 4]$

Gesucht: Nullstellen, Hoch-, Tief- und Sattelpunkte, Wendepunkte, Gleichung der Wendetangenten, Graph der Funktion.

463. **Gegeben:** **a)** $y = \frac{x^2+1}{x^2-4}$, $[-5,\ 5]$ **b)** $y = \frac{x^2}{40} - \frac{9x}{20} + \frac{7}{2} + \frac{5}{x}$, $[-15,\ 15]$

Gesucht: Umfassendste Definitionsmenge, Symmetrieeigenschaften, Nullstellen, Extrema, Wendepunkte, Polstellen, Asymptoten, Funktionsgraph.

464. Die Funktion mit der Gleichung $y = \frac{ax^3+b}{cx^2+dx-1}$ geht durch den Ursprung und besitzt die Asymptoten $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{2}$ und $y = x + e$. Funktionsgleichung?

Bemerkung: Polstellen sind senkrechte Asymptoten ...

465. **a)** Das Nennerpolynom einer gebrochenrationalen Funktion $y = \frac{Z(x)}{N(x)}$ ist ein quadratisches Polynom in Normalform (d. h. der Koeffizient des quadratischen Glieds ist 1), dessen einzige Nullstelle bei $x = -2$ liegt. Wie lautet die Gleichung von $N(x)$?

b) Die zu $y = \frac{Z(x)}{N(x)}$ gehörige Kurve besitzt eine Asymptote g mit der Gleichung $y_1 = x^2 - x - 2$. Welchen Grad hat demnach das Zählerpolynom $Z(x)$? Welches Polynom hat man hierfür anzusetzen?

c) Die Funktion $y = \frac{Z(x)}{N(x)}$ hat bei $x = 0$ den Funktionswert $y = -3$. Nun bestimme man möglichst viele Koeffizienten von $Z(x)$. Wie lautet die Gleichung von $Z(x)$?

Anleitung: Die Division $Z(x) : N(x)$ ist auszuführen. Anschließend sind die Koeffizienten des Quotienten mit jenen der Asymptote zu vergleichen.

d) In Ermangelung einer zusätzlichen Information konnte in Aufgabe **c)** der Koeffizient d des linearen Glieds von $Z(x)$ **nicht** bestimmt werden. Welchen Wert d_0 muss d annehmen, wenn Zähler und Nenner die selbe Nullstelle besitzen? Der Graph der Funktion ist für $d = d_0$ gemeinsam mit seinen Asymptoten in einem Schaubild darzustellen.

e) Durch Variation des Koeffizienten d entsteht eine Kurvenschar. Wir wählen aus ihr eine signifikante[1] Teilmenge: $d = d_0 + \varepsilon$ (für $\varepsilon = 1,\ 0{,}5,\ 0{,}2,\ 0{,}1,\ 0{,}05,\ -0{,}05,\ -0{,}1,\ -0{,}2,\ -0{,}5,\ -1$). Sämtliche Graphen sind in das Schaubild der Aufgabe **d)** einzufügen.

Anleitung: Alle Kurven haben die selben Asymptoten!

f) Wodurch erklärt sich der erstaunliche Formenreichtum der in Aufgabe **d)** und **e)** ausgewählten Kurvenschar?

Anleitung: Man vergleiche die Nullstelle des Nenners mit der jeweils negativen Nullstelle des Zählers für die entsprechenden Werte von d.

---

[1]) signifikant: wichtig, bedeutsam, typisch.

Klassifikation des Punktes $(x_0,\ f(x_0))$		$f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$			Unter folgenden Bedingungen spricht man **auch** von Flachpunkten
		$f'(x_0)$	$f^{(n)}(x_0)$	für n gilt	
relatives Extremum	Maximum	$= 0$ (horizontale Tangente)	< 0	n gerade $n \geqslant 2$	Für $n \geqslant 4$ (n gerade) handelt es sich um einen Rechts-rechts-Flachpunkt
	Minimum		> 0		Links-links-Flachpunkt
Sattelpunkt (Wendepunkt mit horizontaler Tangente)	Links-rechts-Sattelpunkt		< 0	n ungerade $n \geqslant 3$	Für $n \geqslant 5$ (n ungerade) handelt es sich um einen Links-rechts-Flachpunkt
	Rechts-links-Sattelpunkt		> 0		Rechts-links-Flachpunkt
Wendepunkt	Links-rechts-Wendepunkt	$\neq 0$ (schräge Tangente)	< 0		Links-rechts-Flachpunkt
	Rechts-links-Wendepunkt		> 0		Rechts-links-Flachpunkt
Flachpunkt	Rechts-rechts-Flachpunkt		< 0	n gerade $n \geqslant 4$	
	Links-links-Flachpunkt		> 0		

466. a) Man zeige, dass die Tabelle auf Seite 105 für $n = 2, 3, 4$ in die Tabelle auf Seite 92 übergeht.

b) Wie man sich leicht überzeugen kann, liegt der Ursprung (0, 0) auf dem Graphen mit der Funktionsgleichung (1) $y = ax^2$ (2) $y = ax^n + bx$ für $a \in \{-1, +1\}$, $b \in \{-1, 0, +1\}$, $n \in \{3, \ldots, 7\}$. Der Ursprung (0, 0) ist bezüglich der jeweiligen Kurve anhand der Tabelle zu charakterisieren. Anschließend ist jeweils der zugehörige Funktionsgraph im Intervall $[-1, +1]$ anzufertigen.

467.

Um das Experimentierflugzeug ATTAS der DFVLR (vgl. Foto) zu konstruieren, sind tiefe Kenntnisse des aerodynamischen Auftriebs erforderlich. Dieser ist vom „Anstellwinkel" α der Tragflächen abhängig.

Angenommen wir verfügen über die nebenstehenden Daten, die in mathematischer Kurzschreibweise gegeben sind.

$f(0) = 0{,}03$
$f''(0) = 0$
$f'(0) = 0{,}09$
$f(13) = 0{,}95$
$f'(13) = 0$
$f(\alpha) - f(0) = -(f(-\alpha) - f(0)),$
$\alpha \in \mathbb{R}$
$\alpha \in [-10°, 20°]$

a) Was bedeuten diese Daten für die zugehörige Kurve[1)]?

b) Die Daten bestimmen eindeutig eine Polynomfunktion 5. Grades $f(\alpha) = a\alpha^5 + b\alpha^4 + c\alpha^3 + d\alpha^2 + e\alpha + f$.

Wie lauten die Koeffizienten?

c) Die Funktion $\alpha \mapsto f(\alpha)$ ist über $[-10°, 20°]$ grafisch darzustellen.

468. Zur Erforschung der oberen Atmosphäre und der Ionosphäre werden bereits seit vielen Jahren Höhenforschungsraketen eingesetzt, um mittels Messgeräten in genau definierten Höhen verschiedene Parameter direkt zu erfassen. Die so gewonnenen Daten ergänzen in sinnvoller Weise die durch Fernmessung vom Boden oder mittels Satelliten gewonnenen Informationen. Als Beispiele seien hier die Nordlichtuntersuchungen sowie Messungen der Konzentration der Ozonschicht genannt.

Ein völlig neuer Anwendungsbereich ist der Einsatz von Höhenforschungsraketen für die Schwerelosigkeitsforschung. Unser ganzes Leben wird vom NEWTONschen Gravitationsgesetz bestimmt. Die nahezu völlige Ausschaltung der Schwerkraft eröffnet der wissenschaftlichen und technologischen Forschung neue Möglichkeiten, z. B. die Herstellung neuer Legierungen mit gleichmäßiger Verteilung der unterschiedlichen Komponenten, die Züchtung großer fehlerfreier Kristalle für die Halbleiterindustrie, die Herstellung neuer biologischer und pharmazeutischer Produkte.

Das Foto zeigt den Start einer Höhenforschungsrakete.

1) Es handelt sich hierbei um die Kurve des Auftriebsbeiwerts.

468. (Fortsetzung)

Schwerelosigkeit erreicht man im Zustand des freien Falls. Dieser Zustand kann auf der Erde nur für kurze Zeitspannen erzielt werden, und zwar in Falltürmen (etwa 4,5 Sekunden Fallzeit bei einer Höhe von 100 m), durch Flugzeuge auf Parabelbahnen (etwa 30 Sekunden) und durch Höhenforschungsraketen während des antriebslosen Flugs (5—7 Minuten). In Satelliten oder Raumstationen kann die Schwerkraft über lange Zeit aufgehoben werden. Die auf eine 300 km über der Erde kreisende Raumstation wirkende Schwerkraft ist zwar nur geringfügig schwächer als auf der Oberfläche unseres Planeten, aber die Fliehkraft des um die Erde kreisenden Raumfahrzeugs hebt sie völlig auf.

Höhenforschungsraketen bieten eine ausgezeichnete Möglichkeit, Experimente kostengünstig zu testen und für einen späteren Einsatz in Weltraumstationen vorzubereiten. Mehrmals jährlich werden von der Raketenbasis in Kiruna (Nordschweden) Raketen verschiedener Typen für diese Zwecke gestartet.

Die Flugbahn der britischen Höhenforschungsrakete Skylark VII soll im Folgenden näher untersucht werden. Als Vereinfachung ist der bremsende Einfluss der Atmosphäre vernachlässigt, und es wird der zweistufige Antrieb der Skylark VII mit Maximalbeschleunigungen der 12- bzw. 9-fachen Erdbeschleunigung und Brenndauern von 3,7 s bzw. 39 s durch ein einstufiges Triebwerk simuliert. Während der Brenndauer von 0 s bis 44 s kann die Beschleunigung b (in ms^{-2}) durch ein Polynom zweiten Grads $b(t) = 0{,}0192t^2 + 1{,}128t + 10$ beschrieben werden. Die nebenstehende Figur zeigt den zeitlichen Verlauf von Beschleunigung b, Geschwindigkeit v und Flughöhe h der Skylark.

a) Welcher mathematische Zusammenhang besteht zwischen den drei dargestellten Funktionen?

b) Man beschreibe die physikalische Bedeutung folgender Punkte bzw. Kurventeile (so weit sie vorhanden sind)

(1) Extremwerte

(2) lineare Kurventeile

(3) Kurventeile mit positiven bzw. negativen Steigungen

(4) Sprungstellen

(5) Wendepunkte

c) Der zeitliche Verlauf der Flughöhe h während der Antriebsphase ($t \leq 44$ s) und während der antriebslosen Flugphase ($t > 44$ s), in der die Gesetze des freien Falls ($b(t) \overset{\text{DEF}}{=} g = -9{,}81\,ms^{-2}$) gelten, kann jeweils durch Polynome beschrieben werden. Die Koeffizienten beider Polynome sind zu bestimmen, wobei die Anfangsbedingungen zum Zeitpunkt t = 0 s sowie die Forderung der Kontinuität von Flughöhe und Geschwindigkeit zum Zeitpunkt des Brennschlusses (t = 44 s) zu beachten sind.

d) Man berechne die Maximalbeschleunigung b_{max}, die maximale Flughöhe h_{max} sowie die Zeitpunkte, zu denen diese erreicht werden.

e) Während des ballistischen (antriebslosen) Flugs befinden sich Experimente im Zustand der Schwerelosigkeit. Wegen der Störeffekte der Atmosphäre wird dieser Zustand in Höhen ab 100 km erreicht. Es ist die maximal zur Verfügung stehende Zeitspanne für die Durchführung der Experimente zu ermitteln.

6. Extremwertaufgaben

„Rechtecke gleichen Umfangs haben den gleichen Flächeninhalt.“ Die meisten bei einer kleinen Umfrage interviewten Personen entschieden sich dafür, diesen Satz als richtig anzusehen.

Dies lässt sich aber leicht widerlegen: Die beiden in der Außenspalte dargestellten Rechtecke haben denselben Umfang $u = 12\,\text{cm}$.

$A_1 = 5\,\text{cm}^2$
1 cm
5 cm

$A_2 = 8\,\text{cm}^2$
2 cm
4 cm

Trotzdem sind ihre Flächeninhalte verschieden:

$$A_1 = 5\,\text{cm} \cdot 1\,\text{cm} = \mathbf{5\,cm^2} \qquad A_2 = 4\,\text{cm} \cdot 2\,\text{cm} = \mathbf{8\,cm^2}$$

Für den Flächeninhalt A eines Rechtecks mit den Seiten x und y gilt bekanntlich: $A = xy$.

Da sich x in gewissen Grenzen ändern kann — y ergibt sich zwangsläufig aus der Beziehung $x + y = \frac{u}{2}$ — ist anzunehmen, dass eine bestimmte Kombination zweier Werte für x und y ein Rechteck mit maximalem Flächeninhalt liefert.

Und damit sind wir schon bei der typischen Fragestellung einer sogenannten **Extremwertaufgabe**.

Man nennt die Bestimmungsgleichung für jene Größe, die ein Extremum (Maximum oder Minimum) annehmen soll, die **Hauptbedingung (HB)**.

Jene Gleichung aber, die die vorgegebenen Beziehungen zwischen den auftretenden (und scheinbar unabhängigen) Variablen festlegt, heißt **Nebenbedingung (NB)**.

Beispiel:

Man berechne unter allen Rechtecken mit dem Umfang $u = 12\,\text{cm}$ jenes mit dem größten Flächeninhalt.

Lösung:

In unserem Beispiel lautet die Hauptbedingung (vgl. Außenspalte)
HB: $A = xy$

Sie enthält **zwei Variable** x, y.

Wenn A möglichst groß werden soll, dann müssen x und y maximiert werden.

Wählen wir also beide unendlich groß, dann nimmt A offensichtlich das absolute Maximum an, oder?

Nun, das wäre richtig, wenn wir die Rechteckseiten **getrennt** variieren dürften, d. h. wenn x und y voneinander unabhängige Variable wären.

Wir haben aber einen Rechtecksumfang $u = 12\,\text{cm}$ vorausgesetzt und unser unendlich großes Rechteck hat doch sicher einen „etwas“ größeren Umfang.

Mit anderen Worten: Wir suchen zwar unter **sehr vielen** Rechtecken, aber nicht unter **allen**. Durch unsere Aufgabenstellung haben wir nämlich das Suchgebiet bereits eingeschränkt.

Diese Einschränkung formulieren wir als Nebenbedingung.

NB: $\frac{u}{2} = x + y \Rightarrow y = \frac{u}{2} - x = 6 - x$

$$\mathbf{y = 6 - x}$$

Setzt man dies in die Hauptbedingung ein, so reduziert sich diese auf eine Funktionsgleichung in **einer Variablen.**

HB: $A(x) = xy = x(6 - x)$[1]

$$\mathbf{A(x) = 6x - x^2}$$

A in cm^2
$A(x) = 6x^2 - x$
x in cm

Oft ist es hilfreich, den Graphen der zu optimierenden Funktion anzufertigen (vgl. obige Figur). Bei dieser Gelegenheit können wir unsere Extremwertaufgabe grafisch lösen: Die Funktion $A(x) = 6x - x^2$ hat bei $x = 3$ eine Extremstelle.

[1]) Ebenso könnte man in der Nebenbedingung x explizit ausdrücken und in die Hauptbedingung einsetzen.

Wichtiger Bestandteil unseres Problems ist die **Definitionsmenge D** für die unabhängige Variable x.

Als Seite eines Rechtecks vom Umfang $u = 12$ cm kann x nur zwischen 0 und $6\left(=\frac{u}{2}\right)$ liegen.

Weiters ist der Funktionsterm $6x - x^2$ dort überall definiert (z. B. tritt nirgends eine Division durch Null auf), so dass für die **Definitionsmenge** D gilt: $D = [0, 6] \Rightarrow$ HB: $A = 6x - x^2$, $x \in [0, 6]$

Jetzt sind alle Voraussetzungen zur Ermittlung der (relativen) Extremstellen einer Funktionsgleichung (Hauptbedingung) über ihrer Definitionsmenge ($D = [0, 6]$) erfüllt.

$$A(x) = 6x - x^2$$
$$A'(x) = 6 - 2x$$
$$A''(x) = -2$$
$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 6 - 2x = 0$$
$$\left.\begin{array}{r} x = 3 \\ A''(3) = -2 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A(x) \text{ wird für } x = 3 \text{ relativ maximal.}$$

Aus der Nebenbedingung ergibt sich für $x = 3$ der Wert der zweiten Rechteckseite mit $y = 3$.

$\Rightarrow$ Der größte Flächeninhalt eines Rechtecks mit einem Umfang $u = 12$ cm wird von einem **Quadrat** mit der Seite $x = y = 3$ cm $\left(=\frac{u}{4}\right)$ angenommen.

$A_{max} = 9\ \text{cm}^2$

Bei einigen Extremwertaufgaben (wie beim nebenstehenden Beispiel) ist die Nebenbedingung äußerst einfach zu finden und zu formulieren. Sehr häufig kommt man bei geometrischen Aufgaben mit dem pythagoräischen Lehrsatz oder dem Strahlensatz auf Grund der Ähnlichkeit geometrischer Figuren zum Ziel.

Fassen wir zusammen: Eine Größe (z. B. ein Flächeninhalt A, ein Volumen V usw.) hängt von mehreren Variablen ab und soll extremal werden.

Die **Hauptbedingung (HB)** ist die Gleichung der dabei vorliegenden Funktion. Sie enthält normalerweise mindestens zwei (zunächst unabhängige) Variable.

Jene Gleichung(en), die die Beziehung(en) zwischen diesen Variablen festlegt (festlegen), nennt man **Nebenbedingung(en) (NB)**.

Mit Hilfe der Nebenbedingung(en) werden die unabhängigen Variablen in der Hauptbedingung auf eine einzige reduziert.

Ganz so schwierig wie unser Schüler glaubt sind Extremwertaufgaben auch wieder nicht. Wir laden die Leserinnen und Leser ein, umzublättern. Auf der nächsten Seite wird gezeigt, dass sich die Lösung einer Extremwertaufgabe in 9 Teilschritte zerlegen lässt.

Beispiel:

Dem Dreieck ABC mit der Seite $c = 10$ cm und der zugehörigen Höhe $h = 4$ cm ist das flächengrößte Rechteck PQRS so einzuschreiben, dass eine Rechteckseite auf c zu liegen kommt.

Lösung:

(1)

(2) HB: $\mathbf{A = xy} \to$ maximal

(3) Die Dreiecke ABC und SRC sind ähnlich. Es gilt daher die Proportion

NB: $c:h = x:(h-y) \Leftrightarrow c(h-y) = hx$

NB: $\mathbf{x = \frac{c(h-y)}{h}}$

(4) $A(y) = xy = \frac{c(h-y)}{h} \cdot y = \frac{c}{h}(hy - y^2)$

HB: $\mathbf{A(y) = \frac{c}{h}(hy - y^2)}$

Als einzige unabhängige Variable tritt nur mehr y auf. (c und h sind Parameter.)

(5) $\frac{c}{h}$ ist ein konstanter positiver Faktor im Term $\frac{c}{h}(hy-y^2)$ der Hauptbedingung. Somit darf $\frac{c}{h}$ weggelassen werden (vgl. Außenspalte) und wir können schreiben ($\frac{c}{h} = \frac{10}{4} = 2{,}5 = \text{konstant}$):

HB: $\mathbf{\bar{A}(y) = hy - y^2}$

(6) $\bar{A}(y) = hy - y^2, \; y \in [0,h]$

$\bar{A}'(y) = h - 2y$

$\bar{A}'(y) = h - 2y = 0 \Leftrightarrow \mathbf{y = \frac{h}{2}}$ $\qquad$ $\mathbf{y = \frac{h}{2} = 2\text{ cm}}$

(7) $\bar{A}''(y) = -2$

$\bar{A}''\left(\frac{h}{2}\right) = -2 < 0 \Rightarrow \bar{A}(y)$ bzw. $A(y)$ besitzt bei $y = \frac{h}{2}$ ein **relatives Maximum**.

(8) $x = \frac{c(h-y)}{h} = \frac{c\left(h - \frac{h}{2}\right)}{h} = \frac{c}{2}$ $\qquad$ $\mathbf{x = \frac{c}{2} = 5\text{ cm}}$

(9) $A_{max} = xy = \frac{c}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{ch}{4} = 10$ $\qquad$ $\mathbf{A_{max} = \frac{ch}{4} = 10\text{ cm}^2}$

Das gesuchte Rechteck PQRS hat die Seiten $x = \frac{c}{2}$ (= 5 cm) und $y = \frac{h}{2}$ (= 2 cm). Sein Flächeninhalt A_{max} (= 10 cm²) ist halb so groß wie jenes des Dreiecks ABC.

(1) Wenn möglich und notwendig, wird man den Sachverhalt in einer **Skizze** darstellen.

(2) Aufstellen der **Hauptbedingung**.

(3) Aufstellen der **Nebenbedingung(en)**.

(4) **Substitution** in der Hauptbedingung. Dadurch reduzieren sich die (unabhängigen) Variablen auf eine einzige.

(5) **Vereinfachen der Hauptbedingung** durch Weglassen von

- **konstanten Summanden**[1] ($f(x) + c$ ist extremal) $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ ($f(x)$ ist extremal)
- **konstanten positiven Faktoren**[1] ($k\,f(x)$ ist extremal) $\Leftrightarrow$ $f(x)$ ist extremal), $k > 0$
- **konstanten positiven Exponenten**[1], die den Funktionsterm $f(x)$ potenzieren ($(f(x))^n$ ist extremal) $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ ($f(x)$ ist extremal), falls $f(x) > 0$, $n \in \mathbb{R}^{+}$ [2].

(6) Feststellen der **Definitionsmenge D** der vereinfachten Hauptbedingung und Berechnung ihrer **möglichen Extremstellen.**

(7) Bestimmen der **Art des relativen Extremums** durch Berechnung der **zweiten** Ableitung an der „möglichen Extremstelle" aus (6).

(8) Ermittlung der **Werte** aller **übrigen Variablen** mit Hilfe der NB und den in (6) und (7) bestimmten Extremstellen.

(9) Berechnung des **Extremwerts**.

[1]) **Variable** als Summanden, Faktoren oder Exponenten dürfen freilich **nicht** weggelassen werden.

[2]) Allerdings verzichtet man dabei auf Extremwerte an Nullstellen.

Beispiel:

Einer Halbkugel mit dem Radius $r = 5\,dm$ ist jener Drehkegel einzuschreiben, dessen Spitze im Mittelpunkt der Halbkugel liegt und der die größte Oberfläche besitzt.

Lösung:

(1)

x
y
r
r

(2) HB: $O(x) = \pi x^2 + \pi xr = \pi(x^2 + xr) \rightarrow$ maximal.

(3) NB entfällt, da nur eine unabhängige Variable auftritt. r ist ein Parameter.

(Wäre hingegen der **volumsgrößte** Drehkegel gesucht, so würde die Höhe y ins Spiel kommen. Als Nebenbedingung wäre dann der pythagoräische Lehrsatz $x^2 + y^2 = r^2$ angebracht.)

(4) Substitution entfällt.

(5) Vereinfachung: $\overline{O}(x) = x^2 + xr$ (Weglassen des konstanten positiven Faktors π.)

(6) $\overline{O}(x) = x^2 + xr,\ x \in [0, r]$

$\overline{O}'(x) = 2x + r = 0$

$x = -\frac{r}{2} \notin [0, r]!$

$\Rightarrow \overline{O}(x)$ bzw. $O(x)$ besitzt innerhalb der Definitionsmenge $[0, r]$ **kein** relatives Extremum.

Da $f\colon x \mapsto \overline{O}(x)$ im Intervall $[0, r]$ **streng monoton wächst**, existieren nur **Randextrema** (vgl. nebenstehende Figur).

Wir interessieren uns nur für das **Randmaximum** R.

(7) Entfällt.

(8) $O(x)$ wird extremal für $x = 0$ (Randminimum) bzw. $x = r$ (Randmaximum). $\mathbf{x = r}$

(9) $O_{min} = \pi(0 + 0 \cdot r) = 0$ (Der Kegel artet hier in eine Strecke aus.)

$O_{max} = \pi(r^2 + r \cdot r) = 2\pi r^2$ (Der Kegel artet hier in eine doppelte Kreisscheibe aus.)

$$O_{max} = 2\pi r^2$$

$\overline{O}$
$2r^2$
r^2
R
f
$-\frac{r}{2}$
$-r$
D
r
T

Ist die Funktion $f(x)$ auf ihrem Definitionsintervall D streng monoton (wachsend oder fallend), so nimmt sie ihre **absoluten Extrema** an den **Intervallgrenzen** an. Wir sprechen dabei vom **Randmaximum** bzw. **Randminimum**. Etwaige relative Extrema können dann nur außerhalb von D liegen.

AUFGABEN

469. Das Produkt zweier natürlicher Zahlen, deren Summe 10 beträgt, soll ein Maximum werden. Wie sind die Zahlen zu wählen?

a) Die Aufgabe ist durch Testen sämtlicher Möglichkeiten zu lösen. Man stelle diese in einem Koordinatensystem dar, wobei als Abszisse ein Summand, als Ordinate das zugehörige Produkt zu wählen ist.

b) Lösung mittels Differenzialrechnung.

470. Die Summe der Quadrate zweier natürlicher Zahlen, deren Summe 6 beträgt, soll ein Minimum werden. Wie sind die Zahlen zu wählen?

a) Die Aufgabe ist durch Testen sämtlicher Möglichkeiten zu lösen. Man stelle diese in einem Koordinatensystem dar, wobei als Abszisse ein Summand, als Ordinate die zugehörige Quadratsumme zu wählen ist.

b) Lösung mittels Differenzialrechnung.

471. Die Summe der Kuben zweier natürlicher Zahlen, deren Summe 4 beträgt, soll ein Minimum werden. Wie sind die Zahlen zu wählen?

a) Die Aufgabe ist durch Testen sämtlicher Möglichkeiten zu lösen. Man stelle diese in einem Koordinatensystem dar, wobei als Abszisse ein Summand, als Ordinate die zugehörige Kubensumme zu wählen ist.

b) Lösung mittels Differenzialrechnung.

472. Eine natürliche Zahl a ist zu zerlegen

a) in zwei Summanden, so dass ihr Produkt
b) in zwei Summanden, so dass die Summe ihrer Quadrate
c) in zwei Summanden, so dass die Summe ihrer Kuben
d) in zwei Faktoren, so dass die Summe der Faktoren
e) in zwei Faktoren, so dass die Summe der Quadrate der Faktoren
f) in zwei Summanden, so dass die Summe aus dem Quadrat des ersten und dem doppelten Quadrat des zweiten Summanden

ein Extremum wird. Es ist jeweils zu untersuchen, ob ein Maximum oder Minimum vorliegt.

473. Aus einem rechteckigen Karton mit den Seitenlängen **a)** $l = 40$ cm und $b = 25$ cm **b)** $l = 8$ dm und $b = 5$ dm ist durch Ausschneiden von Quadraten der Seitenlänge x an den Ecken und anschließendes Aufbiegen der Seitenwände eine quaderförmige, oben offene Schachtel herzustellen.

Wie groß muss x gewählt werden, damit das Volumen der Schachtel maximal wird? Wie groß ist dieses? Wie groß ist dabei der Abfall (das ist die Fläche der ausgeschnittenen Quadrate) absolut und relativ zur ursprünglichen Kartonfläche?

474. Aus einem quadratischen Blech der Seitenlänge l soll durch Ausschneiden von quadratischen Ecken der Länge x und Aufbiegen der entstehenden Seitenwände ein auf einer Seite offenes Kleingehäuse in der Form eines quadratischen Prismas hergestellt werden.

Wie groß sind die auszuschneidenden Ecken zu wählen, damit das Volumen maximal wird? Man gebe auch die Gehäuseabmessungen und das Volumen an.

475. Ein Volksschüler soll das Netz eines Quaders zeichnen und daraus einen Quader basteln. Er nimmt dazu ein quadratisches Blatt Papier der Seitenlänge l.

Wie muss er die Abmessungen wählen, damit sein gebastelter Körper möglichst großen Rauminhalt hat? Wie groß ist dieser?

476. Wie lang sind die Seiten a, b des flächengrößten Rechtecks **a)** mit einem Umfang $u = 24$ cm **b)** für einen beliebigen Umfang u? Wie groß ist seine Fläche?

477. Wie groß sind die Abmessungen und der Flächeninhalt der größten rechteckigen Wiese, die mit 360 m Stacheldraht dreifach eingezäunt werden kann?

478. Eine Strecke a ist so in vier Teile zu zerlegen, dass das aus den Teilstrecken gebildete Rechteck maximalen Flächeninhalt besitzt. Man berechne A_{max}!

479. Ein rechteckiges Feld mit dem Flächeninhalt $A = 1536\,m^2$ soll eingezäunt werden. Anschließend soll es durch einen weiteren Zaun — parallel zu einer der Seiten — in zwei Teile geteilt werden, so dass die Gesamtlänge des Zauns ein Minimum wird.

Wie müssen sich die Seiten des Felds verhalten?

x
y

480. Einem Quadrat mit der Seitenlänge a ist ein gleichschenkeliges Dreieck PQR mit größtem Flächeninhalt A_1 einzuschreiben (vgl. nebenstehende Figur). Wie groß ist A_1?

Anleitung: $A_1 = a^2 - A_2 - 2A_3$

Q
A_3
R
A_1
a
A_3
A_2
a – x
P
x

481.

S
R
a
P
$(a-x)\sqrt{2}$
$x\sqrt{2}$
Q
a – x
x

Dem Quadrat in nebenstehender Figur (Seitenlänge a) ist das flächengrößte Rechteck PQRS einzuschreiben. Wie groß ist seine Fläche?

482. Von allen Kreissektoren **a)** mit dem Umfang $u = 100$ cm **b)** mit einem beliebigen Umfang u ist jener mit maximalem Flächeninhalt A gesucht. Wie groß ist dieser Flächeninhalt?

Anleitung: $A = \frac{br}{2}$

r
M
α
A
b
r

483. In einer Schule soll ein Getränkeautomat aufgestellt werden. Eine Umfrage ergibt, dass bei einem Verkaufspreis von 1,60 Euro pro Dose „Die neue laue Brühe" ein täglicher Verkauf von 200 Stück erwartet werden kann. Weiters resultiert aus der Befragung, dass sich der Absatz pro 0,20 Euro Preisänderung um 50 Stück linear verändern würde, also bei einem Preis von 1,40 Euro würden 250 Stück abgesetzt, bei einem Preis von 1,80 Euro nur 150 Stück, ...

Bei welchem Verkaufspreis wären die Einnahmen aus dem Automaten maximal? Wie groß sind diese?

484. Ein Lastkraftwagen unterliegt einem jährlichen Wertverlust von 9000,— Euro. Seine Verwendung liefert einen jährlichen Ertrag von 40000,— Euro. Die Betriebskosten betragen im ersten Jahr 10000,— Euro und steigen in jedem weiteren Jahr um 2000,— Euro.

Nach wie vielen Jahren ist der günstigste Verkaufszeitpunkt, d. h. der erzielte Gesamtgewinn am größten?

Anleitung: Die Betriebskosten bilden eine arithmetische Folge.

485. Wird eine Musik-CD zu einem bestimmten Preis p (in Euro) angeboten, so besteht eine Nachfrage von $x = 30\,000 - 1000\,p$[1] (Stück). (Hier wird angenommen, dass die Nachfrage sinkt, wenn der Preis steigt.) Der sich daraus ergebende Umsatz U ist von der Anzahl der verkauften Stück und dem zugehörigen Preis abhängig: $U = px$.

Der maximale Umsatz ist zu ermitteln.

486. Beim Verkauf einer Zeitschrift wurde festgestellt, dass die Nachfrage bei steigendem Stückpreis **linear** absinkt. So wurden beim Preis von 3,— Euro pro Einzelexemplar 1500 Stück verkauft, bei 5,— Euro hingegen nur 1000 Stück.

Bei welchem Stückpreis lässt sich der größtmögliche Umsatz (= Stückpreis mal Stückzahl) erzielen?

487. a) Aus einer Strecke der Länge l sind die Basis c und die Höhe h_c eines gleichschenkeligen Dreiecks derart zu bilden, so dass die zugehörige Dreiecksfläche A extremal wird. Wie groß sind c, h_c, A?

b) Liegt ein Minimum vor? Die Antwort ist zu begründen.

488. Von allen rechtwinkeligen Dreiecken mit gegebenem Umfang u ist jenes herauszufinden, das eine möglichst kurze Hypotenuse c aufweist. Diese ist zu bestimmen.

489. Man zeige, dass das gleichseitige Dreieck unter allen gleichschenkeligen Dreiecken gleichen Umfangs u den größten Flächeninhalt aufweist.

Anleitung: $A = \sqrt{s(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$ (HERONsche Flächenformel), $s = \frac{u}{2}$, $a = b$, $c = u - 2a$, ...

490. Von allen Dreiecken mit der Seitenlänge c und dem Umfang u sind die Seitenlängen a und b jenes Dreiecks zu berechnen, das den maximalen Flächeninhalt besitzt!

Anleitung: $A = \sqrt{s(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$ (HERONsche Flächenformel), wobei $s = \frac{u}{2}$ ist. $a = u - b - c$, ...

491. Der Querschnitt eines Abwasserkanals hat die Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis (vgl. nebenstehende Figur).

Wie muss der Kanalquerschnitt bei $u = 10$ m dimensioniert werden, damit die Durchflussmenge maximal wird? Wie groß ist die Querschnittsfläche A?

492. Ein Sportplatz ist so zu dimensionieren, dass bei gegebener Laufstrecke $l = 400$ m die rosa unterlegte Fläche des Platzes maximal wird.

Wie groß ist diese Fläche?

493. Es sind der Radius r und die Höhe h jenes **a)** offenen **b)** geschlossenen zylindrischen Kessels mit $V = 58$ l Inhalt zu bestimmen, dessen Materialkosten minimal sind.

494. Welcher **a)** Drehzylinder **b)** quadratische Quader hat bei gegebener Oberfläche O das größte Volumen V? V_{max}?

495. Welcher **a)** Drehzylinder **b)** quadratische Quader hat bei gegebenem Volumen V die kleinste Oberfläche O? O_{min}?

[1]) Diese Nachfragefunktion wurde beliebig gewählt.

496. Ein Behälter aus Blech, dessen Fassungsvermögen 600 l beträgt, soll die Form eines Zylinders mit unten angesetzter Halbkugel haben (vgl. nebenstehende Figur).

a) Wie ist die Form des Behälters zu wählen, d. h. in welchem Verhältnis stehen Radius r und Höhe h, wenn ein Minimum an Blech verbraucht werden soll?

b) Wie hoch sind die Materialkosten, wenn $1\,m^2$ 101,80 Euro kostet?

c) Wie viel Blech benötigt man, wenn der Behälter aus einem **gleichseitigen** Zylinder mit angesetzter Halbkugel besteht? Um wie viel erhöhen sich dabei die Materialkosten?

N
h
r
M
r

497. Eine Maschine wird um 80 000,— Euro angekauft. Der (gleich bleibende) Jahresertrag beläuft sich auf 50 000,— Euro. Der jährliche Wertverlust beträgt 10 % des Anschaffungswerts.

a) Nach wie vielen Jahren x sollte die Maschine verkauft werden, damit ein maximaler Gesamtgewinn erreicht wird? Dabei ist zu berücksichtigen, dass die jährlichen Kosten im ersten Jahr 5000,— Euro ausmachen und in jedem weiteren Jahr um 2000,— Euro zunehmen.

Anleitung: Gewinn = Jahresertrag + Verkaufserlös – Summe der Instandhaltungskosten
Nach x Jahren ist der Verkaufserlös: $80\,000 - 8000x$
Nach x Jahren ist die Summe der Instandhaltungskosten: $\frac{x}{2}[10\,000 + (x-1)\cdot 2000]$ (arithmetische Folge)

b) Wie hoch ist der maximale Gewinn?

498. a) Von allen gleichschenkeligen Dreiecken der Schenkellänge a ist jenes zu finden, das den größten Flächeninhalt aufweist.

b) Wie groß ist dieser?

c) Welche Form hat das gesuchte Dreieck?

499. a) Man berechne die Länge der Grundlinie eines gleichschenkeligen Dreiecks mit maximalem Flächeninhalt A, wenn $s = 6$ cm die Summe der Längen von Grundlinie c und zugehöriger Höhe h_c ist.

b) Wie lang sind die Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks mit dem Umfang $u = 2$ cm, wenn die Hypotenuse möglichst klein sein soll?

c) Welchen maximalen Flächeninhalt A kann ein gleichschenkeliges Dreieck mit der Schenkellänge $s = 2$ cm annehmen?

d) Welchen maximalen Flächeninhalt A kann ein gleichschenkeliges Dreieck mit dem Umfang $u = 6$ cm annehmen (vgl. nebenstehende Figur)?

e) Welchen maximalen Flächeninhalt A kann ein Dreieck mit der Grundlinie c und dem Umfang u annehmen?

f) Wie groß ist der maximale Flächeninhalt A eines rechtwinkeligen Dreiecks mit der Hypotenuse c?

C
h_c
$\frac{6-c}{2}$
A
$\frac{c}{2}$
B

500. Einem Kreis mit Radius r ist ein Rhombus mit möglichst kleinem Flächeninhalt zu umschreiben. Wie groß ist der Flächeninhalt?

Anleitung: $A = \frac{ef}{2}$, $A_{ABM} = \frac{1}{2}\cdot\frac{ef}{4} = \frac{1}{2}ar \Rightarrow$ (1) $a^2 = \frac{e^2f^2}{16r^2}$ (2) $\frac{e^2}{4} + \frac{f^2}{4} = a^2$

Aus (1) und (2) folgt: $e^2 = \frac{4r^2f^2}{f^2-4r^2}\ \ldots$

D
C
M
$\frac{e}{2}$
r
$\frac{f}{2}$
A
a
B

501. Einem gleichschenkeligen Trapez mit $a = 10\,\text{cm}$, $c = 4\,\text{cm}$ und $h = 3\,\text{cm}$ ist das flächengrößte Rechteck so einzuschreiben, dass eine Seite auf der Basis des Trapezes liegt. Man berechne A_{max}!

502. Einem Kreis mit dem Radius r ist einzuschreiben (vgl. nebenstehende Figur):

a) das Rechteck mit größtem Flächeninhalt A
b) das Rechteck mit größtem Umfang u
c) das gleichschenkelige Dreieck mit größtem Flächeninhalt A.

Anleitung: $r^2 = (h-r)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$

Man berechne jeweils den Extremwert der gefragten Größe.

503. Einem Halbkreis mit dem Radius r ist einzuschreiben:

a) das Rechteck mit maximalem Flächeninhalt A
b) das Rechteck mit maximalem Umfang u

c) das Dreieck mit maximalem Flächeninhalt A
Anleitung: Höhensatz!

d) das gleichschenkelige Dreieck mit maximalem Flächeninhalt A, dessen Spitze im Mittelpunkt des Halbkreises liegt.

Man berechne jeweils den Extremwert der gefragten Größe.

504. Einem Halbkreis (Radius r) ist ein Trapez so einzuschreiben, dass die Basis mit dem Randdurchmesser des Halbkreises zusammenfällt.

a) Wie sind die Abmessungen zu wählen, damit der Flächeninhalt maximal wird?
b) Man bestimme das Verhältnis der Flächeninhalte von Trapez und Halbkreis.

505. Einem Viertelkreis mit dem Radius r soll ein Rechteck so eingeschrieben werden, dass zwei benachbarte Rechteckseiten auf den beiden Begrenzungsradien liegen. Abmessungen und Flächeninhalt des unter dieser Nebenbedingung größten Rechtecks sind zu berechnen.

506. Aus einem Baumstamm mit einem durchgängig gleich großen, kreisförmigen Querschnitt mit dem Durchmesser d, soll ein Balken mit rechteckigem Querschnitt von maximaler Tragfähigkeit T geschnitten werden. Schon die Phönizier gaben an, dass Holzbalken besonders tragfähig seien, wenn sich die Abmessungen des Querschnitts wie die Seite zur Diagonale eines Quadrates verhalten. Man untersuche diese Aussage.

Anleitung: $T = cbh^2$, c ..... Proportionalitätsfaktor

507. Von allen Rechtecken mit dem Umfang u ist jenes mit der kürzesten Diagonale d zu ermitteln.

508. Man zeige: Wählt man bei einem kegelförmigen Zelt mit vorgegebenem Volumen V die Höhe $h = r\sqrt{2}$, so ist der Materialaufwand minimal.

509. Eine Speiseglocke habe die Form einer Halbkugel mit dem Radius r = 30 cm. Welche Maße und welchen Inhalt hat das volumsgrößte, zylindrische Gefäß, das unter diese Glocke passt?

510. Einer Kugel mit dem Radius r = 6 cm soll ein Drehkegel mit maximalem Volumen eingeschrieben werden. Man berechne **a)** Radius r′ **b)** Höhe h und **c)** Volumen V dieses Drehkegels!

511. Einer Halbkugel **a)** mit dem Radius r = 5 dm **b)** mit einem beliebigen Radius r ist jener Drehkegel einzuschreiben, dessen Spitze im Mittelpunkt der Halbkugel liegt und der das größte Volumen hat.

Man berechne **(1)** seine Abmessungen **(2)** sein Volumen **(3)** das Verhältnis der Volumina von Kegel und Halbkugel.

512. Welcher Drehkegel mit gegebener Mantelfläche M hat das größte Volumen?
Man berechne **a)** Radius r, Höhe h, Erzeugende s **b)** Maximalwert des Rauminhalts.

513. Einer Kugel mit dem Radius r ist einzuschreiben:

a) der Drehzylinder mit maximalem Volumen V
b) der Drehzylinder mit maximaler Mantelfläche M
c) der Drehzylinder mit maximaler Oberfläche O
d) der Drehkegel mit maximalem Volumen V
e) der Drehkegel mit maximaler Mantelfläche M
f) der Drehkegel mit maximaler Oberflache O.

Man berechne jeweils den Extremwert der gefragten Größe!

Anleitung: In **a)** bis **c)** verwende man den pythagoräischen Lehrsatz, in **d)** bis **f)** wende man den Höhensatz an.

514. Einer Kugel mit dem Radius r = 10 cm soll die quadratische Pyramide mit maximaler Mantelfläche M eingeschrieben werden (vgl. nebenstehende Figur). M_{max}?

515. Welche gerade quadratische Pyramide hat bei gegebener Oberfläche O das größte Volumen V? V_{max}?

516. Welche gerade quadratische Pyramide hat bei gegebenem Volumen V die kleinste Oberfläche O? O_{min}?

517. Wie groß muss der Öffnungswinkel β eines Kegels mit der Oberfläche $O = 1\,dm^2$ gewählt werden, wenn das Volumen maximal werden soll?

Anleitung: Zunächst sind Radius und Höhe des Kegels zu berechnen. Erst zuletzt wird eine Winkelfunktion zur Berechnung des Öffnungswinkels herangezogen.

518. Ein trichterförmiger, oben offener Behälter soll ein Volumen von $1\,m^3$ haben (vgl. nebenstehende Figur).

a) Wie groß ist der Öffnungswinkel β zu wählen, damit möglichst wenig Material zur Herstellung des Behälters benötigt wird?

b) Wie viel kostet die Herstellung dieses Behälters, wenn $1\,m^2$ Material 80,— Euro kostet?

c) Welche Mehrkosten entstehen gegenüber den in **b)** ermittelten Kosten, wenn der Behälter in Form eines gleichseitigen Kegels hergestellt wird?

519. Ein Auto fährt auf einer Straße von einem Ort A aus mit 40 km/h, anschließend querfeldein mit 15 km/h zu einem Ort B (vgl. nebenstehende Figur).

Wo muss es abzweigen, damit die gesamte Fahrzeit (von A über C nach B) minimal wird?

520. Von einem Hüttenwerk H, das 30 km von einer geradlinigen Bahnlinie entfernt liegt, soll das Erz zu einem an der Bahn liegenden (50 km entfernten) Werk W gebracht werden.

Zu welcher Stelle A der Bahnlinie müsste eine Drahtseilbahn gebaut werden, damit die Transportkosten, die per Seilbahn 3-mal mehr als per Bahn betragen, möglichst gering sind?

521. Ein Haus liegt 100 m abseits einer geradlinigen Straße, die von einem Fernheizwerk A wegführt. Es soll an das städtische Fernheizsystem angeschlossen werden. Der Laufmeter Verlegung kostet längs der Straße 200,— Euro, im Gelände hingegen 280,— Euro.

An welcher Stelle C der Straße muss die Abzweigung erfolgen, damit die Kosten minimal werden? Der hausnächste Punkt B der Straße liegt 1500 m von A entfernt.

522. Zwei Schiffe S_1 und S_2 auf dem selben Breitenkreis haben um 16.37 Uhr einen Abstand von 60 m. S_1 fährt mit 30 km/h nach Osten, S_2 mit 20 km/h nach Süden. Wann ist ihre Entfernung am geringsten?

523. Durch den Punkt P(2, 3) wird eine Gerade im ersten Quadranten gelegt, die die Koordinatenachsen in den Punkten A und B schneidet (vgl. nebenstehende Figur). Man berechne die Koordinatenabschnitte x und y, wenn

a) die Fläche A des Dreiecks 0AB ein Minimum

b) der Abstand $\overline{AB}$ ein Minimum

c) die Summe s der Koordinatenabschnitte ein Minimum

d) der Normalabstand d des Ursprungs 0 von AB ein Maximum sein soll.

Anleitung: $\Delta 0AB \sim \Delta CAP$

ad **a)** $A = \frac{xy}{2}$, ad **b)** $\overline{AB}^2 = x^2 + y^2$, ad **c)** $s = x + y$,

ad **d)** $d^2 = x_1^2 + y_1^2$, $\Delta 0ED \sim \Delta 0AB$, Kathetensatz: $d^2 = xx_1$. Die Größen x_1 and y_1 müssen eliminiert und durch x, y usw. ausgedrückt werden.

524. Um 12.00 Uhr sind die beiden CB-Funker[1] GST1 und AP23 in folgender Situation (vgl. Figur):

— GST1 fährt mit 60 km/h, AP23 mit 120 km/h in Richtung des Kreuzungsmittelpunkts

— die Reichweite ihrer Funkgeräte beträgt R = 30 km

— GST1 ist noch 22 km, AP23 noch 32 km von der Kreuzung entfernt.

a) Wann ist ihre Entfernung d minimal?

b) Können beide Funker überhaupt in Kontakt treten?

Anleitung: (1) $d < R \Leftrightarrow$ Funkverbindung ist möglich

(2) $d > R \Leftrightarrow$ keine Funkverbindung ist möglich

(3) $d = R \Leftrightarrow$ Funkverbindung ist gerade noch möglich.

525. Betrachten wir einen Wanderer, der sich mit einer Geschwindigkeit von 1 m/s einer rechtwinkeligen Wegkreuzung nähert. Als er von dieser noch 300 m entfernt ist, sieht er einen Jogger, der sich auf der Kreuzung befindet und diese gerade mit v = 2 m/s auf dem Querweg verlässt. Unser Wanderer geht gleichmäßig weiter. Er vermutet aber, den Läufer zu kennen, so entschließt er sich, ihn zu rufen.

Nach welcher Zeitspanne ist das am günstigsten, d. h. wann ist die Entfernung zu ihm am geringsten?

526. Einem gleichschenkeligen Dreieck mit der Höhe h = 6 cm und der Basis c = 8 cm soll ein Rechteck von maximalem Flächeninhalt A eingeschrieben werden. Wie groß ist dieser?

Anleitung: $8 : 6 = y : (6 - x)$

527. Einem Dreieck mit der Höhe h = 3 cm und der Basis c = 4 cm soll ein Rechteck mit maximalem Flächeninhalt A eingeschrieben werden. Die Lage des Rechtecks ist aus nebenstehender Figur ersichtlich.

In welchem Verhältnis steht der Flächeninhalt des Rechtecks zu dem des Dreiecks?

Anleitung: $3 : 4 = (h - x) : y$

528. Einem rechtwinkeligen Dreieck mit den Katheten a = 24 cm und b = 10 cm wird ein Rechteck derart eingeschrieben, dass eine Rechteckseite auf der Hypotenuse c liegt. Wie groß ist A_{max}?

Anleitung: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $h = \frac{ab}{c}$, $h : c = (h - x) : y$ (vgl. nebenstehende Figur)

[1]) CB ist die Abkürzung für Citizen Band (engl.): Amateurfunk.

529. Einem gleichschenkeligen Dreieck mit der Höhe $h = 10$ cm und der Basis $c = 8$ cm wird ein gleichschenkeliges Dreieck so eingeschrieben, dass die Spitze im Halbierungspunkt der Basis des gegebenen Dreiecks liegt (vgl. Figur).

Man berechne jenes mit maximalem Umfang.

530. Einem Rechteck mit den Seiten a, b ist das flächenkleinste gleichschenkelige Dreieck zu umschreiben. Abmessungen, Flächeninhalt?

531. Einem gleichschenkeligen Trapez (vgl. Figur) mit Winkel $\alpha = 45°$ ist das flächengrößte Rechteck so einzuschreiben, dass eine Rechteckseite auf der Basis des Trapezes liegt.

532. Wie sind die Abmessungen des Querschnitts eines Kanals zu wählen, wenn dieser ein oben offenes symmetrisches Trapez mit dem Böschungswinkel $\alpha = 75°$ und dem Flächeninhalt $A = 10\,m^2$ ist, wobei der benetzte Umfang möglichst gering sein soll?

533. Einem Kreis mit dem Radius r ist ein gleichschenkeliges Dreieck mit möglichst kleinem Umfang zu umschreiben.

Anleitung: $a : \frac{c}{2} = (h - r) : r$

534. Der Querschnitt eines Dachbodens hat die Form eines gleichschenkeligen Dreiecks mit einer Höhe $h = 5$ m und einer Basis $c = 12$ m. Der Dachbodenraum selbst bildet ein dreiseitiges Prisma mit $l = 15$ m Länge.

Im Zug des Dachausbaus sollen Räumlichkeiten eingerichtet werden — allerdings ohne Mansarde, d. h. die Wände sollen senkrecht und die Decke waagrecht sein. Man bestimme Abmessungen und Grundfläche des nutzbaren Raums, wenn sich dieser durch größtmögliches Volumen auszeichnen soll.

535. Einem Drehkegel (r, h) soll der volumsgrößte Drehzylinder eingeschrieben werden. Wie groß ist dessen Radius r, Höhe h und Volumen V?

536. Welcher Drehkegel, der einem gleichseitigen Zylinder mit Radius $r = 9$ cm umschrieben ist, hat das kleinste Volumen V (vgl. Figur)? Wie groß ist V_{min}?

537. Einer Kugel mit Radius $r = 12$ dm soll ein Drehkegel von minimalem Volumen umschrieben werden! Man bestimme **a)** Radius r **b)** Höhe h **c)** V_{max}.

538. Ein Wanderzirkus besitzt einen Raubtierkäfig, der die Form eines Zylinders mit einem Durchmesser $d = 16$ m und einer Höhe $h = 4$ m aufweist.

Welche Abmessungen hat das kegelförmige Zelt, das den Käfig berühren, dabei aber — aus thermischen Gründen — ein möglichst kleines Volumen haben soll?

539. Der stündliche Benzinverbrauch eines Autos ist von der Geschwindigkeit des Autos abhängig. Wenn x die Geschwindigkeit in km/h und y der stündliche Brennstoffverbrauch in l ist, gilt: $y = 0{,}005x^2 - 0{,}4x + 18$.

Welcher Weg kann bei einem Benzinvorrat von 48 l maximal zurückgelegt werden? Man berechne weiters die zugehörige Geschwindigkeit und den stündlichen Benzinverbrauch!

Anleitung: Weg = Geschwindigkeit · (Fahr)zeit, Fahrzeit = $\frac{\text{Benzinvorrat}}{\text{stündlicher Verbrauch}}$

540. Jemand startet in Punkt A auf einer Wiese mit $v_1 = 10$ km/h, durchquert eine Waldschneise mit $v_2 = 2{,}5$ km/h und läuft hernach wiederum auf einer Wiese mit v_1 bis zum Ziel B (vgl. nebenstehende Figur). Welche Richtungen α und β hat er einzuschlagen, um eine möglichst gute Laufzeit zu erreichen?

Anleitung: Man wähle x als unabhängige Variable. Erst am Schluss der Rechnung ist die Trigonometrie einzusetzen.

541. Der Ölverbrauch E eines Passagierschiffes ist von seiner Geschwindigkeit v abhängig: $E(v) = av^3 + b$ (E in t/h, v in km/h).

a) Welche Geschwindigkeit v hat der Schiffskapitän anzuordnen, um mit einem gegebenen Ölvorrat m möglichst weit zu gelangen? ($a = 10^{-3}\,\text{t}\,\text{h}^2\,\text{km}^{-3}$, $b = 2\,\text{t}\,\text{h}^{-1}$)

b) Wie lang ist der maximale Reiseweg s für $m = 1000$ t Vorrat? Wie lange dauert diese Reise?

Bemerkung: Die Terme in der Funktionsgleichung für E (v) haben folgende Bedeutung:

av^3..... Brennstoffverbrauch der Schiffsmotoren

b ..... Konstanter Verbrauch (Heizung, Licht, Pumpen, Klimaanlagen)

542. Ein Schiff S_1, das sich um 17.40 Uhr 20 km südlich vom Hafen Charleston (South Carolina, USA) befindet, entfernt sich in Richtung Süden mit einer Geschwindigkeit von 30 km/h. Zur gleichen Zeit nähert sich ein zweites, 60 km von Charleston entferntes Schiff S_2 aus dem Südosten mit 40 km/h dem Hafen, wobei die Kurse der beiden Schiffe einen Winkel von 60° einschließen (vgl. nebenstehende Figur).

a) Nach welcher Zeitspanne ist die Entfernung der beiden Schiffe am kleinsten?

b) Wie groß ist diese Entfernung?

Anleitung: Man verwende den Kosinussatz.

543. Man zeige:

a) $f(x) + c$ ist **genau dann** extremal wenn $f(x)$ extremal ist. (D. h. bei der Hauptbedingung einer Extremwertaufgabe dürfen **konstante Summanden** weggelassen werden.)

b) $k\,f(x)$ ist **genau dann** extremal wenn $f(x)$ extremal ist, falls $k > 0$. (D. h. bei der Hauptbedingung einer Extremwertaufgabe dürfen **konstante positive Faktoren** weggelassen werden.)

c) $[f(x)]^n$ ist **genau dann** extremal, wenn $f(x)$ extremal ist, falls $f(x) > 0$ und $n \in \mathbb{R}^+$. (D. h. bei der Hauptbedingung einer Extremwertaufgabe dürfen **konstante positive Exponenten** weggelassen werden, falls $f(x)$ positiv ist.)

Der Sachverhalt ist jeweils grafisch zu veranschaulichen.

544. Eine Polynomfunktion $f(x)$ habe bei x_0 eine Nullstelle gerader Vielfachheit k. (x_0 ist also mindestens eine Doppelwurzel.) Es ist nachzuweisen, dass x_0 eine Extremstelle ist.

Anleitung: $f(x) = g(x)\,(x - x_0)^k = g(x)\,(x - x_0)^{2n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $g(x_0) \neq 0$, ...

545. Fasane zählen zur Familie der Hühnervögel. Im Jahre 1937 wurden auf Protection Island 2 Hähne und 6 Hennen ausgesetzt. Es gab bislang noch keine Fasane auf dieser Insel und die 8 Tiere vermehrten sich unbehelligt von den Eingriffen der Menschen. Jedes Jahr — vor Beginn der Brutzeit — zählte man die Fasane. Die Ergebnisse werden in der nachstehenden Tabelle angeführt.

Jahr	1937	1938	1939	1940	1941	1942	1943	1944
Anzahl der Fasane	8	30	81	282	641	1194	1898	2586

Sicherlich kann der Fasanbestand nicht unbegrenzt linear weiterwachsen: Nahrungsmangel ist nur einer von vielen Gründen, so dass bei Erreichen der vom Lebensraum her möglichen Populationsgröße das Wachstum schließlich zum Stillstand kommt. Die Situation würde sich ändern, wenn ein Teil der Tiere jährlich — zusätzlich zu den natürlichen Verlusten durch Alter und Krankheit — etwa durch Bejagung entnommen werden. Die Population erreicht dadurch unter Umständen nicht den vom Lebensraum möglichen Umfang. **Lässt sich die optimale jagdliche Nutzung mathematisch modellieren?** Um diese Frage zu klären, konstruieren wir die sogenannte Reproduktionsfunktion R, die sich aus der Wachstumsfunktion ergibt: Hierbei betrachtet man als x-Wert die Bestandszahl eines Jahrs und als zugehörigen y-Wert jene Bestandszahl, die ein Jahr später erreicht wird. Zu $x = 30$ (vgl. Tabelle) gehört als Wert der Reproduktionsfunktion $y = 81$: $R(30) = 81$. Weitere Beispiele: $R(282) = 641$ oder $R(1194) = 1898$.

a) Im Jahre 1942 haben Wissenschafter beschlossen, den bisherigen Datenbestand (in der obigen Tabelle rosa unterlegt) in der Polynomfunktion

$$f\colon y = \frac{1}{24}(-113x^4 + 1162x^3 - 2347x^2 + 1826x + 192)$$

zusammenzufassen: Es ist auf grafischem Weg zu überprüfen, ob diese **Interpolation** geeignet ist, den weiteren Trend des Fasanbestands zu beschreiben ($1937 \mathrel{\hat{=}} x = 0$, $1938 \mathrel{\hat{=}} x = 1$ usw.).

b) Durch Anfertigung eines Schaubilds ist zu zeigen, dass die Reproduktionsfunktion näherungsweise durch folgende quadratische Funktion dargestellt werden kann: $R(x) = -0{,}0004x^2 + 2{,}02x + 46$.

c) Angenommen, die Jäger blasen zum Halali. Nur der im Folgejahr sich ergebende Zuwachs wird zum Abschuss freigegeben. Wie lässt sich für jeden Bestand x eine Funktion A(x) angeben, die diese erlaubte Abschuss-Quote ausdrückt?

d) In Hinblick auf Aufgabe **c)** ist die maximal erlaubte jährliche Abschuss-Quote zu berechnen.

e) Bei welcher Bestandszahl darf mit der Bejagung begonnen werden, wenn die Erlegungsquote maximal und von Jahr zu Jahr gleich hoch sein soll?

546. Der Energieverbrauch fliegender Vögel hängt von der Masse des Vogels und der Fluggeschwindigkeit ab. Der ziehende Vogel bezieht seine Energie durch Verbrennen der während des Tags aufgebauten Fettvorräte. Rotkehlchen, die durchschnittlich 16 g wiegen, erhöhen vor dem Aufbruch zum nächtlichen Zug ihre Körpermasse auf 18 g. Beim morgendlichen Einfall am Zielort wiegen sie nur mehr 15 g. Ein Drittel des Massenverlusts ist auf nächtliche Darmentleerung und auf den zum Erhalt der allgemeinen Körperfunktionen notwendigen Energieverbrauch zurückzuführen, zwei Drittel entsprechen dem für den Flug aufgebrauchten Fettvorrat. Aus dem Verbrennen von 1 g Fett gewinnt der Vogel 3936 J an Energie.

Die Energie in Joule, die der Vogel pro Gramm Körpermasse und pro geflogenem Kilometer verbrennt, kann näherungsweise durch die Formel $E(v) = \frac{1}{v}(0{,}31(v - 35)^2 + 92)$ bestimmt werden. Hierbei ist v die Geschwindigkeit des Vogels in km/h gegenüber der Luft.

a) Bei welcher Geschwindigkeit ist der Energieverbrauch pro geflogenem Kilometer am geringsten? Wie hoch ist dabei der Energieverbrauch eines im Mittel 16 g schweren Rotkehlchens pro Flugstunde?

b) Wie viel Energie steht einem Rotkehlchen für seinen nächtlichen Flug zur Verfügung? Welche Strecke kann ein Rotkehlchen bei geringst möglichem Energieverbrauch in einer Nacht zurücklegen?

c) Rotkehlchen starten zu ihrem nächtlichen Zug so, dass sie mit der ersten Morgendämmerung ihr Ziel erreichen. Mitte April beginnt in Österreich die Morgendämmerung etwa um 4.30 Uhr. Wie lange nach Ende der Abenddämmerung um 19.30 Uhr muss das Rotkehlchen starten, um das Ziel mit Erschöpfen seiner Energiereserven zu Beginn der Morgendämmerung zu erreichen?

7. Ableitung transzendenter Funktionen

7.1 Trigonometrische Funktionen

Ist die Gestalt von Bienenwaben optimal? Optimal ist eine Wabe sicherlich dann, wenn sie (bei gegebener Grundform und einem bestimmten Volumen) eine minimale Oberfläche hat, denn bei der geringsten Oberfläche wird auch der Wachsverbrauch minimiert — und die Honigbienen müssen nicht so viel Wachs durch ihre Bauchdrüsen ausscheiden.

In der Außenspalte ist die Zelle einer Wabe schematisch dargestellt.

Die Oberfläche S der Wabe lässt sich nach der Formel $S(x) = 6ab + \frac{3a^2}{2}\left(\frac{\sqrt{3} - \cos x}{\sin x}\right)$ berechnen, wobei x der Neigungswinkel der drei Spitzflächen ist.

Biologen haben durch Messungen an Waben herausgefunden, dass x zwischen 54° und 55° liegt.

Wie lässt sich die Vermutung, dass die Gestalt von Bienenwaben optimal ist, mathematisch beweisen?

Im Grunde genommen recht einfach, denn es wäre bloß notwendig

(1) die Formel $S(x) = 6ab + \frac{3a^2}{2}\left(\frac{\sqrt{3} - \cos x}{\sin x}\right)$ nach x zu differenzieren

(2) diese Ableitung Null zu setzen und

(3) x zu berechnen.

Sofern der rechnerisch ermittelte x-Wert zwischen 54° und 55° liegt, ist die Gestalt von Bienenwaben tatsächlich optimal.

Die Punkte (2) und (3) der obigen Auflistung wären unproblematisch — aber leider gibt es schon bei Punkt (1) Schwierigkeiten: Wie kann man eine trigonometrische Funktion ableiten?

Nach dem heutigen Stand der Wissenschaft ist die Biene das erste Tier, das der Mensch in Pflege nahm. Diese Erkenntnis beruht unter anderem auf Felszeichnungen, die bei Valencia in Spanien gefunden wurden und die zeigen, dass der Steinzeitmensch Wildbienen nutzte. Bemerkenswert ist, dass sich in der Bibel 21-mal der Hinweis auf das Gelobte Land, „in dem Milch und Honig fließt“, findet.

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

In jeder Formelsammlung findet man eine Zusammenstellung hinsichtlich $(\sin x)'$, $(\cos x)'$ und $(\tan x)'$, ähnlich zu dem in der Außenspalte rosa unterlegten Kasten.

Beispiel:

Man berechne **a)** $(3\cos x)'$ **b)** $(\sin x \cdot \cos x)'$ **c)** $\left(\frac{4\tan x}{5\sin x}\right)'$.

Lösung:

a) $(3\cos x)' = 3(-\sin x) = \mathbf{-3\sin x}$

b) $(\sin x \cdot \cos x)' = \underbrace{\cos x \cdot \cos x + \sin x(-\sin x)}_{\text{Produktregel}} = \cos^2 x - \sin^2 x = \mathbf{\cos 2x}$

c) $\left(\frac{4\tan x}{5\sin x}\right)' = \underbrace{\frac{\frac{4}{\cos^2 x}\cdot 5\sin x - 4\tan x \cdot 5\cos x}{25\sin^2 x}}_{\text{Quotientenregel}} = \ldots = \frac{4}{5}\left(\frac{1-\cos^2 x}{\sin x\cos^2 x}\right) = \ldots =$

$= \mathbf{\dfrac{4\sin x}{5\cos^2 x}}$

Bemerkung: Beim obigen Beispiel wurde bei **c)** die Beziehung $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ verwendet.

Welche Auswirkungen hat es auf die Ableitung, wenn das Argument x der trigonometrischen Funktion, Funktion einer Funktion ist?

Welche Regel muss man anwenden, um z. B. $(\sin 5x)'$ zu berechnen? Diese Fragen werden durch das nachstehende Beispiel beantwortet.

Im Hinblick auf die Kettenregel gilt:

① $[\sin f(x)]' = [\cos f(x)]\, f'(x)$

② $[\cos f(x)]' = [-\sin f(x)]\, f'(x)$

③ $[\tan f(x)]' = \dfrac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$

Beispiel:

Es ist **a)** $(\sin 5x)'$ **b)** $\left[\cos\left(2+\frac{x}{5}\right)\right]'$ **c)** $(\tan \sqrt[3]{3x})'$ zu ermitteln.

Lösung:

a) $(\sin \underbrace{5x}_{f(x)})' = \underbrace{(\cos 5x)}_{\cos f(x)} \cdot \underbrace{5}_{f'(x)} = \mathbf{5\cos 5x}$ ①

b) $\left[\cos\underbrace{\left(2+\frac{x}{5}\right)}_{f(x)}\right]' = \underbrace{\left[-\sin\left(2+\frac{x}{5}\right)\right]}_{-\sin f(x)} \underbrace{\left(\frac{1}{5}\right)}_{f'(x)} = \mathbf{-\dfrac{\sin\left(2+\frac{x}{5}\right)}{5}}$ ②

c) $(\tan \underbrace{\sqrt[3]{3x}}_{f(x)})' = \dfrac{\overbrace{\frac{1}{3}(3x)^{-\frac{2}{3}} \cdot 3}^{f'(x)}}{\underbrace{\cos^2 \sqrt[3]{3x}}_{\cos^2 f(x)}} = \ldots = \mathbf{\dfrac{1}{\sqrt[3]{9x^2} \cdot \cos^2 \sqrt[3]{3x}}}$ ③

Abschließend noch einige Ratschläge, um Unsicherheiten beim Differenzieren zu vermeiden:

- Es empfiehlt sich, nicht zu viele Gesetze gleichzeitig anzuwenden. Eine Zeile mehr fördert die Übersicht.
- In jedem Stadium der Ausarbeitung sollte man wissen, welche Regel angewandt wird. Auf mathematischem Gebiet sind „Gefühlsentscheidungen" gefährlich, denn sie sind meistens falsch.
- Wer Beispiele nicht versteht, ist meist nicht mit allen Ableitungsregeln vertraut. Nur durch Übung lässt sich Sicherheit schaffen, so dass dann alle Regeln klar sind.

AUFGABEN

Es ist f′(x) der folgenden Funktionterme f(x) zu berechnen:

547. a) $\sin 2x$ **b)** $\sin\frac{x}{2}$ **c)** $\sin(3+4x)$ **d)** $\sin(5-2x)$

548. a) $\sin\sqrt{x}$ **b)** $\sin x^{-2}$ **c)** $\sin 3x^{-3}$ **d)** $\sin\left(\sqrt{3x}-5\right)$

549. a) $\sin x^2$ **b)** $\sin^2 x$ **c)** $\sin^3 x^2$ **d)** $\sin^2\sqrt{x}$

550. a) $\sqrt{\sin x}$ **b)** $\sqrt[3]{\sin 3x}$ **c)** $\sqrt[4]{\sin 5x}$ **d)** $\sqrt[5]{\sin^2(3x+8)}$

551. a) $\frac{1}{\sin 2x}$ **b)** $\frac{3}{\sin^2 2x}$ **c)** $\frac{2}{\sqrt{\sin x}}$ **d)** $\frac{3}{\sqrt[4]{\sin x}}$

552 a) $\frac{\sin x}{\sin 3x}$ **b)** $\frac{\sin 9x}{\sin^2 9x}$ **c)** $\frac{3\sin 2x}{4\sin 5x}$ **d)** $\frac{5\sin\sqrt[3]{2x}}{9\sin\sqrt[4]{x}}$

553. a) $\cos 3x$ **b)** $\cos\frac{x}{5}$ **c)** $\cos(7+5x)$ **d)** $\cos(9-8x)$

554. a) $\cos\sqrt{x}$ **b)** $\cos x^{-2}$ **c)** $\cos 2x^{-5}$ **d)** $\cos\left(\sqrt{5x}-1\right)$

555. a) $\cos x^2$ **b)** $\cos^2 x$ **c)** $\cos^3 x^2$ **d)** $\cos^2\sqrt{x}$

556. a) $\sqrt{\cos x}$ **b)** $\sqrt[5]{\cos 2x}$ **c)** $\sqrt[3]{\cos 2x}$ **d)** $\sqrt[7]{\cos^2(2x-1)}$

557. a) $\frac{1}{\cos 3x}$ **b)** $\frac{5}{\cos^2 7x}$ **c)** $\frac{6}{\sqrt{\cos x}}$ **d)** $\frac{17}{\sqrt[6]{\cos 5x}}$

558. a) $\frac{\cos 4x}{\cos x}$ **b)** $\frac{\cos 8x}{\cos^2 8x}$ **c)** $\frac{11\cos 4x}{10\cos 8x}$ **d)** $\frac{6\cos\sqrt{3x}}{7\cos\sqrt[5]{x}}$

559. a) $\tan 9x$ **b)** $2\tan\frac{x}{6}$ **c)** $\tan(5-7x)$ **d)** $3\tan(2x+1)$

560. a) $\tan\sqrt{x}$ **b)** $\tan 5x^{-1}$ **c)** $\tan(5x)^{-1}$ **d)** $\tan\left(\sqrt[6]{x^5}-1\right)$

561. a) $\tan x^2$ **b)** $\tan^3 2x$ **c)** $\tan^4 x^5$ **d)** $2\tan^2\sqrt{5x}$

562. a) $\sqrt{\tan x}$ **b)** $\sqrt[5]{\tan 2x}$ **c)** $\sqrt[7]{\tan 9x}$ **d)** $\sqrt[8]{\tan^3(4x+5)}$

563. a) $\frac{\tan x}{x}$ **b)** $\frac{2x}{3\tan x}$ **c)** $\frac{5}{\sqrt{3\tan x}}$ **d)** $\frac{4}{\sqrt[3]{\tan 2x}}$

564. a) $\frac{\tan 3x}{\tan 2x}-1$ **b)** $\frac{\tan x}{\sqrt{\tan 2x}}$ **c)** $\frac{5\tan 2x}{\sqrt[3]{\tan(4x+3)}}$ **d)** $\frac{3\tan^2 5x^3}{\sqrt[3]{\tan 4x}}$

565. a) $\frac{\sin x}{5+\cos x}$ **b)** $\sin 2x\cos x$ **c)** $\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\tan x}$

566. a) $\sqrt[3]{\tan 3x}-x\cdot\cos 2x$ **b)** $\sqrt[3]{\frac{\cos x}{x}}$ **c)** $\frac{3x+2}{\sin x^2}-4\sqrt{\tan^{-1}x}$

Bei den folgenden Aufgaben ist die durch ihre Gleichung gegebene Funktion im Intervall $[0,\ 2\pi]$ zu untersuchen:

567. a) $y=x\cdot\cos x$ **b)** $y=x\cdot\sin x$ **c)** $y=\frac{\cos x}{x}$

568. a) $y=\frac{\sin x}{x}$ **b)** $y=\sin 2x$ **c)** $y=x-\sin x$

569. a) $y=\sqrt{1+\sin^2 x}$ **b)** $y=x^3\cdot\cos^3 x$ **c)** $y=\sin 3x-3\sin x$

570. a) $y=\frac{\tan x}{\tan(x+1)}$ **b)** $y=\frac{\tan^2 x}{\tan 2x}$ **c)** $y=2\cos^2 x+2\cos x$

571. Ein Körper wird mit der Geschwindigkeit $v = 30\frac{m}{s}$ unter dem Winkel φ schief nach oben geworfen. Die Wurfweite s ergibt sich nach der Formel $s = \frac{v^2 \sin 2\varphi}{g}$ (Erdbeschleunigung $g = 9{,}81\frac{m}{s^2}$). Für welchen Winkel φ wird der Körper — bei waagrechter Messung — am weitesten geworfen?

572. Einem Kreis mit dem Radius $r = 1\,cm$ ist das flächengrößte Rechteck einzuschreiben, wobei der Winkel α als variabel anzunehmen ist.

573. Ist die Gestalt von Bienenwaben optimal? Eine schwierige Frage. Allerdings finden sich im gegenständlichen Buch einige Hinweise, um das Problem zu lösen. Unter Verwendung des Sachwortverzeichnisses (Schlagwort „Biene") ist die entsprechende Stelle im Buch aufzuspüren. Anschließend ist mathematisch zu beweisen, dass die Gestalt von Bienenwaben tatsächlich optimal ist.

Bemerkung: Die Formel $S(x) = 6ab + \frac{3a^2}{2}\left(\frac{\sqrt{3} - \cos x}{\sin x}\right)$ wurde von dem Biologen D'Arcy Wentworth THOMPSON nach mühevoller Konstruktionsarbeit gefunden und im Jahre 1917 in seiner Studie „On Growth and Form" (Cambridge University Press) publiziert.

574. Aus zwei Brettern mit der Breite a soll eine Rinne von möglichst großem Querschnitt Q gebildet werden. Wie groß muss der Winkel α gewählt werden?

Anleitung: Die Querschnittsfläche Q ist gleich dem halben Produkt zweier Seitenlängen a und dem Sinus des eingeschlossenen Winkels...

575. Einem Halbkreis vom Radius $r = 5$ cm ist ein Trapez von maximalem Umfang u einzuschreiben, wobei der Winkel α als variabel anzunehmen ist. Wie lang sind die Seiten des Trapezes?

Anleitung: $u = 2r + 2x + y$, $\triangle ABC \sim \triangle BCE$ usw.

576. Eine zusammenlegbare Kohlenrutsche hat im aufgeklappten Zustand trapezförmigen Querschnitt, wobei Boden und Seitenwände aus gleichen Brettern der Breite s gebildet werden. Welchen Winkel ρ müssen die Seitenbretter mit dem Bodenbrett einschließen, damit die Querschnittsfläche (und damit die Fördermenge) möglichst groß wird?

577. Das kegelförmige Dach eines Turms hat einen Rauminhalt von **a)** $6\,m^3$ **b)** $8\,m^3$. Welcher Neigungswinkel α muss für das Dach gewählt werden, damit die zu deckende Dachfläche ein Minimum ist? Wie groß ist der Radius r des Kegels?

578. Ein Gang der Breite a mündet rechtwinkelig in einen Gang der Breite b. Um einen schweren Balken der Länge l um die Ecke zu manövrieren, wird der Balken auf einen niedrigen Transportwagen gelegt.

a) Es ist zu zeigen, dass die Balkenlänge durch die Gleichung $l = \frac{a}{\sin\varphi} + \frac{b}{\cos\varphi}$ festgelegt wird.

b) Wie lang darf der Balken maximal sein, damit man ihn parallel zur Grundfläche um die Ecke transportieren kann?

c) Text wie b) für $a = 1{,}8$ m und $b = 2{,}5$ m

Bemerkung: Die Stärke des Balkens bleibt unberücksichtigt.

579. Einem Kreissektor mit dem Öffnungswinkel ω und dem Radius r ist ein Rechteck derart einzuschließen, dass genau drei der vier Eckpunkte des Rechtecks auf den beiden Radien liegen, die den Kreissektor begrenzen.

a) Für welchen Winkel λ wird der Flächeninhalt A des Rechtecks ein Maximum?

b) Wie groß ist dieser Flächeninhalt für r = 10 cm und $\omega = 40°$?

Vermischte Aufgaben

580. Im Hinblick auf die nebenstehende Figur sind die wahren Aussagen anzukreuzen, die Entscheidung ist jeweils zu begründen:

○ **a)** $A_{0AD} < A_{0BD} < A_{0BC}$

○ **b)** $\frac{\sin x \cdot \cos x}{2} < \frac{x \cdot 1}{2} < \frac{\tan x \cdot 1}{2}$

○ **c)** $\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$

○ **d)** $\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x$

○ **e)** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

○ **f)** $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} =$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{2\cos\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \cos\frac{x+x_0}{2} \cdot \underbrace{\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}}_{1} = \cos x_0$$

○ **g)** Die erste Ableitung von y = cos x lässt sich finden, indem man $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ setzt und unter Berücksichtigung der Kettenregel differenziert.

○ **h)** $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ kann man herleiten, indem man die Beziehung $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ins Spiel bringt.

581. Geneigte Hausdächer werden oftmals mit kleinformatigen Deckelementen, die einander schuppenartig übergreifen, gedeckt. Je schneller nun das Wasser von der Dachfläche abfließt, desto geringer ist der sich bildende Wasserfilm und damit die Gefahr, dass Feuchtigkeit durch die Überlappungsfugen unter die Dachhaut gelangt. Bei gegebener Giebelbreite b soll der Winkel α so gewählt werden, dass das Wasser am schnellsten abfließt. Dabei wird angenommen, dass das Wasser am First QR des Dachs keine Geschwindigkeit besitzt. Von der Erdbeschleunigung $\vec{g}$ wirkt nur die Komponente $\vec{a}$.

Anleitung: $s = \frac{a}{2}t^2$

582. Starkstromtechniker(innen) kennen sogenannte **Drosselspulen.** Letztere werden z. B. Leuchtstoffröhren vorgeschaltet, um die „Strombegrenzung" wirtschaftlicher zu gestalten. Je vollständiger der Eisenkern die Drosselspule ausfüllt, desto geringer sind die Energieverluste. Dennoch ist der Querschnitt des Eisenkerns nicht kreisförmig, sondern aus herstellungstechnischen Gründen kreuzförmig. Wie viel Prozent der Kreisfläche werden vom kreuzförmigen Eisenkern ausgefüllt, wenn die Drosselspule mit dem geringsten Energieverlust arbeiten soll und ihr Radius r gegeben ist?

583. Ein Skifahrer mit der Masse $m = 67\,kg$ benützt einen Skilift. Der Reibungskoeffizient Schnee–Ski beträgt $\mu = 0{,}1$. Wie groß muss β sein, damit die benötigte Zugkraft F minimal wird, wenn **a)** $\alpha = 0°$ (Babylift) **b)** $\alpha = 17°$ ist?

Anleitung: Die Horizontalkomponenten sind gleichzusetzen.

584. Der Wassertransport im Hauptstamm eines Baums unterliegt einem geringeren Widerstand als in den verzweigenden Ästen. Mittels der Differenzialrechnung lässt sich zeigen, dass es daher für jede Abzweigung einen zeitoptimalen Winkel gibt, unter dem ein Ast aus dem Hauptstamm wachsen muss, um den Wasser- und Nährstofftransport möglichst gut funktionieren zu lassen. Angenommen ein Blatt befindet sich in $h = 2\,m$ Höhe über dem Boden und $b = 1{,}5\,m$ vom Hauptstamm waagrecht entfernt. Im Hauptstamm sei die Fließgeschwindigkeit 1,3-mal so groß wie im abzweigenden Ast. Welcher Winkel ist dann optimal?

THINK THINK ThInk THINK THINK THINK THINK ThInk THINK ThInk THINK THINK ThInk THINK

THINK ThInk THINK THINK

585. a) Von einem Helikopter, 70 ft über dem Meeresspiegel, erscheint die Spitze der Freiheitsstatue unter einem maximalen Sehwinkel — vgl. nebenstehende Figur. In welcher horizontalen Entfernung x befindet sich der Hubschrauber?

b) Man löse das in **a)** dargelegte Problem ohne Ableitung einer transzendenten Funktion.

Anleitung: Die Hauptbedingung einer Extremwertaufgabe kann auch durch Weglassen **streng monoton steigender Funktionen** vereinfacht werden:

(g(f(x)) ist extremal) $\Leftrightarrow$ (f(x) ist extremal), falls g **streng monoton steigend** ist.

c) Man löse das in **a)** dargelegte Problem ohne Differenzialrechnung.

Anleitung: Jeder einem Kreisbogen zugeordnete Peripheriewinkel (das ist ein Winkel, dessen Scheitel S auf einem Kreis k liegt und dessen Schenkel a, b Sekanten des Kreises k sind) ist genau halb so groß wie der diesem Kreisbogen zugeordnete Zentriwinkel, d. h. $\varphi = \frac{\rho}{2}$. (Peripheriewinkelsatz)

x, 305,1, 154, α, 2α, h=70

(Bemaßungen in feet)

S_1, S_2, S_3, S_4, k, φ, M, ρ, A, B, 180°−φ

7.2 Exponential- und Logarithmusfunktion

Wie wir bereits wissen, hat die Exponentialfunktion vor allem im Bereich der Naturwissenschaften und der Wirtschaft große Bedeutung. Mit ihrer Hilfe können Wachstums- bzw. Abnahmeprozesse beschrieben werden, z. B. Zinseszinsen, progressive und degressive Abschreibung, Bevölkerungs- und Pflanzenwachstum, radioaktiver Zerfall von Atomkernen, Erwärmungs- und Abkühlungsprozesse usw.

Beispiele für Exponentialfunktionen:

$f: x \mapsto c^{3x}$

$f: x \mapsto 5 \cdot e^{-2x} + 1$

$f: x \mapsto 2^x$

Um das momentane Wachstum bzw. die momentane Abnahme zu berechnen, ist eine Exponentialfunktion zu differenzieren.

Die entscheidende Frage lautet: Wie differenziert man Exponentialfunktionen?

Schauen wir uns zunächst einmal $f: x \mapsto e^x$ an. In den meisten Lehr- und Arbeitsbüchern findet sich ein Beweis, wie man $(e^x)'$ bildet.

Wir wollen einen etwas anderen Weg beschreiten: Das überraschende Ergebnis wird vorab mitgeteilt, und es obliegt den detektivischen Fähigkeiten des Lesers, die aufgestellte Behauptung zu überprüfen.

Hier nun das verblüffende Resultat: $(e^x)' = e^x$, d. h. die Exponentialfunktion $f: x \mapsto e^x$ bleibt beim Differenzieren unverändert.

$(e^x)' = e^x$

Sofern das Argument x der Exponentialfunktion $f: x \mapsto e^x$ Funktion einer Funktion ist, hat man die Kettenregel heranzuziehen:

$[e^{f(x)}]' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

Beispiel:

Man berechne **a)** $\left(\frac{3}{4}e^x\right)'$ **b)** $(e^{\sqrt{x-2}})'$ **c)** $(x^3 e^{-\sqrt{x}})'$.

Lösung:

a) $\left(\frac{3}{4}e^x\right)' = \frac{3}{4}e^x$

b) $(e^{\overbrace{\sqrt{x-2}}^{f(x)}})' = e^{\sqrt{x-2}}\overbrace{(\sqrt{x-2})'}^{f'(x)} = \ldots = \frac{e^{\sqrt{x-2}}}{2\sqrt{x-2}}$

c) $(x^3 e^{-\sqrt{x}})' = \underbrace{3x^2 e^{-\sqrt{x}} + x^3 e^{-\sqrt{x}}(-\sqrt{x})'}_{\text{Produktregel}} = 3x^2 e^{-\sqrt{x}} - \frac{x^3 e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

Die Ableitung der Exponentialfunktion $x \mapsto e^x$ ist unproblematisch. Wie schaut es nun mit der Umkehrfunktion von f aus? Konkret geht es um $(\ln x)' = ?$

Aus $y = \ln x \Leftrightarrow e^y = x$ folgt: $e^{\ln x} = x$.

Differenziert man beide Seiten der Gleichung $e^{\ln x} = x$ nach x, so erhält man $e^{\ln x}(\ln x)' = 1 \Leftrightarrow (\ln x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$.

Die Ableitung der so schwierig aussehenden Logarithmusfunktion $f: x \mapsto \ln x$ ist also äußerst einfach.

$\log_3 5 = x \Leftrightarrow 3^x = 5$

LINKS MITTE RECHTS

Logarithmus = Exponent

Definition:

Jene Zahl $x \in \mathbb{R}$ für die $a^x = b$ $(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}, b \in \mathbb{R}^+)$ gilt, heißt **Logarithmus** von b zur Basis a:

$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$

Der Logarithmus einer Zahl b zur Basis a ist also jene Zahl x, mit der man a potenzieren muss, um den Numerus b zu erhalten.

Wer den Text bis hier her verstanden hat, wird nun auch das Problem $(\log_a x)' = ?$ lösen.

Wir erinnern uns an das Logarithmusgesetz $\log_a u^r = r \cdot \log_a u$ und wenden dieses auf der linken Seite unserer Gleichung $e^{\ln x} = x$ an, die wir zur Basis a logarithmieren:

$\ln x \log_a e = \log_a x \Leftrightarrow (\log_a x)' = (\ln x \log_a e)'$

$(\log_a x)' = (\ln x)' \log_a e$ ($\log_a e$ ist ja eine Konstante.)

$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e$

Im Hinblick auf die Kettenregel gilt:

$$[\ln f(x)]' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$$

$$[\log_a f(x)]' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \log_a e$$

Logarithmengesetze:

$$\log_a (uv) = \log_a u + \log_a v$$

Der Logarithmus eines Produkts ist gleich der Summe der Logarithmen der Faktoren.

$$\log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v$$

Der Logarithmus eines Quotienten ist gleich der Differenz aus dem Logarithmus des Dividenden und dem des Divisors.

$$\log_a u^r = r \log_a u$$

Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Produkt aus ihrem Exponenten und dem Logarithmus der Potenzbasis.

$$\log_a \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n} \log_a u$$

Der Logarithmus einer Wurzel ist gleich dem Quotienten aus dem Logarithmus des Radikanden und dem Wurzelexponenten.

Beispiel:

Es ist **a)** $(\ln 3x^2)'$ **b)** $(5\log_3 x^{-1})'$ **c)** $\left(\ln \sqrt{\frac{x^2-1}{1+x^2}}\right)'$ zu ermitteln.

Lösung:

a) $(\ln \underbrace{3x^2}_{f(x)})' = \frac{1}{3x^2} \cdot \underbrace{6x}_{f'(x)} = \frac{2}{x}$

b) $(5\log_3 \underbrace{x^{-1}}_{f(x)})' = 5\frac{1}{x^{-1}} \underbrace{(-1)x^{-2}}_{f'(x)} \log_3 e = \ldots = -\frac{5}{x}\log_3 e$

c) $$\Bigg(\ln \underbrace{\sqrt{\frac{x^2-1}{1+x^2}}}_{f(x)}\Bigg)' = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2-1}{1+x^2}}} \cdot \underbrace{\frac{\left(\frac{x^2-1}{1+x^2}\right)'}{2\sqrt{\frac{x^2-1}{1+x^2}}}}_{f'(x)} = \ldots =$$ **1. Variante**

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2-1}{1+x^2}}} \cdot \frac{\frac{2x}{(1+x^2)^2}}{\sqrt{\frac{x^2-1}{1+x^2}}} = \frac{2x}{(1+x^2)(x^2-1)} = \frac{2x}{x^4-1}$$

$$\left(\ln \sqrt{\frac{x^2-1}{1+x^2}}\right)' = \left[\ln\left(\frac{x^2-1}{1+x^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]' = \left[\frac{1}{2}\ln \frac{x^2-1}{1+x^2}\right]' =$$ **2. Variante**

$$= \left\{\frac{1}{2}[\ln(x^2-1) - \ln(1+x^2)]\right\}' =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2-1} \cdot 2x - \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x\right) =$$

$$= x\left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{1+x^2}\right) = \ldots = \frac{2x}{x^4-1}$$

Bemerkung: Man beachte die Logarithmengesetze in der Außenspalte. Zwei von ihnen wurden bei der zweiten Lösungsvariante des obigen Beispiels angewendet.

AUFGABEN

Es ist $f'(x_0)$ der folgenden durch ihre Funktionsgleichung gegebenen Funktionen zu berechnen:

586. a) $y = e^{7x},\ x_0 = 0$ **b)** $y = e^{x+2},\ x_0 = -1$ **c)** $y = e^{6x-x^7},\ x_0 = 1$

587. a) $y = x^3 e^{3x},\ x_0 = 1$ **b)** $y = \frac{3}{e^x},\ x_0 = 0$ **c)** $y = x^4 e^{-x^2},\ x_0 = 1$

588. a) $y = \sqrt[3]{e^{x^2}},\ x_0 = -2$ **b)** $y = \frac{1}{\sqrt{e^x}},\ x_0 = 2$ **c)** $y = e^{-x}x^2,\ x_0 = 2$

589. a) $y = \frac{e^x-1}{e^x+1},\ x_0 = 0$ **b)** $y = \frac{2e^x}{e^{-x}+e^x},\ x_0 = 2$ **c)** $y = \frac{e^x+1}{e^x-1},\ x_0 = 3$

590. a) $y = e^x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}},\ x_0 = 2$ **b)** $y = \frac{e^x-e^{-x}}{2},\ x_0 = 4$ **c)** $y = e^x\sqrt{\frac{x+1}{x-1}},\ x_0 = 3$

591. a) $y = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}},\ x_0 = -1$ **b)** $y = e^x(\sin x - \cos x),\ x_0 = \frac{\pi}{2}$ **c)** $y = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}},\ x_0 = -2$

592. a) $y = \ln x^3,\ x_0 = 3$ **b)** $y = \ln(2x+3),\ x_0 = 4$ **c)** $y = 5\ln(2x^2-1),\ x_0 = -5$

593. a) $y = \ln(3x+2)^3,\ x_0 = 1$ **b)** $y = \ln\left(\frac{5x-4}{2}\right)^2,\ x_0 = 2$ **c)** $y = \frac{1}{2}\ln(4x^2-7x)^{\frac{7}{6}},\ x_0 = 5$

594. a) $y = \ln \frac{x^2}{1+x^2},\ x_0 = -3$ **b)** $y = \ln \sqrt{7x-5},\ x_0 = 1$ **c)** $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+5}\right),\ x_0 = 2$

595. a) $y = \ln \frac{x+1}{x-1},\ x_0 = 2$ **b)** $y = \ln \frac{x^2}{1-x^2},\ x_0 = \frac{1}{2}$ **c)** $y = \ln \frac{x-1}{x+1},\ x_0 = 2$

596. a) $y = x \ln x,\ x_0 = 1$ **b)** $y = \frac{x}{\ln x},\ x_0 = 2$ **c)** $y = \frac{\ln x}{x^2},\ x_0 = 1$

597. a) $y = \ln \sqrt{\frac{x+1}{x-1}},\ x_0 = 2$ **b)** $y = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}},\ x_0 = \frac{1}{2}$ **c)** $y = \ln \sqrt{\frac{x-1}{x+1}},\ x_0 = 3$

598. a) $y = \sqrt{\ln 2x^2},\ x_0 = -2$ **b)** $y = \sqrt{\frac{\ln x}{x}},\ x_0 = 3$ **c)** $y = \sqrt[3]{\ln \frac{x+a}{a-x}},\ x_0 = 0\ (a \in \mathbb{R}, a \neq x)$

599. a) $y = \ln \sqrt{\frac{2+3x}{2-3x}},\ x_0 = \frac{\sqrt{2}}{3}$ **b)** $y = \ln \sqrt{\frac{3x-7}{3x+7}},\ x_0 = \frac{\sqrt{70}}{3}$ **c)** $y = \ln \sqrt{\frac{4x-5}{4x+4}},\ x_0 = \frac{3\sqrt{5}}{4}$

Vermischte Aufgaben

Sofern die Funktionsgleichung zweier Variablen x und y nach keiner der Variablen gelöst ist (z. B. $x - 5y = 3$), spricht man von einer sogenannten **impliziten Funktion**. Durch Lösen der Gleichung nach y $\left(x - 5y = 3 \Leftrightarrow y = \frac{x}{5} - \frac{3}{5}\right)$ erhält man die Gleichung der **expliziten Funktion**.

Die nachstehenden Relationen sind nach y zu lösen und zu differenzieren:

600. a) $2x^2 + xy - 3y^2 = 0$ **b)** $x^2y^2 + y^2 - 9 = 0$ **c)** $y^2 - 8y - x = 0$

601. a) $x^2 + y^2 = 25$ **b)** $x^2y^2 + 3y^2 - 5 = 0$ **c)** $x^4 - 2xy^2 + y^2 = 1$

Sofern $y = f(x)$ positiv ist, können wir beide Seiten der Gleichung zur Basis e logarithmieren: $\ln y = \ln f(x)$. Differenziert man die linke und die rechte Gleichungsseite nach x, ergibt sich unter Beachtung der Kettenregel $\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$. Aus dem letzten Ausdruck lässt sich y' berechnen. Das Verfahren nennt man **logarithmisches Differenzieren**. Das logarithmische Differenzieren ist manchmal vorteilhafter als der übliche Weg zur Berechnung der Ableitung.

Bei den folgenden Aufgaben ist das logarithmische Differenzieren anzuwenden:

602. a) $f(x) = (x-1)(x+2),\ f'(3) = ?$ **b)** $f(x) = \frac{x+1}{x-3},\ f'(5) = ?$ **c)** $f(x) = (x+7)(x-9),\ f'(x) = ?$

603. a) $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2+6},\ f'(x) = ?$ **b)** $f(x) = \sqrt{x^2-5x+1},\ f'(5) = ?$ **c)** $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{(x+2)(x-3)}},\ f'(5) = ?$

604. Die Ableitungsregel der **allgemeinen Exponentialfunktion** ist herzuleiten, indem $y = a^x\ (a > 0)$ logarithmiert und anschließend nach der Kettenregel differenziert wird.

$$[a^{f(x)}]' = a^{f(x)} f'(x) \ln a$$

Im Hinblick auf Aufgabe **604.** ist $f'(x_0)$ zu ermitteln:

605. a) $y = 10^{3x+1},\ x_0 = 0$ **b)** $y = 4 \cdot 3^{x^2},\ x_0 = -1$ **c)** $y = a^{\sqrt{x^2-3}},\ x_0 = 2$

606. a) $y = b^{uvwx},\ x_0 = 5\ (b \in \mathbb{R}^+)$ **b)** $y = 2^{x^2-7}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}},\ x_0 = 3$ **c)** $y = e^{\sqrt[4]{x}} \cdot 2^{x^3-5},\ x_0 = 1$

607. a) $y = x^2 \cdot 2^{3x^2+1},\ x_0 = -1$ **b)** $y = 2^{e^{-x^3}},\ x_0 = 0$ **c)** $y = a^{ax} \tan^3 ax,\ x_0 = 1$

608. a) $y = \frac{\cos^2 3x}{2^{5x}},\ x_0 = 0{,}5$ **b)** $y = \frac{3{,}4^{5x^2}}{2\sin^2 x},\ x_0 = 1$ **c)** $y = \frac{e^{\sqrt[3]{x}} \cdot 2^{x^5}}{[\tan(x^2-1)]^2},\ x_0 = 2$

Die erste Ableitung ist zu bilden:

609. a) $y = \ln \frac{\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt{x^2+1} + x}$ **b)** $y = \frac{1}{3} \ln \frac{\sqrt{x+9} - 3}{\sqrt{x+9} + 3}$ **c)** $y = \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt{16+x} + 4}{\sqrt{x+16} - 4}$

610. a) $y = \ln \sqrt{\cos x}$ **b)** $y = \frac{\ln \sin x}{\ln \cos x}$ **c)** $y = \ln \sqrt{\frac{1-\sin x}{\sin x + 1}}$

611. a) $y = \ln \ln x$ **b)** $y = \ln \ln \sin x$ **c)** $y = \ln \ln \frac{\tan x + 1}{1 - \tan x}$

612. a) $y = \ln^4 x$ **b)** $y = \ln^2 \cos^2 x$ **c)** $y = \ln^2 \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}}$

613. a) $y = \ln(x^2 e^x)$ **b)** $y = x^2 \ln \sin^2 x$ **c)** $y = x^3 \ln(5x^2 e^{\frac{1}{x}})$

614. a) $y = e^{-x} \cos 4x$ **b)** $y = e^{x^2} \tan^2 5x$ **c)** $y = a^{ax^2} \sin^2 ax^2$

615. a) $y = a^{\sin x} \ln a$ **b)** $y = a^{\cos x} \ln x$ **c)** $y = x^3 a^{\tan^3 x^3} \ln^3 x^3$

616. a) $y = 2^{-3x^2} \cos^2 3x$ **b)** $y = 3^{-2x^2} \sin^2 3x$ **c)** $y = 5e^{\sqrt{x}} \ln^3 \sqrt{e^{-x}}$

Bei den folgenden Autgaben ist die erste Ableitung zu ermitteln, indem die Gleichung $y = f(x)$ zunächst logarithmiert und anschließend differenziert wird:

617. a) $y = x^x$ **b)** $y = (e^x)^x$ **c)** $y = x^{\sqrt{x}}$ **d)** $y = \sqrt[x]{x}$

618. a) $y = (e^x - e^{-x})^x$ **b)** $y = \sqrt[4]{\frac{1}{x}}$ **c)** $y = x^{\sin x}$ **d)** $y = \ln x \cdot x^{\cos x}$

619. An welcher Stelle hat das Dreieck, das von der Normalen auf die Kurve $y = (x+4)e^{-\frac{x}{4}}$, der Ordinate und der x-Achse begrenzt wird, den größten Flächeninhalt A_{max}?

620. Die Funktion mit der Gleichung **a)** $y = x \cdot \ln x$ **b)** $y = x(\ln x)^2$ **c)** $y = x + \ln x - 1$ **d)** $y = 2\ln(x^2 - 1)$ **e)** $y = xe^x$ **f)** $y = 2xe^{-x}$ **g)** $y = (x^2 - 1)e^{-x}$ **h)** $y = 0{,}5 \frac{e^x}{1+x}$ ist zu untersuchen.

621. a) Wir gehen davon aus, dass führende Nullen in unserem dekadischen Zahlensystem geschrieben werden. Die dreistelligen Zahlen reichen somit von 000 bis 999. Wie viele dreistellige Zahlen gibt es unter diesem Gesichtspunkt?

b) Wie viele Zahlen kann man im Sinne der obigen Ausführungen darstellen, wenn **nicht** unser Zahlensystem mit der Basis 10, sondern allgemein ein System mit der Basis B herangezogen wird? Wie groß ist die Anzahl V der n-stelligen Zahlen, die sich in einem System mit der Basis B veranschaulichen lassen?

c) In unserem **Stellenwertsystem** führen 10 Einer zum Zehner, 10 Zehner zum Hunderter, 10 Hunderter zum Tausender usw. Durch die Stellung innerhalb des Zahlzeichens wird der Wert deutlich gemacht: $536 = 5 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$. Es werden also jeweils 10 Ziffern an der Einer-, der Zehner- und der Hunderterstelle gebraucht, um jede beliebige dreistellige Zahl darzustellen. Nehmen wir nun an, wir verfügen über einen „Setzkasten", in dem jedes Symbol ausreichend oft vorkommt. Mit wie vielen Symbolen ist dieser Setzkasten auszustatten, um sämtliche dreistellige Zahlen von 000 bis 999 zu beschreiben?

d) Die Anzahl unserer Setzkastensymbole soll den „Bezeichnungsraum" R bilden. Wie groß ist R, wenn n-stellige Zahlen zur Basis B dargestellt werden?

e) Es ist jene Basis B zu ermitteln, für die ein gegebener Zahlenvorrat V mit dem minimalen Bezeichnungsraum R dargestellt werden kann.

8. Problemstellungen der Physik und Technik

Elektrotechnik/Elektronik

622. In Claudias Wohnzimmer soll die Wandleuchte W mit dem Lichtschalter S elektrisch verbunden werden. Als erfahrene Handwerkerin weiß Claudia natürlich, dass sie die Leitung nicht entlang der roten, sondern z. B. der blauen Linie (vgl. nebenstehende Figur) zu verlegen hat.

a) Aus reiner Neugierde interessiert sie sich aber dafür, wie viel Zentimeter Kabel sie sich bei der ersten Methode im Vergleich zur zweiten ersparen würde.

Anleitung: Man wähle x als unabhängige Variable.

b) Warum ist es doch sinnvoll, die Leitung entlang der blauen Linie zu verlegen?

(Bemaßung in cm)

623. Durch zwei parallele Drähte ($a = 5$ cm) fließen die gegensinnigen Ströme $I_1 = 2A$ und $I_2 = 2{,}5A$. In welchem Punkt ist die magnetische Feldstärke $H = H_1 + H_2$ minimal?

Anleitung: Für jeden Leiter gilt $H = \frac{1}{2\pi r}$, $[H] = 1A/m$.

624. Für die Dimensionierung eines Heißwasserspeichers ist die Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärme c(t) von Wasser erforderlich: $c(t) = 4212{,}5 - 2{,}117t + 0{,}0311t^2$, $0° \leqslant t \leqslant 50°$.

a) Wo hat c(t) einen Extremwert?
b) Handelt es sich dabei um ein Minimum?
c) Wie groß ist der zugehörige Extremwert?

Anleitung: Die spezifische Wärme von Wasser gibt an, wie viel Energie 1 kg Wasser zugeführt werden muss, um es um 1°C zu erwärmen, $[c] = 1\,\mathrm{J kg^{-1} K^{-1}}$.

625. Es sind die **a)** Extremstellen **b)** Extremwerte der Scheinleistung $P_s(t) = u(t)\,i(t)$ eines Wechselstromkreises zu berechnen, $u(t) = U_0 \sin \omega t$, $i(t) = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$.

Anleitung: $P_s(t)$ ist eine periodische Funktion!

626. Eine Silizium-Schaltdiode D wird an eine Gleichspannungsquelle $U_0 = 2V$ angeschlossen. Für die „Driftspannung" der Diode gilt dann der Zusammenhang:

$$U_0(I) = \frac{kT}{e} \ln\left(1 + \frac{I}{I_0}\right)$$

Für die Diode „BAL 74" von Siemens gilt: $\frac{kT}{e} = 0{,}02424\,V$, $I_0 = 20\,\mu A$

Mit Hilfe des Vorwiderstands $R = 10\,\Omega$ lässt sich nun der sogenannte **Arbeitspunkt A** der Diode einstellen. Dieser kann — ausgehend von der Maschenregel $U_0 = I \cdot R + U_D$ — mit Hilfe des NEWTONschen Näherungsverfahrens bestimmt werden. Man berechne die Koordinaten des Arbeitspunkts.

Anleitung: Für $U_D = 0$ ergibt sich ein günstiger Startwert $(I_D)_0$.

627. Bei einer Wirbelstromkupplung (vgl. nebenstehendes Foto) erfolgt die Übertragung des Drehmoments M **ohne** jegliche mechanische Verbindung. Das übertragene Moment ist dann eine Funktion des „Schlupfs" s (Das ist der relative Unterschied zwischen Motordrehzahl und Drehzahl der Antriebswelle.):

$$M(s) = K \cdot \frac{R}{s} \cdot \frac{\left(\frac{R}{s}\right)^2 + X_1^2}{\left[\left(\frac{R}{s}\right)^2 + X_1 X_2\right]^2} \quad K, R, X_1, X_2 \text{ sind konstant}$$

a) Man berechne M(0).

b) $\lim_{s \to \infty} M(s) = ?$

c) Wie groß ist der Kippschlupf s_k, bei dem das maximale Drehmoment M_{max} übertragen wird?

d) Existieren Wendepunkte im Kurvenlauf?

e) Es ist die Funktion M(s) mit Hilfe der Ergebnisse **a)** bis **d)** über dem Intervall [0,1] grafisch darzustellen.

Wirbelstromkupplungen setzt man unter anderem zum Antrieb von Förderbändern ein, bei denen das Fördergut nicht stetig, sondern schubweise transportiert wird, d. h. das Band wird abwechselnd beschleunigt und abgebremst. Ein Motor müsste dabei immer ein- und ausgeschaltet werden. Da mechanische Kupplungen nicht regelbar sind, wäre ein frühzeitiger Verschleiß die Folge.

628. Bandfilter

Wenn wir auf unserem Rundfunkgerät Ö3 oder Ö1 einstellen, so wird die Empfangsantenne über die gewünschte Sendefrequenz hinaus noch eine beträchtliche Anzahl weiterer Sende- und Störfrequenzen aufnehmen. An diesen sind wir natürlich gar nicht interessiert. Um diesen überflüssigen „Wellensalat" zu unterdrücken, werden sogenannte **Bandfilter** eingesetzt.

Die Idee ist ganz einfach: Bis auf ein bestimmtes „Frequenzband" $[\Omega_1, \Omega_2]$[1], das verstärkt wird, werden die außerhalb dieses Intervalls vorkommenden Frequenzen abgeschwächt. Die nebenstehende Figur zeigt die ideale Übertragungskurve eines Bandfilters. Alle technischen Realisierungen versuchen selbstverständlich dieses Ideal zu erreichen. Die Übertragungskurven der zugehörigen Schaltungen weichen aber mitunter recht stark davon ab. Mit Hilfe der Differenzialrechnung können diese Bandfilterkurven und ihre Güte systematisch, wie im Folgenden angedeutet wird, untersucht werden.

Die Verstärkung v eines zweikreisigen Bandfilters lässt sich Folgendermaßen ausdrücken: $v = \frac{a}{\sqrt{(a-\Omega^2)^2 + \Omega^2}}$
(a.....Formfaktor (a > 0))

a) Es ist die Verstärkungsmitte v_0 zu berechnen und ihre Unabhängigkeit vom Formfaktor nachzuweisen. (**Normierte Darstellung** der Verstärkung v.)

b) Die Bandbreite wird durch Ω_1 und Ω_2 (Sie entsprechen den Grenzfrequenzen.) begrenzt. Diese sind zu ermitteln.
Anleitung: $v(\Omega_1) = v(\Omega_2) = v_0$

c) Unter gewissen Umständen können auf beiden Seiten der Mitte jeweils ein Hochpunkt (die sogenannten **Höcker**) auftreten. Zunächst berechne man allgemein die zugehörigen Verstimmungen[1] Ω_{H1} und Ω_{H2}. Da hier ausschließlich **symmetrische** Bandfilterkurven diskutiert werden, gilt für die Höckerverstärkungen: $v(\Omega_{H1}) = v(\Omega_{H2}) = v_H$. Nun ist v_H und anschließend sind die Koordinaten der Höcker P_1 und P_2 zu bestimmen.

v
Ω₁ 0 Ω₂ Ω
f₁ f₀ f₂ f

Das obige Foto zeigt Bandfilter im Bereich von 10,7 MHz und 100 MHz (offene Ausführung mit Silberdrahtspulen).

v
P₁ v_H P₂
w
v₀
Ω₁ Ω_H1 0 Ω_H2 Ω₂ Ω

[1]) Bei der „Verstimmung" Ω handelt es sich nur um eine lineare Transformation der Frequenz f: $\Omega \sim (f - f_0)$.

628. (Fortsetzung)

d) Wie lauten die folgenden funktionellen Zusammenhänge?

$\Omega_1 = \Omega_1(\Omega_{H1})$

$\Omega_2 = \Omega_2(\Omega_{H1})$

e) Es ist jene Bedingung anzugeben, die die Existenz beider Höcker garantiert. Weiters ist ein Kriterium zu finden, mit dem man entscheiden kann, ob es sich bei $(0, v_0)$ je nach Größe des Formfaktors um einen Hoch- oder Tiefpunkt handelt.

f) Bei der Dimensionierung von Bandfiltern ist (neben der „Trennschärfe") die sogenannte **Welligkeit w** ein wichtiges prozentuelles Maß seiner Güte: $w = \frac{v_H - v_0}{v_0}$.

Man beschreibe w als Funktion von a.

g) Wie verhalten sich die Bandfilterkurven für $\Omega \to \pm\infty$?

h) Die nebenstehende Tabelle ist für die Parameterwerte a = 0,5, a = 1 und a = 2 zu vervollständigen. Danach sind die zugehörigen normierten Darstellungen der Bandfilter in ein gemeinsames Diagramm einzutragen.

a	$\Omega_{1,2}$	$\Omega_{H1,H2}$	v_H	W
0,5				
1				
2				

Maschineningenieurwesen / Mechatronik

629. Eine Eisenschraube mit der Reibungszahl $\mu = 0{,}2$ und dem Steigungswinkel α hat den Wirkungsgrad $\eta = \frac{\tan\alpha}{\tan(\alpha+\varphi)}$.

a) Man berechne jenen Steigungswinkel, bei dem η maximal wird.

b) Der Graph von $\eta(\alpha)$ ist für $0° \leq \alpha \leq 60°$ zu zeichnen.

Anleitung: $\mu = \tan\varphi$. Die Gleichung für η wird plausibel, wenn man sich vorstellt, dass die bestehende Reibung die **Hebearbeit** entlang der schiefen Ebene — das ist das hier verwendete Modell der Schraube — wie ein um φ vergrößerter Steigungswinkel erhöht.

Bautechnik

630. Das parabelförmige Tragseil einer Hängebrücke hat einen Durchhang von 50 m und spannt sich zwischen zwei Pfeilern, die 200 m voneinander entfernt stehen. Man bestimme den Winkel α zwischen Seil und Pfeiler.

631. In ein rechteckiges Feld eines Fachwerks (a = 70 cm, b = 56 cm) ist eine Diagonalstrebe der Breite c = 10 cm einzupassen. Ihre Länge x ist zu berechnen.

Anleitung: Das rosa Dreieck ist dem blauen ähnlich.

632. Um die Belastbarkeit von Tragekonstruktionen im Hochbau zu ermitteln, ist die Gleichung der **elastischen Linie** heranzuziehen. Die elastische Linie ist jene Kurve, die Träger bzw. Stäbe unter Einwirkung der Kraft F bilden.

In den einschlägigen Fachbüchern finden sich die verschiedenen Gleichungen:

(1) Beidseitig eingespannter Träger mit Gleichlast

$$y = \frac{F\ell^3}{24\,EI} \cdot \frac{x^2}{\ell^2}\left(1 - \frac{x}{\ell}\right)^2 \qquad 0 \leqslant x \leqslant \ell$$

(2) Halb eingespannter Träger mit Dreieckslast

$$y = \frac{F\ell^3}{60\,EI} \cdot \frac{x}{\ell}\left(1 - \frac{x^2}{\ell^2}\right)^2 \qquad 0 \leqslant x \leqslant \ell$$

(3) Symmetrisch belasteter, halb eingespannter Träger

$$y = \begin{cases} \dfrac{F\ell^3}{32\,EI} \cdot \dfrac{x}{\ell}\left(1 - \dfrac{5x^2}{3\ell^2}\right) & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\ell}{2} \\[2ex] \dfrac{F\ell^3}{32\,EI}\left(\dfrac{\ell - x}{\ell}\right)^2\left(3 - \dfrac{11(\ell - x)}{3\ell}\right) & \dfrac{\ell}{2} \leqslant x \leqslant \ell \end{cases}$$

(4) Unsymmetrisch belasteter, halb eingespannter Träger

$$y = \begin{cases} \dfrac{F\ell^3}{4\,EI}\left(\dfrac{b}{\ell}\right)^2\left(\dfrac{x}{\ell}\right)\left[\dfrac{a}{\ell} - \dfrac{2x^2}{3\ell^2}\left(1 + \dfrac{a}{2\ell}\right)\right] & 0 \leqslant x \leqslant a \\[2ex] \dfrac{F\ell^3}{4\,EI}\left(\dfrac{a}{\ell}\right)\left(\dfrac{\ell - x}{\ell}\right)^2\left[1 - \dfrac{a^2}{\ell^2} - \dfrac{\ell - x}{\ell} \cdot \left(1 - \dfrac{a^2}{3\ell^2}\right)\right] & a \leqslant x \leqslant \ell \end{cases}$$

(5) Asymmetrisch belasteter, eingespannter Stab

$$y = \begin{cases} \dfrac{F\ell^3}{2\,EI}\left(\dfrac{b}{\ell}\right)^2\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^2\left[\dfrac{a}{\ell} - \dfrac{x}{3\ell}\left(1 + \dfrac{2a}{\ell}\right)\right] & 0 \leqslant x \leqslant a \\[2ex] \dfrac{F\ell^3}{2\,EI}\left(\dfrac{a}{\ell}\right)^2\left(\dfrac{\ell - x}{\ell}\right)^2\left[\dfrac{b}{\ell} - \dfrac{\ell - x}{3\ell}\left(1 + \dfrac{2b}{\ell}\right)\right] & a \leqslant x \leqslant \ell \end{cases}$$

Es ist jeweils **a)** die größte Durchbiegung **b)** die Lage des Wendepunkts und **c)** der Anstieg der Wendetangente zu bestimmen.

Bemerkung: E ..... Elastizitätsmodul, I ..... Flächenträgheitsmoment

Physik

633. In welcher Höhe h ist eine Lampe über der Tischmitte (vgl. nebenstehende Figur) zu montieren, damit das Buch (B) „Schalk, Mathematik 3", das Gerald gerade begeistert liest, von der Lampe L möglichst gut beleuchtet wird ($a = 70$ cm)?

Anleitung: Die Beleuchtungsstärke E ist direkt proportional zu $\frac{\sin\alpha}{r^2}$.

634. Die sogenannte **Anomalie des Wassers** besteht darin, dass seine Dichte ρ in Abhängigkeit von t (in °C) ein Maximum ausbildet. Man ermittle t_{max} und ρ_{max} aus der Näherungsgleichung

$\rho(t) = at^2 + bt + c + \frac{d}{1+et}$, $t \in [0, 10]$.

($a = -3{,}164 \cdot 10^{-3}\,\text{kgm}^{-3}\text{K}^{-2}$, $b = -0{,}286\,\text{kgm}^{-3}\text{K}^{-1}$, $c = 1020{,}797\,\text{kgm}^{-3}$, $d = -20{,}957\,\text{kgm}^{-3}$, $e = 0{,}0169\,\text{K}^{-1}$)

635. Lotrechter Wurf

Ein Tischtennisball soll senkrecht in die Höhe geworfen werden und nach $t = 1\,\text{s}$ Flugzeit den höchsten Punkt erreichen. Welche Anfangsgeschwindigkeit v_0 muss der Ball haben? Wie hoch fliegt er?

Anleitung: $y = v_0 t - \frac{g}{2}t^2$

636. Schiefer Wurf

Unter welchem Winkel α ist der Ball mit der Geschwindigkeit v_0 zu werfen, um eine maximale Reichweite d zu erzielen?

Anleitung: $y = x\tan\alpha - \frac{g}{2}\left(\frac{1}{v_0} \cdot \frac{x}{\cos\alpha}\right)^2$

Pierre de FERMAT (1601—1665) war nicht nur ein glänzender Mathematiker, auch die Physik bereicherte er — z. B. durch das später nach ihm benannte Prinzip: Ein Lichtstrahl, der vom Punkt P zum Punkt Q gelangen soll, schlägt immer den Weg ein, der ein Minimum an Zeit erfordert.

Die beiden folgenden Gesetze sind Konsequenzen dieses Prinzips.

637. Reflexionsgesetz

Der Lichtstrahl startet in P und soll an der x-Achse in den Punkt Q reflektiert werden. Nach dem FERMATschen Prinzip wählt der Strahl den zeitoptimalen Weg, d. h. bei konstanter Ausbreitungsgeschwindigkeit c nimmt auch die Länge l(x) des Wegs PRQ ein Minimum an. Man bestimme zunächst l(x), seine Extremstelle und folgere daraus eine Beziehung zwischen dem Einfallswinkel α und dem Reflexionswinkel β.

638. Brechungsgesetz

Der Lichtstrahl wird auf seinem Weg von P nach Q im Punkt B gebrochen, d. h. die x-Achse bildet nun eine Grenze zwischen zwei Medien, in denen der Lichtstrahl sich unterschiedlich schnell ausbreitet (c_1, c_2). Auf Grund des FERMATschen Prinzips wird die Laufzeit für den Weg PBQ minimal. Diese Zeit t(x) ist allgemein zu bestimmen und zu minimieren. Aus dem Ergebnis kann ein Zusammenhang zwischen α, β, c_1 und c_2 erschlossen werden.

639. Für den Bau von Sonnenkollektoren zur Warmwasseraufbereitung und zur Raumheizung ist die Kenntnis der Energieverteilung E der Sonnenstrahlung in Abhängigkeit der Wellenlänge λ des Sonnenlichts von entscheidender Bedeutung. Den Zusammenhang zwischen der Wellenlänge intensivster Strahlung λ_{max} und der zugehörigen Temperatur T (vgl. die rote strichlierte Kurve in nachstehender Figur) beschreibt das sogenannte **WIENsche[1] Verschiebungsgesetz**: $\lambda_{max} \cdot T = b$

Die Konstante b ist nun zu bestimmen. Wir wollen schrittweise vorgehen:

a) Das Emissionsvermögen $E(\lambda)$ eines schwarzen Körpers ergibt sich aus dem sogenannten **PLANCKschen[2] Strahlungsgesetz**: $E(\lambda) = \frac{c^2 h}{\lambda^5}\left(e^{\frac{ch}{k\lambda T}} - 1\right)^{-1}$.

Der Graph dieser Funktion ist in nebenstehender Figur (für verschiedene Werte des Parameters T) schwarz eingezeichnet.

Man berechne λ_{max}, d. h. jenes λ, für das E maximal wird.

Anleitung: Die Substitution $x = \frac{ch}{k\lambda T}$ erweist sich als günstig. Auf die sich ergebende transzendente Gleichung für x wende man das NEWTONsche Verfahren an: Startwert $x_0 = 5$.
$c = 3 \cdot 10^8$ m/s ..... Lichtgeschwindigkeit im Vakuum, $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ Js ..... PLANCKsches Wirkungsquantum, $k = 1{,}387 \cdot 10^{-23}$ JK^{-1} ..... BOLTZMANN[3]-Konstante.

b) Mit Hilfe des in **a)** errechneten Werts für x bestimme man nun die Konstante b im WIENschen Verschiebungsgesetz.

c) Die Wellenlänge intensivster Sonnenstrahlung ($T = 6000$ K) ist mittels WIENschem Verschiebungsgesetz zu berechnen.

640. Mechanische Unruhen in Uhren, Federungseinrichtungen in Kraftfahrzeugen und Eisenbahnwaggons und elektrische Schwingkreise erzeugen bei einer einmaligen Erregung ohne weiteren Antrieb eine gedämpfte Schwingung der Form: $y = y_0 e^{-\delta t}$ (vgl. nebenstehende Figur).

a) Es ist zu zeigen, dass die Kurve der gedämpften Schwingung zwischen ihren beiden Einhüllenden $y = +y_0 e^{-\delta t}$ und $y = -y_0 e^{-\delta t}$ liegt.

b) Nullstellen?

c) Man berechne die Berührpunkte der Dämpfungskurve mit ihren Einhüllenden. Wie lässt sich darüber hinaus nachweisen, dass die Kurven einander **berühren** und nicht bloß schneiden?

d) Liegen die Extremwerte immer jeweils genau zwischen zwei benachbarten Nullstellen? Begründung!

e) Sind die Wendepunkte der Dämpfungskurve — so wie bei der Sinuskurve — mit ihren Nullstellen identisch? Begründung!

f) Man bestimme den Wert des Terms $\ln \frac{y(t)}{y(t+T)}$. Was besagt er?

y ..... Momentanauslenkung des Systems
y_0 ..... Anfangsamplitude der gedämpften Schwingung
t ..... Zeit
δ ..... Dämpfungskonstante
ω ..... Winkelgeschwindigkeit der Schwingung

641. Eine Rakete (Masse m) befindet sich auf einem geraden Flugkurs von der Erde zum Mond. Der Einfluss der Gravitation beider Himmelskörper wird durch den Term $(F_E - F_M)^2$ dargestellt. In welcher Entfernung x von der Erde ist dieser Term F minimal?

Anleitung: $F_E = \frac{Gmm_E}{x^2}$, $F_M = \frac{Gmm_M}{(d-x)^2}$, $m_M = \frac{m_E}{81}$

[1]) **Wilhelm Karl Werner WIEN** (1864–1928), deutscher Nobelpreisträger für Physik.
[2]) **Max Karl Ernst Ludwig PLANCK** (1858–1947), deutscher Nobelpreisträger für Physik.
[3]) **Ludwig BOLTZMANN** (1844–1906), österreichischer Physiker.

Vermischte Aufgaben

642. Die nebenstehenden Ableitungsregeln der sogenannten **Arkusfunktionen**[1] sind zu beweisen.

a) Die Funktion $y = \arcsin x$ lässt sich auch als Funktion $x = x(y)$ anschreiben. $x = ?$

b) Man bestimme $\frac{dx}{dy}$.

c) $\frac{dx}{dy}$ ist als Funktion von x darzustellen.
Anleitung: $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$

d) $y' = \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1} = \ldots$
Warum muss die Definitionsmenge auf $|x| < 1$ eingeschränkt werden?

e) Man beweise die Ableitungsregel für $y = \arccos x$.
Anleitung: Vgl. a) bis d)

f) Man beweise die Ableitungsregel für $y = \arctan x$.
Anleitung: Vgl. a) bis d), $\frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1$$
$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1$$
$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

643. Feinstruktur mittels Röntgenstrahlbeugung

Die Festigkeit eines Stoffs ist durch seinen kristallinen Aufbau bedingt, wobei bei einem idealen Festkörper die Atome an genau definierten Punkten des Kristallgitters sitzen. Diese regelmäßige Anordnung verleiht dem Festkörper die charakteristischen Eigenschaften wie Härte und Festigkeit.

Laborversuche zur Ermittlung der Materialeigenschaften sind bei der Prüfung eines Werkstoffs und bei der Qualitätskontrolle unerlässlich.

Mit der Beugung von Röntgenstrahlen an Kristallgittern — ihre Entdeckung im Jahre 1912 ist dem deutschen Physiker Max von LAUE (1879–1960) zu verdanken — kann der Werkstoff zerstörungsfrei geprüft werden. Dabei lässt sich die Strahlungsintensität nach der Formel $I(\Phi) = I_{max} \cdot \frac{\sin^2 \Phi}{\Phi^2}$ berechnen.

Zur Abschätzung der Werkstoffgüte (Auffinden etwaiger Störstellen) ist die Kenntnis des genauen Kurvenverlaufs eines idealen Kristalls unumgänglich (vgl. nebenstehende Figur):

a) Man zeige: $I(0) = I_{max}$

b) Nullstellen?

c) Beugungsextrema?

d) Wie groß ist die Halbwertsbreite β?

Max von LAUE (1879–1960)

644. In der industriellen Qualitätssicherung ist die sogenannte **Normalverteilungskurve** mit der Gleichung $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ von großer Bedeutung. Hierbei ist $f(x)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte[2], μ der Mittelwert und σ die Standardabweichung.

Es ist zu zeigen, dass die Normalverteilungskurve bei $x = \mu$ ein Maximum hat und die Wendepunkte bei $x_1 = \mu - \sigma$ und $x_2 = \mu + \sigma$ zu finden sind.

Anleitung: Man bilde $f'(x)$. Der Ausdruck $e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ ist in jedem Fall ungleich Null. $\Rightarrow x - \mu = 0$ usw.

---

[1] Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen werden auch **zyklometrische Funktionen** genannt.

[2] Auf die Bedeutung in der industriellen Qualitätssicherung werden wir in Band 4 noch zu sprechen kommen.

645. Sind die Müllberge noch schaffbar?

In einem verschwenderischen Einweg**verbrauch** wandeln die Industrieländer Rohstoffe in Schadstoffe und Müll um, anstatt sie wiederholt zu **gebrauchen**.

Dabei entstehen rasch anwachsende Müllberge. Innerhalb der letzten 30 Jahre verzehnfachte sich beispielsweise Wiens Müll. Dem Müllvolumen des Jahrs 1990 von $6{,}8 \cdot 10^6\,m^3$ entspricht eine Kugel mit etwa 235 m Durchmesser. (Der Stephansdom ist nur 137 m hoch.)

Die vorhandenen Deponien sind überfüllt. Kaum eine österreichische Gemeinde möchte eine Sondermüllentsorgungsanlage und die derzeitige Müllverbrennung belastet die Luft mit Schadstoffen.

Würden die Stoffe nach ihrem „Gebrauch" aufbereitet und wieder verwertet werden, könnte der aus den Stoffen gezogene Nutzen vermehrt, die vorhandenen Rohstoffe mehreren Menschen zugänglich gemacht und schließlich die Müllmengen verkleinert werden. Derzeit wird jedoch nur ein kleiner Anteil der Stoffe wieder verwertet. Der Wiederverwertung ist dort eine ökonomische Grenze gezogen, wo die Neugewinnung des Rohstoffs billiger ist.

a) Von einem Rohstoff (Aluminium, Stahl, Kupfer usw.) soll ein Anteil von w % wieder verwertet werden, so dass nur mehr (100 – w) % neu gewonnen werden müssen.

Der Preis des neugewonnenen Stoffs beträgt P_N (in Euro/kg) und der Preis des wieder verwerteten Stoffs beträgt P_W (in Euro/kg), so dass sich folgender Mischpreis P(w) ergibt:

$$P(w) = P_W \cdot \frac{w}{100} + P_N \cdot \frac{100 - w}{100} \text{ (in Euro/kg)}$$

P_W ist aber nicht konstant, sondern steigt mit der Rate w an, da der zur Wiederverwertung erforderliche Aufwand bzw. die Kosten mit w steigen:

$$P_W(w) = \frac{100}{100 - w} \cdot P_W(0) \text{ (in Euro/kg)}$$

$P_W(0)$ ist eine Konstante, die dem Preis einer besonders geringen Wiederverwertung ($w \to 0$) entspricht.

Die Wiederverwertung des Stoffs ist dann **rentabel**, wenn der Mischpreis P(w) möglichst klein wird, d. h. bei der „rentablen Rate" w_r ein Minimum besitzt. Dieses wird sich auch in der wirtschaftlichen Praxis einstellen. Man berechne w_r allgemein und weise nach, dass $w = w_r$ eine Minimumsstelle ist.

b) Wie kann man nun in einer freien Marktwirtschaft diese optimale Wiederverwertungsrate w_r anheben, dass sie auch weiterhin optimal (im obigen Sinn) bleibt?

Ganz einfach kann dies dadurch erreicht werden,

(1) den Rohstoffpreis P_N um eine Rohstoffabgabe RA zu steigern ($\overline{P}_N = P_N + RA$) und

(2) die Wiederverwertung mit dieser Rohstoffabgabe finanziell zu fördern ($\overline{P}_W(w) = P_W(w) - RA$).

Mit diesem Abgaben–Subventionssystem ergibt sich ein neuer Mischpreis $\overline{P}(w)$ (vgl. Gleichung aus **a)**):

$$\overline{P}(w) = \overline{P}_W(w) \cdot \frac{w}{100} + \overline{P}_N \cdot \frac{100 - w}{100} = \ldots$$

Man berechne nun allgemein die Extremstelle $w = \overline{w}_r$ des neuen Mischpreises $\overline{P}(w)$ und zeige, dass es sich dabei um ein Minimum handelt.

646. Versöhnung von Ökonomie und Ökologie

Das Kohlekraftwerk Dürnrohr (Niederösterreich) ist das größte österreichische Kraftwerk dieser Art. Seine Rauchgasentschwefelungsanlage arbeitet nach der **„Sprühabsorptionstechnik"** und kann 90% eines Schadstoffs (Schwefeldioxid) aus dem Rauchgas entfernen.

Dabei entstehen die Gesamtkosten $K(s) = As^{-n} + Bs$, $n \in \mathbb{N}^*$ (vgl. nebenstehende Figur)

Der linke Summand bedeutet die Kosten der Schadstoffabsenkung auf s% (des Werts ohne Entschwefelung). Er wird unendlich für $s \to 0$. Der rechte Summand modelliert die Schadkosten, die entstehen, wenn s% der Schadstoffe an die Umwelt abgegeben werden. Sie entsprechen dem Kostenaufwand, der nötig ist, die Folgen der Schadstoffe völlig zu beseitigen.

Man ermittle allgemein die Stelle s_{opt} minimaler Kosten.

Handelt es sich tatsächlich um ein Minimum?

Der Graph von K(s) ist charakteristisch für alle Schadstoffe. Er gilt auch für den Ausstoß von Schadstoffen in das Wasser oder in andere Ökosysteme.

647. Wärmedämmung

Die Wärmedämmung einer Mauer hängt von ihrem Baustoff ab: Eine Wand aus Hohlblockziegel dämmt so gut wie eine fünfmal so starke Betonwand und so gut wie eine Wand aus Glaswolle, die nur ein Zehntel der Wandstärke hat. Man drückt den Wärmeverlust durch die sogenannte **Wärmedurchgangszahl** k (in Watt pro Quadratmeter und pro Grad Celsius) aus. Sie ist von der Wandstärke d (in m) abhängig:

$$k(d) = \frac{4}{1 + S \cdot d}$$ S ..... Materialkonstante (vgl. nebenstehende Tabelle)

Baustoff	S in m^{-1}
Beton	1,9
gebrannter Vollziegel	6
gebrannter Hohlziegel	9,8
dampfgehärteter Gasbeton	18
Weichholz	29
Dämmstoff (Glas-, Steinwolle, Hartschaum, Kork)	98

Die Gesamtkosten K(d) setzen sich nun aus den Kosten der Wärmedämmung (linker Summand) und den Heizkosten (rechter Summand) zusammen:

$$K(d) = D \cdot d + 8{,}76 \cdot k(d)\,(T_i - T_a)\,t \cdot E$$

K(d) ..... Gesamtkosten in Euro/m^2
D ..... Kosten des Baustoffes in Euro/m^3
T_i ..... langfristige mittlere Innentemperatur in Grad Celsius
T_a ..... langfristige mittlere Außentemperatur in Grad Celsius
t ..... Lebensdauer des Hauses in Jahren
E ..... Energiekosten in Euro/kWh

a) Wie ergibt sich der Faktor 8,76?

Anleitung: Man beachte die Einheiten der verschiedenen physikalischen Größen.

b) Eine dicke Wand kostet zu viel, eine dünne Wand hat zu hohe Wärmeverluste und ist deshalb auch zu teuer. Man ermittle allgemein die optimale Wanddicke d_{opt} sowie die minimalen Gesamtkosten $K(d_{opt})$.

Bemerkung: Es ist zu erwarten, dass d_{opt} mit der Temperaturdifferenz $T_i - T_a$ und den Energiekosten steigt, mit zunehmenden Baustoffkosten aber sinkt.

c) Die Dicke der Hartschaumwand (vgl. obige Tabelle) mit $D = 1000,—$ Euro/m^3 Baustoffkosten ist zu optimieren, wobei gilt: $T_i = 20°C$, $T_a = 0°C$, $t = 10$ Jahre, $E = 0{,}14$ Euro/kWh. Wie hoch sind die Gesamtkosten?

d) Mit Hilfe der Daten aus **c)** ist der Graph der Funktion K(d) zu zeichnen.

648. Zahlen sich Investitionen aus, die Energie und Rohstoffe sparen?

Ja, wenn sie gerade noch gewinnbringend sind. Dies trifft zu, wenn die Energie- bzw. Rohstoffeinsparung während einer Amortisationszeit a (in Jahren) gerade noch größer ist als die hierfür aufgewendete Investition. Betrachten wir die Situation im Detail: Die Investitionsmittel K werden von einer Bank zu einem Zinssatz p geliehen und verringern dadurch den jährlichen Verbrauch an Energie bzw. Rohstoffen um D. Der Preis der Energie bzw. des Rohstoffs beträgt P und die durch die Investition jährlich eingesparten Mittel $P \cdot D$ (jeweils in Euro). Einerseits sollen die Investitionskosten K nach Ablauf der Amortisationszeit a zurückgezahlt sein, andererseits kann dies aber nur aus laufenden Einnahmen erfolgen. Am **kostengünstigsten** ist es, K in a Raten (in der Höhe von $\frac{K}{a}$) der Bank zurückzuerstatten. Nach dem ersten Jahr sind dann $\frac{Kp}{100}$ Zinsen fällig, nach dem zweiten Jahr $\frac{Kp}{100} \cdot \frac{a-1}{a}$, nach dem dritten Jahr $\frac{Kp}{100} \cdot \frac{a-2}{a}$ usw. Die gesamte Belastung beträgt somit $K + \frac{Kp}{100} + \frac{Kp}{100} \cdot \frac{a-1}{a} + \frac{Kp}{100} \cdot \frac{a-2}{a} + \ldots + \frac{Kp}{100} \cdot \frac{1}{a}$ und muss den Einsparungen $a \cdot P \cdot D$ gleich sein.

a) Man stelle die Amortisationszeit in Abhängigkeit von K, p, P und D dar.

b) Welche Maßnahmen können die Amortisationszeit senken?

Anleitung: a ist von den Größen K, p, P, D abhängig. Man bestimme die Vorzeichen der Ableitungen $\frac{da}{dK}, \frac{da}{dp}, \frac{da}{dP}, \frac{da}{dD}$. Es ist zu beachten, dass nur $a > 0$ sinnvoll ist.

649. Wie rauh ist das Klima?

Die nebenstehende Figur zeigt die Abhängigkeit der Außentemperatur T von der Zeit t. T wird über mehrere Jahre gemittelt und heißt **Temperaturdauerlinie**.

$$T(t) = A - \frac{B}{C+t} - D\sqrt{218-t} \qquad 0 \leq t \leq 218$$

$$A = 13 \qquad B = 230{,}7$$

$$C = 11{,}8 \qquad D = 0{,}91$$

Am kältesten Tag (t = 0) liegt die mittlere Temperatur bei $T = -20°$ C, am 100. Tag bei $T = 0{,}9°$ C und am 218. Tag bei $T = +12°$ C

In der Funktion T(t) werden nur 218 Tage berücksichtigt (und nicht 365). Das rührt daher, dass die Außentemperatur an diesen Tagen immer niedriger als 12° C beträgt, d. h. an diesen 218 Tagen muss geheizt werden.

Wie groß ist der über die Heizperiode gemittelte Wert T_a der Außentemperatur?

650. Hochwasserschutz

Die Donau transportiert normalerweise $300 \cdot 10^6\ m^3$ Wasser täglich. Regelmäßig überschreitet sie (bei „Tausendjährigem Hochwasser") durchschnittlich 8 Tage lang den Normalpegel.

a) Die nebenstehende Figur stellt die Funktion mit der Gleichung $f(t) = \frac{-25}{12}t^4 + 50t^3 - 400t^2 + \frac{3200}{3}t + 300$ dar. Das entspricht näherungsweise dem Verlauf eines derartigen Hochwassers. Zu Beginn tritt eine Stoßwelle auf, die am Ende des zweiten Tags ihren Spitzenwert mit ca. $13{,}9 \cdot 10^3\ m^3/s$ erreicht. In den folgenden 6 Tagen normalisiert sich der Wasserstand wieder und sinkt auf seinen ursprünglichen Wert. Man berechne das Gesamtvolumen V des Hochwassers.

b) Zum Schutz vor Ausuferungen werden die Auwälder überschwemmt, die das Wasser nach Abflauen der Flut langsam wieder an die Donau abgeben. Die Wassermenge V (aus **a)**) möge sich dadurch zeitlich nach einer quadratischen Funktion $g(t) = at^2 + bt + c$ verteilen. Wie groß sind die Parameter a, b und c, wenn $g(0) = g(8) = 300$ gilt?

c) Ab wann beginnt die Entleerung des Auwalds?

d) Wie groß ist das Auffangbecken (vgl. rosa unterlegte Fläche)?

INTEGRALRECHNUNG

1. Ein ungewöhnlich kurzer Einstieg in die Thematik

Um den Einstieg in die Integralrechnung zu erleichtern, soll dem Lernenden zunächst die „Technik des Integrierens“ mit Hilfe der Überlegung, dass Integrieren die Umkehrung des Differenzierens ist, vermittelt werden. Tiefere mathematische Zusammenhänge sollen keinesfalls zu kurz kommen. Die Verlegung von Beweisen und theoretischen Überlegungen im Aufgabenteil soll dazu führen, dass der Leser, nachdem er durch Berechnung einfacher Integrale eine gewisse Vorstellung mit der Integration verbindet, tiefer in die Materie eindringt. Dabei sollen allgemeine mathematische Fähigkeiten wie Argumentieren, produktives geistiges Arbeiten und kritisches Denken geschult werden.

Dies als Einladung, um „selbsttätig“ zu sein und in die Materie einzudringen. Schon HERAKLIT[1] sagte „Alles fließt“ und meinte damit, dass Veränderungen in unserer Welt allgegenwärtig sind. Wir nehmen sie als Wachstum, Erwärmung, Farbwechsel, Alterung oder Bewegung wahr. Seit dem Altertum versuchten die Mathematiker jahrhundertelang — jedoch vergeblich — diese Prozesse zu analysieren, berechenbar zu machen.

Die Situation änderte sich, als der geniale englische Naturwissenschafter **Isaac NEWTON** (1643—1727) vor 300 Jahren die Infinitesimalrechnung schuf. Schon nach kurzer Zeit verwendete er die neue Methode, um die Gesetze der Gravitation und der mechanischen Bewegung aufzudecken: grundlegende Sätze der Physik, die sowohl die Planetenbahnen als auch die Reaktion eines Körpers auf angreifende Kräfte (wie z. B. die Schwerkraft oder die Kraft einer gespannten Feder) bestimmen. Infolge dieser Möglichkeit, Bewegungen zu beschreiben, zählt die Infinitesimalrechnung heute wohl zu den wichtigsten Verbindungen zwischen Mathematik und angewandter Naturwissenschaft. In jedem Satelliten, jedem Bauwerk, jedem Fernsehapparat, aber leider auch in jeder Bombe steckt etwas von ihr.

Äußerst vielfältig sind also die Arten von Veränderungen, die man somit erfassen kann. Wenn sich die Merkmale einer veränderlichen Situation quantifizieren und noch dazu in eine Gleichung zwingen lassen, dann können mit diesem Kalkül die jeweils zu Grunde liegenden Naturgesetze gefunden werden.

Die Welt des Ruhigen oder auch Statischen, die wir mit der Elementarmathematik behandeln, verlassen wir, wenn wir uns mit der Infinitesimalrechung befassen. Einen großen Teil von ihr haben wir übrigens schon kennen gelernt: die Differenzialrechnung. Die sogenannte **Integralrechnung**, die in einem gewissen Sinne die Umkehrung der Differenzialrechnung ist, werden wir in diesem Kapitel behandeln.

Und an dieser Stelle gleich ein konkretes Beispiel, wie Differenzial- und Integralrechnung zusammenhängen: Aus der differenzierten Funktion $y' = 2x$ soll die ursprüngliche Funktion $y = f(x)$, die sogenannte **Stammfunktion**, berechnet werden. In mathematischer Kurzschreibweise lautet diese Aufgabenstellung Folgendermaßen:

$\int 2x\,dx = ?$ **Bezeichnungen:** $2x$ ..... Integrand
x ..... Integrationsvariable

(gesprochen: Integral von 2x de-x)

Die Funktion $y' = 2x$ soll also integriert[2] werden. In der Außenspalte sind einige Funktionsgleichungen angeführt, die allesamt eines gemeinsam haben: $y' = 2x$.

[1]) Griechischer Philosoph aus Ephesos, um 500 v. Chr.
[2]) integrare (lat.): wiederherstellen, integer (lat.): ganz, unversehrt.

„Was ist **ungewöhnlich kurz** — wenn sich dieses Kapitel auf 7 Seiten erstreckt und dann noch 15 Seiten mit Aufgaben kommen?“, könnte sich der Leser denken. Eine berechtigte Frage, auf die es folgende Antworten gibt:

— Der Text beschränkt sich darauf, den Lernenden so rasch und einfach wie möglich die „Technik des Integrierens“ beizubringen.
— Es werden sämtliche Beweise und zahlreiche Überlegungen im Aufgabenteil behandelt.
— Wer die folgenden Seiten durcharbeitet, hat solide Grundkenntnisse der Integralrechnung erworben, die nur noch durch anschließende Übung vertieft werden sollen.

Isaac NEWTON
(1643—1727)

Die dem Differenzieren entgegengesetzte Rechenoperation wird **Integrieren** genannt.

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = x^2 - 1 \\ y = x^2 + 5 \\ y = x^2 + C \quad (C \in \mathbb{R}) \end{array}\right\} y' = 2x$$

(Die Ableitung einer Konstanten ist ja Null!)

Integrand Stammfunktion

$$\underbrace{\int \overbrace{f'(x)\,dx}}_{\text{Unbestimmtes Integral}} = \overbrace{f(x)} + \underbrace{C}_{\text{Integrationskonstante } (C \in \mathbb{R})}$$

(1)

(2)

Die Formel (1) zählt zu den sogenannten **Grundintegralen**. Sie kann mit Hilfe der Differenzialrechnung verifiziert[2] werden.

(2) Ein konstanter Faktor kann vor das Integralzeichen gesetzt werden:

$$\int a \cdot f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$$

(3) Eine algebraische Summe wird integriert, indem man jedes Glied der Summe einzeln integriert:

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x))\,dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx$$

Wir erkennen: $\int 2x\,dx = x^2 + C$, wobei C zwar konstant, aber nicht näher bestimmt ist! C wird **Integrationskonstante** genannt, $\int 2x\,dx$ wird als **unbestimmtes Integral** bezeichnet. (Schließlich ist C ja eine **unbestimmte** Zahl ...)

Auch geometrisch ist der Sachverhalt leicht zu erklären:
In der Außenspalte sind in Figur **(1)** die Parabel $y = x^2$ und einige, um den Betrag C aus dem Nullpunkt in Richtung der y-Achse verschobene Parabeln eingezeichnet. Wie groß ist der Anstieg **jeder** dieser Parabeln?
Richtig! $y' = 2x$ — vgl. Figur **(2)**

$\int 2x\,dx$ ist also nicht eine **einzige** Funktion, sondern eine ganze **Funktionsschar**. Die „Einzelfunktionen" bedecken die Ebene lückenlos und unterscheiden sich einzig durch eine Konstante. Dieser Sachverhalt gilt natürlich nicht nur für unser Beispiel, sondern — wie man sich leicht überlegen kann — für alle möglichen Stammfunktionen $f(x)$.

Wie berechnet man z. B. $\int 3x^5\,dx$ oder $\int \sqrt{x^3}\,dx$? Leider gibt es in zahlreichen Fällen keinen „richtigen" Algorithmus[1] wie wir dies von der Differenzialrechnung gewohnt sind. Rechenkniffe, Tricks und listige Substitutionen sind mitunter notwendig, um das Integral einer Funktion zu ermitteln. Ja, es wird sogar noch schlimmer. Man kann zwar formal jeden Ausdruck differenzieren, umgekehrt aber nicht „alles" integrieren. „Differenzieren ist ein Handwerk, Integrieren ist eine Kunst", wurde einmal gesagt — und dem ist nichts hinzuzufügen.

Integrieren bedeutet aber nicht, dass man ohne System herumprobiert. Es folgt jene Formel, die die Basis für alles Weitere darstellt:

$$\text{(1)} \quad \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \; n \neq -1$$

Beispiel:
Die folgenden unbestimmten Integrale sind zu berechnen:
a) $\int x^7\,dx$ **b)** $\int 3x\,dx$ **c)** $\int \left(4x^{-2} + \frac{1}{x^3}\right)dx$ **d)** $\int (\sqrt{x} - 5)\,dx$

Lösung:

a) $\int x^7\,dx = \frac{x^8}{8} + C$ (1) **b)** $\int 3x\,dx = 3\int x\,dx = \frac{3x^2}{2} + C$ (2), (1)

c) $\int \left(4x^{-2} + \frac{1}{x^3}\right)dx = 4\int x^{-2}\,dx + \int x^{-3}\,dx = \frac{4x^{-1}}{-1} + \frac{x^{-2}}{-2} + C =$
$= -\frac{4}{x} - \frac{1}{2x^2} + C$ (3), (2), (1)

d) $\int (\sqrt{x} - 5)\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx - 5\int x^0\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 5x + C =$
$= \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 5x + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 5x + C$ (3), (2), (1)

$\int \frac{1}{x}\,dx = \int x^{-1}\,dx = \frac{x^0}{0} = ?$

In (1) fand sich der Hinweis, dass $n \neq -1$ sein muss, um die Formel $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ anwenden zu dürfen. Offensichtlich handelt es sich bei $\int \frac{1}{x}\,dx$ um einen Spezialfall. Dafür gibt es eine eigene Formel:

$$\text{(4)} \quad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C, \; x \neq 0$$

[1] Algorithmus (arab.-mittellat.): Rechenvorschrift.
[2] verifizieren (lat.-mittellat.): nachprüfen, die Richtigkeit einer Behauptung beweisen.

Beispiel:

a) $\int \frac{5}{x}\,dx = ?$ **b)** $\int \left(\frac{1}{x}+3\right) dx = ?$ **c)** $\int \left(x-\frac{\sqrt{2}}{x}\right) dx = ?$

Lösung:

a) $\int \frac{5}{x}\,dx = 5\int \frac{1}{x}\,dx = 5\ln|x| + C$ ②, ④

b) $\int \left(\frac{1}{x}+3\right) dx = \ln|x| + 3x + C$ ③, ④, ①

c) $\int \left(x-\frac{\sqrt{2}}{x}\right) dx = \frac{x^2}{2} - \sqrt{2}\ln|x| + C$ ③, ②, ①, ④

Wir wollen den Spezialfall an dieser Stelle etwas näher betrachten.

Im Kapitel „Differenzialrechnung" haben wir für die Ableitung der Funktion $f(x) = \ln x, x \in \mathbb{R}^+$ die Ableitungsfunktion $f'(x) = \frac{1}{x}$ kennen gelernt.

Es liegt also die Vermutung nahe, dass für die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$ in der Stammfunktion ein natürlicher Logarithmus enthalten ist.

Für $F(x) = \ln x + C,\ x > 0$ gilt
$F'(x) = (\ln x + C)' = \frac{1}{x}$ und für
$F(x) = \ln(-x) + C, x < 0$ gilt
$F'(x) = (\ln(-x) + C)' = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}$.

Damit kann man für den Spezialfall folgende Formel angeben:

④ $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C,\ x \neq 0$

Aus den bisherigen Ausführungen kann man eine enge Verbindung zwischen Differenzial- und Integralrechnung erkennen.

Geschichtlich entwickelte sich die Integralrechnung allerdings ganz anders: Man fragte nicht nach der Umkehrung der Differenzialrechnung, sondern nach dem Flächeninhalt krummlinig begrenzter Flächen.

Eine Lösung fand sich durch die Definition des **bestimmten Integrals**:

Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ (gesprochen: Integral von f von x de-x von a bis b) kann durch die Fläche dargestellt werden, die von der Funktionskurve $y = f(x)$, den Ordinaten $x_1 = a$ und $x_2 = b$ und der x-Achse begrenzt wird. (Vgl. die rosa unterlegte Fläche in der Außenspalte.)

Wie groß ist der Flächeninhalt der rosa unterlegten Fläche?

Mit solchen Fragen beschäftigte sich schon ARCHIMEDES. Er schrieb Kreisen und Parabelsegmenten Quadrate ein, und „schöpfte" so den Flächeninhalt aus:

Dieses Verfahren heißt **Exhaustionsmethode** (Exhaustion = Ausschöpfung) und wurde nach ARCHIMEDES erst wieder in der Neuzeit aufgegriffen.

Das bestimmte Integral wurde als Flächeninhalt interpretiert.

Es lässt sich zeigen, dass das bestimmte Integral unter anderem als Volumen, elektrisches Potential und physikalische Arbeit verstanden werden kann.

Diese Informationen sind vorerst wahrscheinlich recht verwirrend, zumal wir ja eines noch nicht wissen: Wie wird das bestimmte Integral berechnet?

Eine Antwort auf diese Frage gibt der sogenannte **Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung**:

Ist die Funktion $f(x)$ im abgeschlossenen Intervall [a, b] stetig und ist $F(x)$ eine beliebige Stammfunktion von $f(x)$, dann gilt

$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$, d. h. um das bestimmte Integral

$\int_a^b f(x)\,dx$ zu berechnen, sucht man eine Stammfunktion F von f, bildet die Funktionswerte $F(b)$ und $F(a)$ und subtrahiert diese voneinander.

Um $\int_{-1}^{2} x^7\,dx$ zu ermitteln braucht man nur

(1) die Stammfunktion des unbestimmten Integrals ermitteln: $\frac{x^8}{8}+C$,

(2) die sogenannte **obere Grenze** in die Stammfunktion einsetzen: $\frac{2^8}{8}+C=32+C$

(3) das selbe mit der **unteren Grenze** durchführen: $\frac{(-1)^8}{8}+C=\frac{1}{8}+C$ und

(4) die Differenz der Funktionswerte bilden: $32+C-\frac{1}{8}-C=31{,}875$.

Resultat: $\int_{-1}^{2} x^7\,dx = \mathbf{31{,}875}$

Bei (2) und (3) hätte die Integrationskonstante unberücksichtigt bleiben können.

Aus $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$ folgt

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

In Worten: Vertauscht man die Integrationsgrenzen, so ändert sich das Vorzeichen des Integrals.

Unterteilung des Integrationsbereichs:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

f (x)

a c b

Beispiel:

Die folgenden bestimmten Integrale sind zu berechnen:

a) $\int_{-2}^{1} x^5\,dx$ **b)** $\int_0^1 3\sqrt{x}\,dx$ **c)** $\int_2^3 (x+3)\,dx$ **d)** $\int_{-2}^{4} \frac{x^2-5x}{x}\,dx$

Lösung:

(Die eckigen Klammern sollen andeuten, dass in der integrierten Funktion die obere bzw. untere Grenze für die Variable x eingesetzt wird.)

a) $\int_{-2}^{1} x^5\,dx = \left[\frac{x^6}{6}\right]_{-2}^{1} = \frac{1}{6}-\frac{(-2)^6}{6} = \ldots = \mathbf{-10{,}5}$

b) $\int_0^1 3\sqrt{x}\,dx = 3\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\,dx = 3\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = [2x\sqrt{x}]_0^1 = \ldots = \mathbf{2}$

c) $\int_2^3 (x+3)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}+3x\right]_2^3 = \frac{9}{2}+9-2-6 = \mathbf{5{,}5}$

d) $\int_{-2}^{4} \frac{x^2-5x}{x}\,dx = \int_{-2}^{4}\left(\frac{x^2}{x}-\frac{5x}{x}\right)dx = \int_{-2}^{4}(x-5)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}-5x\right]_{-2}^{4} =$

$= 8-20-2-10 = \mathbf{-24}$

Beim obigen Beispiel erhielten wir in zwei Fällen ein negatives Resultat. Das bestimmte Integral kann als Fläche interpretiert werden. Was aber wäre dann von einer „negativen Fläche" zu halten?

Ein Flächeninhalt muss natürlich stets größer gleich Null sein.

Tatsächlich hängt das Vorzeichen von $\int_a^b f(x)\,dx$ davon ab, ob sich die Fläche oberhalb oder unterhalb der x-Achse befindet. Weiters ist der Umlaufsinn entscheidend:

Das bestimmte Integral ist positiv (negativ), wenn die Figur — ausgehend von der unteren Grenze a über die obere Grenze b — im mathematisch positiven (negativen) Sinn umfahren werden kann.

a b (+) b a (−) a b (−) b a (+)

Wenn die untere Grenze kleiner als die obere Grenze ist[1)], trifft Folgendes zu:

Flächen oberhalb der x-Achse besitzen positive, unterhalb der x-Achse negative Vorzeichen!

[1)] a liegt also links von b.

Beispiel:
Die Fläche zwischen $y = x - \frac{1}{2}$, der x-Achse und den Ordinaten $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$ ist zu berechnen.

Lösung:

(1) **Grafische Veranschaulichung** (vgl. Außenspalte)

(2) **Nullstelle:** $x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = 0{,}5$

(3) $A = \int_1^3 \left(x - \frac{1}{2}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right]_1^3 = \frac{9}{2} - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3 \qquad A = 3\,\text{FE}$

(FE .... Flächeneinheiten)

Wer das letzte Beispiel aufmerksam geprüft hat, wird bemerkt haben, dass die Nullstelle berechnet, diese im weiteren Rechnungsverlauf aber nicht mehr benötigt wurde.

Ist den Autoren ein Fehler unterlaufen? Nein! Denn hätten wir z. B. die in der Außenspalte farbig unterlegte Fläche berechnet, wäre N(0,5, 0) wichtig gewesen. Schließlich ergibt sich die Gesamtfläche A aus der Summe der Teilfächen A_1 und A_2 zwischen den Nullstellen.

Beispiel:
Gegeben ist die Funktionsgleichung $y = x^2 - 5x + 6$. Gesucht ist der von der Kurve, der x-Achse und den Ordinaten $x_1 = 1$ und $x_2 = 4$ begrenzte Flächeninhalt.

Lösung:

(1) **Grafische Veranschaulichung** (vgl. Außenspalte)

(2) **Nullstellen:** $x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{+5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = 3, 2$

(3) **Unterteilung des Integrationsbereichs nach den Nullstellen:**

$$A = \underbrace{\int_1^2 (x^2 - 5x + 6)\,dx}_{\text{rosa Fläche}} + \underbrace{\int_3^2 (x^2 - 5x + 6)\,dx}_{\text{Vertauschung der Grenzen, blaue Fläche liegt unterhalb der x-Achse}} + \underbrace{\int_3^4 (x^2 - 5x + 6)\,dx}_{\text{gelbe Fläche}} =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x\right]_1^2 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x\right]_3^2 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x\right]_3^4 =$$

$$= \underbrace{\frac{8}{3} - 10 + 12 - \frac{1}{3} + \frac{5}{2} - 6}_{\text{rosa}} + \underbrace{\frac{8}{3} - 10 + 12 - 9 + \frac{45}{2} - 18}_{\text{blau}} +$$

$$\underbrace{+ \frac{64}{3} - 40 + 24 - 9 + \frac{45}{2} - 18}_{\text{gelb}} = \ldots = 1{,}83 \qquad A = 1{,}83\,\text{FE}$$

Wie könnte man die rosa unterlegte Fläche A_{MNQR} — vgl. Außenspalte — bestimmen? Schauen wir uns das Problem im Detail an: A_{MNQR} wird von den Kurven f (x) und g (x) sowie den Grenzen $x_1 = a$ und $x_2 = b$ begrenzt. Leicht ist zu verstehen, dass sich A_{MNQR} aus der Differenz der Einzelflächen zwischen x-Achse und Kurve ergibt:

$$A_{MNQR} = A_{MOPR} - A_{NOPQ} \Rightarrow A_{MNQR} = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

Vor der Lösung eines bestimmten Integrals müssen die Nullstellen des Integranden bestimmt werden.

Die Gesamtfläche A ist die Summe der absoluten Werte der Teilflächen zwischen den Nullstellen.

Die in der Außenspalte rosa unterlegte Fläche A wird von den Ordinaten x_1 und x_2 der Schnittpunkte S_1 und S_2 begrenzt. Die Fläche, die von $f_1(x)$ und $f_2(x)$ eingeschlossen wird, ist gleich der Differenz der Integrale zwischen den Ordinaten x_1 und x_2 der Schnittpunkte S_1 und S_2:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f_1(x)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} f_2(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} (f_1(x) - f_2(x))\,dx$$

Beispiel:

Man berechne den Inhalt der von den Kurven $y_1 = \frac{x^2}{2} + 2$ und $y_2 = x + 6$ begrenzten Fläche A.

Lösung:

(1) **Grafische Veranschaulichung** (vgl. Außenspalte)

(2) **Schnittpunkte:**

$$\frac{x^2}{2} + 2 = x + 6 \Leftrightarrow x^2 + 4 = 2x + 12 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$x_{1,\,2} = \frac{+2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = 4,\ -2$$

Die Integrationsgrenzen lauten daher: $x_1 = -2$, $x_2 = 4$

(3) **Flächenberechnung durch Integration:**

$$A = \int_{-2}^{4} \left(x + 6 - \frac{x^2}{2} - 2\right) dx = \int_{-2}^{4} \left(x - \frac{x^2}{2} + 4\right) dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + 4x\right]_{-2}^{4} = \ldots = 18 \qquad A = 18\,\text{FE}$$

Bisher haben wir uns bei der praktischen Anwendung der Integralrechnung auf Flächen beschränkt. Das bestimmte Integral kann aber auch zur Volumsberechnung herangezogen werden.

So kann das Volumen V von Rotationskörpern, deren Drehachse die x- oder y-Achse ist, leicht berechnet werden:

Rotation um die x-Achse:	Rotation um die y-Achse:
$V_x = \pi \int_{x_1=a}^{x_2=b} y^2\,dx$	$V_y = \pi \int_{y_1=a}^{y_2=b} x^2\,dy$

Beispiel:

Man berechne das Volumen V einer Kugel vom Radius r!

Lösung:

Die in der Außenspalte rosa eingezeichnete Funktion rotiert um die x-Achse. Hierbei entsteht eine Halbkugel. Um das Volumen V der Kugel zu erhalten, wird das Volumen der Halbkugel verdoppelt:

$$V_x = 2\pi \underbrace{\int_{x_1=a}^{x_2=b} y^2\,dx}_{} = 2\pi \int_0^r \underbrace{(r^2 - x^2)}_{y^2}\,dx = 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r = 2\pi\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{2r^3}{3} = \frac{4\pi r^3}{3} \qquad V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Verdopplung! — Formel für die Rotation um die x-Achse

$y = \sqrt{r^2 - x^2} \Rightarrow y^2 = r^2 - x^2$

Das letzte Beispiel war schon recht schwierig. Und noch komplizierter wird es, wenn wir ein Flächenstück (das durch zwei Kurven begrenzt wird) um die y-Achse rotieren lassen.

Beispiel:
Das von den Graphen der Relationen $y^2 = 4x$ und $y^2 = 5 - x$ begrenzte Flächenstück rotiert um die **a)** x-Achse **b)** y-Achse. Das Volumen V_x bzw. V_y ist zu berechnen.

Lösung:

(1) **Grafische Veranschaulichung** (vgl. Außenspalte)

(2) **Schnittpunkte:** $4x = 5 - x \Leftrightarrow 5x = 5 \Leftrightarrow x = 1,\ y_1 = 2,\ y_2 = -2$

(3) **Nullstellen:** $4x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad N_1(0, 0)$
$5 - x = 0 \Leftrightarrow x = 5 \quad N_2(5, 0)$

Schnittpunkte S_1, S_2:
$S_1(1, 2)$, $S_2(1, -2)$

Nullstellen N_1, N_2:
$N_1(0, 0)$, $N_2(5, 0)$

a) $$V_x = \pi \int_{x_1=a}^{x_2=b} y^2\,dx = \underbrace{\pi \int_0^1 4x\,dx + \pi \int_1^5 (5-x)\,dx}_{\text{(vgl. Figur (1))}} =$$

$$= \pi\left[2x^2\right]_0^1 + \pi\left[5x - \frac{x^2}{2}\right]_1^5 =$$

$$= \pi\left(2 + 25 - \frac{25}{2} - 5 + \frac{1}{2}\right) = 10\pi \qquad V_x = 10\pi\ \text{VE}$$

Bemerkung: V_x = Summe der Integrale (VE.....Volumseinheiten)

(1)

b) Zunächst sind die beiden Relationen $y^2 = 4x$ und $y^2 = 5 - x$ in die Form $x^2 = \ldots$ zu bringen:

$$y^2 = 4x \Leftrightarrow x = \frac{y^2}{4} \Leftrightarrow x^2 = \frac{y^4}{16}$$

$$y^2 = 5 - x \Leftrightarrow x = 5 - y^2 \Leftrightarrow x^2 = 25 - 10y^2 + y^4$$

$$V_y = \pi \int_{y_1=a}^{y_2=b} x^2\,dy = 2\underbrace{\left[\pi \int_0^2 \left(25 - 10y^2 + y^4\right)dy - \pi \int_0^2 \frac{y^4}{16}\,dy\right]}_{\text{(vgl. Figur (2))}} =$$

Verdopplung

$$= 2\pi\left[25y - \frac{10y^3}{3} + \frac{y^5}{5}\right]_0^2 - 2\pi\left[\frac{y^5}{80}\right]_0^2 = 2\pi\left(50 - \frac{80}{3} + \frac{32}{5} - \frac{\overset{2}{\cancel{32}}}{\underset{5}{\cancel{80}}}\right) =$$

$$= 2\pi\left(50 - \frac{80}{3} + 6\right) = 2\pi \cdot \frac{88}{3} = \frac{176\pi}{3} \qquad V_y = \frac{176\pi}{3}\ \text{VE}$$

Bemerkung: V_y = Differenz der Integrale

(2)

Angenommen es seien zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ gegeben. Ihre Graphen haben an den Stellen $x_1 = a$ und $x_2 = b$ die gemeinsamen Schnittpunkte S_1 und S_2 (vgl. Außenspalte). Worin besteht der Unterschied folgender Volumina?

$$V_1 = \pi \int_a^b (f(x) - g(x))^2\,dx \qquad V_2 = \pi \int_a^b \left((f(x)^2) - (g(x)^2)\right)dx$$

Die Antwort auf diese Frage findet sich auf den Seiten 176 und 177.

AUFGABEN

Bei den folgenden Aufgaben sind die gegebenen unbestimmten Integrale zu berechnen:

651. a) $\int x^9\,dx$ **b)** $\int 3x^5\,dx$ **c)** $\int \frac{x^7}{4}\,dx$ **d)** $\int \frac{3x^5}{5}\,dx$

652. a) $\int x^0\,dx$ **b)** $\int dx$ **c)** $\int 3x^0\,dx$ **d)** $\int 6\,dx$

653. a) $\int x^{-1}\,dx$ **b)** $\int 3x^{-2}\,dx$ **c)** $\int \frac{1}{2x^2}\,dx$ **d)** $\int \frac{5}{4x^5}\,dx$

654. a) $\int x^{\frac{1}{2}}\,dx$ **b)** $\int 2x^{\frac{3}{2}}\,dx$ **c)** $\int \frac{4\sqrt{x}}{5}\,dx$ **d)** $\int \frac{7\sqrt[5]{x^2}}{3}\,dx$

655. a) $\int 5x^{-\frac{1}{2}}\,dx$ **b)** $\int \frac{4}{7}x^{-\frac{2}{3}}\,dx$ **c)** $\int \frac{3}{5\sqrt{x^3}}\,dx$ **d)** $\int \frac{5}{7\sqrt[4]{3x}}\,dx$

656. a) $\int (x+3)\,dx$ **b)** $\int (5-\sqrt{3x})\,dx$ **c)** $\int \left(\frac{1}{2x}-\frac{1}{x^2}\right)dx$ **d)** $\int \frac{5x-1}{x}\,dx$

Anleitung: $\frac{5x-1}{x} = \frac{5x}{x} - \frac{1}{x}$ usw.

657. a) $\int (4x - x^2 + 3)\,dx$ **b)** $\int \left(\frac{5}{4}\sqrt{x} - (x-1)^2\right)dx$ **c)** $\int \left(\frac{3}{8}\sqrt{x^4} - x\sqrt{x^3} + 2\right)dx$

658. a) $\int \left(\frac{2}{x} - \frac{4-3x^2}{x^2}\right)dx$ **b)** $\int \left(4x\sqrt{x} + \frac{3x}{\sqrt[3]{x^4}} + \frac{3}{4x}\right)dx$ **c)** $\int \frac{3\sqrt{7} - 4\sqrt{x} + 5\sqrt{x^3}}{\sqrt{2x}}\,dx$

Bei den folgenden Aufgaben sind die gegebenen bestimmten Integrale zu berechnen:

659. a) $\int_0^1 x^5\,dx$ **b)** $\int_2^3 2x^3\,dx$ **c)** $\int_2^4 \frac{x^2}{5}\,dx$ **d)** $\int_5^2 \frac{4x^3}{9}\,dx$

660. a) $\int_2^1 x^0\,dx$ **b)** $\int_7^6 dx$ **c)** $\int_0^1 4x^0\,dx$ **d)** $\int_5^6 7\,dx$

661. a) $\int_2^3 3x^{-1}\,dx$ **b)** $\int_{-5}^{-4} 4x^{-2}\,dx$ **c)** $\int_1^5 \frac{5}{x^2}\,dx$ **d)** $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{3}{2x^3}\,dx$

662. a) $\int_1^4 2x^{\frac{1}{2}}\,dx$ **b)** $\int_0^1 x^{\frac{5}{4}}\,dx$ **c)** $\int_0^4 \frac{3\sqrt{x}}{7}\,dx$ **d)** $\int_1^8 \frac{4\sqrt[3]{x^2}}{5}\,dx$

663. a) $\int_4^9 3x^{-\frac{1}{2}}\,dx$ **b)** $\int_0^1 \frac{2}{5}x^{-\frac{1}{5}}\,dx$ **c)** $\int_4^1 \frac{2}{9\sqrt{x^3}}\,dx$ **d)** $\int_8^{256} \frac{8}{5\sqrt[5]{4x}}\,dx$

664. a) $\int_0^2 (x+1)\,dx$ **b)** $\int_4^9 (3-\sqrt{4x})\,dx$ **c)** $\int_1^5 \left(\frac{2}{3x} - \frac{5}{x^2}\right)dx$ **d)** $\int_5^{10} \frac{4x-5}{x^2}\,dx$

665. a) $\int_2^6 (x^3 - 3x^2 + 5x - 1)\,dx$ **b)** $\int_9^4 (\sqrt{x}+2)^2\,dx$ **c)** $\int_1^2 \left(\frac{1}{8}\sqrt{x^3} - x\sqrt{2x} + 1\right)dx$

666. a) $\int_2^4 \left(\frac{3}{x} - \frac{5-4x^2}{x^2}\right)dx$ **b)** $\int_1^2 \left(3x\sqrt{x} + \frac{2x}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{7}{3\sqrt{x}}\right)dx$ **c)** $\int_3^9 \frac{2\sqrt{3} - 7\sqrt{x} + 2\sqrt{x^5}}{\sqrt{3x}}\,dx$

667. Welcher Unterschied besteht zwischen $\int_0^1 ax^2\,dx$ und $\int_0^1 ax^2\,da$?

Anleitung: Das „dx“ bzw. „da“ kennzeichnet die Integrationsvariable.

Im Hinblick auf Aufgabe **667.** sind die folgenden bestimmten Integrale zu berechnen:

668. a) $\int_0^1 y^2 z\,dy$ **b)** $\int_0^1 y^2 z\,dz$ **c)** $\int_1^2 \frac{a^2}{b^2}\,da$ **d)** $\int_1^2 \frac{a^2}{b^2}\,db$

669. a) $\int_{-3}^4 c(c-d)\,dc$ **b)** $\int_{-3}^4 c(c-d)\,dd$ **c)** $\int_{-3}^4 (m+n)^2\,dm$ **d)** $\int_{-3}^4 (m+n)^2\,dn$

670. a) $\int_a^b \sqrt{r^2+2rs+s^2}\,dr$ **b)** $\int_a^b \sqrt{r^2+2rs+s^2}\,ds$ **c)** $\int_M^{-N} (\sqrt{u}+\sqrt{v})\,du$ **d)** $\int_M^{-N} (\sqrt{u}+\sqrt{v})\,dv$

671. a) $\int_{999}^{1000} xy\,d\omega$ **b)** $\int_\omega^\varphi \frac{(\alpha+\beta)^2}{\gamma}\,d\gamma$ **c)** $\int_{\sqrt{A-B}}^{\sqrt{A-B}} \frac{(A+B)^2}{A^2}\,da$ **d)** $\int_{\sqrt{a+b}}^{\sqrt{a+b}} \frac{(A+B)^2}{A^2}\,dA$

Bei den folgenden Aufgaben ist die Lösungsmenge der gegebenen Gleichungen in $\mathbb{R}$ zu ermitteln:

672. a) $\int_0^x ds = 5$ **b)** $\int_0^x p\,dp = 7$ **c)** $\int_0^x o^2\,do = 9$ **d)** $\int_0^x t^4\,dt = 12$

673. a) $\int_1^x (2t-5)\,dt = 3$ **b)** $\int_0^x (3k^2-2k)\,dk = 4$ **c)** $\int_x^2 (y^2-2y+3)\,dy = \frac{7}{3}$ **d)** $\int_0^x (3w^2+2w-1)\,dw = 33$

674. a) $\int_1^3 x\,dx = 2\int_1^x t\,dt$ **b)** $\int_2^4 f^4\,df = -\int_4^x \frac{df}{2}$ **c)** $\int_3^5 \frac{h^3}{4}\,dh = 3\int_3^x \frac{g}{4}\,dg$ **d)** $\int_0^x (2+y)\,dy = 6\int_1^e \frac{dz}{z}$

675. a) $\int_x^2 (2j^3-9j^2+3j+13)\,dj = \frac{288}{91}\int_2^3 \frac{k^3+2k-1}{k^3}\,dk$ **b)** $\int_1^x \frac{i^3+14i^2-3i-24}{i^5}\,di = \int_{-2}^2 \frac{l^4+l^2}{2l}\,dl$

Bei den folgenden Aufgaben ist der rosa unterlegte Flächeninhalt A als bestimmtes Integral so anzugeben, dass eine numerische Auswertung ein positives Resultat liefert:

676. a) **b)** **c)** **d)**

677. a) **b)** **c)** **d)**

Bei den folgenden Aufgaben ist die Fläche A zwischen der gegebenen Funktion, der x-Achse und den Ordinaten in den Punkten x_1 und x_2 zu berechnen:

678. a) $y = 2x \quad x_1 = -3,\ x_2 = 4$ **b)** $y = 3x^2 \quad x_1 = -1,\ x_2 = 2$

679. a) $y = 3x + 1 \quad x_1 = 0,\ x_2 = 2$ **b)** $y = x^2 - 2x \quad x_1 = -1,\ x_2 = \frac{3}{2}$

680. a) $y = \sqrt{4x} \quad x_1 = 4,\ x_2 = 9$ **b)** $y = \sqrt{3x} \quad x_1 = 0,\ x_2 = 1$

681. a) $y = x^2 + 5x + 6 \quad x_1 = -3,\ x_2 = -1$ **b)** $y = x^2 - 3x + 2 \quad x_1 = 0,\ x_2 = 3$

682. a) $y = x^3 + x^2 - 4x - 4 \quad x_1 = -2,\ x_2 = 1$ **b)** $y = \frac{1}{3}(x^3 - 5x^2 - x + 5) \quad x_1 = 0,\ x_2 = 6$

683. a) $y = \frac{1}{4}(3x^3 - 7x^2 - 7x + 3) \quad x_1 = -1,\ x_2 = 2$ **b)** $y = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 \quad x_1 = -1,\ x_2 = 1$

Bei den folgenden Aufgaben ist der rosa unterlegte Flächeninhalt A rechnerisch zu ermitteln:

684. a) $y = x$

b) $y = x^2$

c) $y = 3 - x^2$

d) $y = \sqrt{x}$

685. a) $y = x^2 - 4x + 4$

b) $y = \frac{1}{x}$

c) $y = 4 - x^2$

d) $y = 2\sqrt{x}$

Bei den folgenden Aufgaben ist der rosa unterlegte Flächeninhalt als bestimmtes Integral so anzugeben, dass eine numerische Auswertung ein positives Resultat liefert:

686. a) g(x), f(x), b, a

b) i(x), h(x), c

c) k(x), j(x), e, d, f

d) l(x), m(x), g

687. a) o(x), n(x), i, h

b) q(x), p(x), j

c) r(x), s(x), k, l

d) u(x), t(x), m, n

Bei den folgenden Aufgaben ist die von den gegebenen Funktionen begrenzte Fläche A zu ermitteln:

688. a) $y^2 = 3x,\ y = x$ **b)** $y^2 = 4x,\ y = x$

689. a) $y = x^2 - 4,\ y = x + 2$ **b)** $y = x^2 - 2,\ y = 2x + 1$

690. a) $y = x^2 - 5x + 7,\ y = 2x - 3$ **b)** $y = x^2 - 3x - 2,\ y = 2x - 2$

691. a) $y = x^2 - 4x - 3,\ y = x + 3$ **b)** $y = x^2 - 4x - 6,\ y = x - 6$

692. a) $y = x^2 + 4x - 2,\ y = -x^2 + 5x + 1$ **b)** $y = x^2 - 7x + 15,\ y = -x^2 + 10x + 7$

693. a) $y = x^3 + x^2 + x - 2,\ y = 4x + 1$ **b)** $y = 4x^3 - 4x^2 - x + 3,\ y = 3x - 1$

Bei den folgenden Aufgaben ist anzugeben, welcher Körper entsteht, wenn der rot eingezeichnete Graph um die (1) x-Achse (2) y-Achse rotiert:

694. a) **b)** **c)** **d)**

695. a) **b)** **c)** **d)**

Bei den folgenden Aufgaben ist für **a)** das Volumen V zu berechnen, wenn die Fläche zwischen der gegebenen Funktion, der x-Achse und den Ordinaten in den Punkten x_1 und x_2 um die x-Achse rotiert und für **b)** das Volumen V zu berechnen, wenn die Fläche zwischen der gegebenen Funktion, der y-Achse und den Abszissen in den Punkten y_1 und y_2 um die y-Achse rotiert.

696. a) $y = 3x \quad x_1 = 1,\ x_2 = 3$ **b)** $y = 2x + 1 \quad y_1 = 1,\ y_2 = 3$

697. a) $y = \sqrt{x + 1} \quad x_1 = 2,\ x_2 = 4$ **b)** $y = \sqrt{3 - 2x} \quad y_1 = 0,\ y_2 = \sqrt{3}$

698. a) $y = x^2 + 1 \quad x_1 = 0,\ x_2 = 1$ **b)** $y = 9 - x^2 \quad y_1 = 0,\ y_2 = 9$

699. a) $y = 5x^2 - 1 \quad x_1 = 1,\ x_2 = 3$ **b)** $y = 3x^2 - 4 \quad y_1 = -4,\ y_2 = 8$

700. a) $y = x^2 + x + 1 \quad x_1 = 0,\ x_2 = \frac{5}{2}$ **b)** $y = x^2 + 1 \quad y_1 = 1,\ y_2 = 5$

Bei den folgenden Aufgaben ist das Volumen V zu berechnen, wenn die von den gegebenen Funktionen begrenzte Fläche um die x-Achse rotiert.

701. a) $y = x^2 + 3x + 3,\ y = 2x + 5$ **b)** $y = x^2 - 3x + 5,\ y = x + 2$

702. a) $y = x^2 - 2x + 2,\ y = 2x + 2$ **b)** $y = x^2 + 4x + 5,\ y = -x + 1$

703. a) $y = \sqrt{4x},\ y = \sqrt{2x + 6}$ **b)** $y = \sqrt{8x},\ y = \sqrt{2x + 10}$

704. a) $y = \sqrt{2x},\ y = \sqrt{6 - x}$ **b)** $y = \sqrt{4x},\ y = \sqrt{7 - 3x}$

Vermischte Aufgaben

Versetzen wir uns in die Lage von NEWTON und LEIBNIZ. Stellen wir uns vor, noch nie etwas vom bestimmten Integral gehört zu haben. Es interessiert uns der Inhalt A der Fläche, die zwischen dem Graphen einer Funktion $y = f(x)$, der x-Achse und den beiden senkrechten Geraden mit den Gleichungen $x = a$ und $x = b$ (vgl. nebenstehende Figur) liegt.

Wir beginnen damit, das Intervall $[a, b]$ in n gleich lange Teile der Länge Δx zu zerlegen.

Es gilt dann: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

Dann ersetzen wir den Funktionsgraphen „von oben" und „von unten" jeweils durch eine **Treppenfunktion**.

An Stelle des Flächeninhalts unterhalb der Parabel berechnen wir die Flächeninhalte $\underline{F_n}$ und $\overline{F_n}$ unterhalb der Treppenfunktionen $\underline{f_n}$ und $\overline{f_n}$. $\underline{F_n}$ heißt **Untersumme**. $\overline{F_n}$ heißt **Obersumme**.

705. Die obigen Überlegungen sind für die Funktion $y = x^2$ nachzuvollziehen.

a) Zunächst werden Unter- und Obersumme berechnet. Wir zeigen den Rechengang für die Untersumme:

$$\underline{F_n} = f(a)\cdot\Delta x + f(a+\Delta x)\cdot\Delta x + f(a+2\Delta x)\cdot\Delta x + \ldots + f(a+(n-1)\Delta x)\cdot\Delta x =$$

$$= \Delta x\cdot[a^2 + (a+\Delta x)^2 + (a+2\Delta x)^2 + \ldots + (a+(n-1)\cdot\Delta x)^2] =$$

$$= \Delta x\,[a^2 + (a^2 + 2a\Delta x + (\Delta x)^2) + (a^2 + 2\cdot 2a\Delta x + 2^2(\Delta x)^2) + \ldots + (a^2 + 2(n-1)a\Delta x + (n-1)^2(\Delta x)^2] =$$

$$= \Delta x\,[\underbrace{a^2 + a^2 + a^2 + \ldots + a^2}_{n\ \text{Summanden}} + 2a\Delta x(1+2+\ldots+(n-1)) + (\Delta x)^2(1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2)]$$

Nun ist es notwendig, sich an die „Folgen und Reihen" zu erinnern:

$$\sum_{i=1}^{k} i = 1+2+\ldots+k = \frac{k(k+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 = 1^2+2^2+\ldots+k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

$$\underline{F_n} = \Delta x\left[na^2 + 2a\Delta x\cdot\frac{(n-1)(n-1+1)}{2} + (\Delta x)^2\cdot\frac{(n-1)(n-1+1)(2(n-1)+1)}{6}\right] =$$

$$= \Delta x\left[na^2 + a\Delta x\cdot(n-1)n + (\Delta x)^2\cdot\frac{(n-1)\cdot n(2n-1)}{6}\right] =$$

$$= \frac{b-a}{n}\cdot\left[na^2 + a\cdot\frac{b-a}{n}\cdot(n-1)n + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2\cdot\frac{(n-1)\cdot n(2n-1)}{6}\right] =$$

$$= (b-a)\left[a^2 + a(b-a)\frac{(n-1)}{n} + (b-a)^2\cdot\frac{(n-1)\cdot(2n-1)}{6n^2}\right] =$$

$$= (b-a)\left[a^2 + a\cdot(b-a)\left(1-\tfrac{1}{n}\right) + (b-a)^2\cdot\tfrac{1}{6}\cdot\left(1-\tfrac{1}{n}\right)\left(2-\tfrac{1}{n}\right)\right]$$

Die Berechnung der Obersumme ist analog durchzuführen.

Anleitung: $\overline{F_n} = f(a+\Delta x)\cdot\Delta x + f(a+2\Delta x)\cdot\Delta x + f(a+3\Delta x)\cdot\Delta x + \ldots + f(a+n\Delta x)\cdot\Delta x = \ldots$

705. (Fortsetzung)

b) Für jede Unterteilung des Intervalls [a, b] — d. h. für jedes $n \in \mathbb{N}^*$ — gilt: $\underline{F}_n \leq A \leq \overline{F_n}$.

Auf Grund der obigen Figur ist es verständlich, dass eine **feinere Unterteilung** des Intervalls — d. h. ein **größeres n** — eine **bessere Annäherung** des Flächeninhalts A durch die Ober- bzw. Untersumme ergibt.

Wir zeigen die Durchführung des Grenzübergangs ($n \to \infty$) für die Untersumme:

$$\lim_{n\to\infty} \underline{F}_n = \lim_{n\to\infty} (b-a)\left[a^2 + a(b-a)\left(1-\tfrac{1}{n}\right) + (b-a)^2 \cdot \tfrac{1}{6}\left(1-\tfrac{1}{n}\right)\left(2-\tfrac{1}{n}\right)\right]$$

Es gilt: $\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0}$

Daraus folgt: $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1$ bzw. $\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right) = 2$

$$\lim_{n\to\infty} \underline{F}_n = (b-a)\left[a^2 + a(b-a)\cdot 1 + (b-a)^2 \cdot \tfrac{1}{6}\cdot 1 \cdot 2\right] = (b-a)\left[a^2 + a(b-a) + \tfrac{(b-a)^2}{3}\right] =$$

$$= (b-a)\left[a^2 + ab - a^2 + \tfrac{b^2}{3} - \tfrac{2ab}{3} + \tfrac{a^2}{3}\right] = (b-a)\left(\tfrac{a^2}{3} + \tfrac{ab}{3} + \tfrac{b^2}{3}\right) =$$

$$= \tfrac{1}{3}\left(a^2b - a^3 + ab^2 - a^2b + b^3 - ab^2\right) = \tfrac{b^3}{3} - \tfrac{a^3}{3}$$

Der Grenzübergang für die Obersumme ist analog durchzuführen.

Bemerkung: Wenn diese beiden Grenzwerte existieren und überein stimmen, so gilt:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \underline{F}_n = \lim_{n\to\infty} \overline{F_n} = A}$$

c) Es ist zu zeigen, dass für $f(x) = x^2$ der Flächeninhalt A mit dem bestimmten Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ überein stimmt.

706. Betrachten wir einmal eine beliebige stetige Funktion $f(x) \geq 0$ im Intervall [z, b]. Wir suchen nun eine Möglichkeit, den Flächeninhalt A unter dem Graphen f(x) im Intervall [a, b]. zu berechnen.

Wir wissen bereits: $A = \int_a^b f(x)\,dx = F(a, b)$.

Aber wie berechnet man dieses bestimmte Integral, wenn man nicht jedesmal die Ober- bzw. Untersumme ($\underline{F}_n$, $\overline{F_n}$) und den anschließenden Grenzwert $\left(\lim_{n\to\infty} \underline{F}_n, \lim_{n\to\infty} \overline{F_n}\right)$ bilden will? Denn dieser Lösungsweg ist doch auf die Dauer etwas langweilig.

Richten wir unsere Aufmerksamkeit auf den schmalen blauen Streifen in der obigen Figur, der sich über dem Intervall $[x, x+\Delta x]$ erhebt. (In der unteren Figur ist er etwas größer — allerdings nicht maßstabsgetreu — dargestellt.) Die Strecken g und k bezeichnen den größten und kleinsten Wert, den die Funktion f(x) im Intervall $[x, x+\Delta x]$ annimmt. Daher gilt für die Fläche $F(x, x+\Delta x)$ unterhalb der Kurve:

$$\underbrace{k \cdot \Delta x}_{\text{Fläche des orange unterlegten Rechtecks}} \leq F(x, x+\Delta x) \leq \underbrace{g \cdot \Delta x}_{\text{Fläche des rosa und des orange unterlegten Rechtecks}}$$

706. (Forsetzung)

Andererseits können wir die Fläche dieses schmalen Streifens so ausdrücken:

$F(x,\ x+\Delta x) = F(z,\ x+\Delta x) - F(z,\ x)$

Daher sieht unsere Ungleichung jetzt Folgendermaßen aus:

$$k \cdot \Delta x \leqslant \underbrace{F(z,\ x+\Delta x) - F(z,\ x)}_{= F(x,\ x+\Delta x)} \leqslant g \cdot \Delta x \qquad \Big|\ : \Delta x$$

$$k \leqslant \frac{F(z,\ x+\Delta x) - F(z,\ x)}{\Delta x} \leqslant g$$

Wir erinnern uns nun daran, dass wir doch die Stetigkeit von f vorausgesetzt hatten. Die Größe g wird daher der Größe k **beliebig** nahe kommen, wenn wir nur Δx ebenfalls beliebig klein werden lassen:

$$\Rightarrow f(x) = k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(z,\ x+\Delta x) - F(z,\ x)}{\Delta x} = g$$

Es gilt also: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{F(z,\ x+\Delta x) - F(z,\ x)}{\Delta x} = f(x)$

a) Wie lässt sich der linke Grenzwert anders darstellen?

Anleitung: Denken wir an die Definition des Differenzialquotienten.

b) Es gelte: $F(z,\ x) = F(x) + C$ ($F(x)$ ist eine beliebige Stammfunktion von $f(x)$.) Der Flächeninhalt A lässt sich nun leicht berechnen: $A = \int\limits_a^b f(x)\,dx = F(a,\ b) = F(z,\ b) - F(z,\ a) = ?$

707. In Aufgabe **705.** wurde der Zusammenhang zwischen Flächeninhalt A und dem bestimmten Integral $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ angedeutet.

Jetzt könnte man glauben, diese beiden Begriffe wären identisch und könnten stellvertretend füreinander eingesetzt werden. Nun das stimmt nicht so ganz. Das merkt man bereits an den beiden Integralen:

$$\int\limits_0^1 (4 - 3x^2)\,dx = 3 \quad \text{und} \quad \int\limits_0^2 (4 - 3x^2)\,dx = 0$$

Obwohl beim rechten Integral das Integrationsintervall **größer** ist als beim linken, ist sein Wert **kleiner**. Würde man die obere Grenze auf 3 setzen, so erhielte man –15 als Wert des bestimmten Integrals.

Gibt es vielleicht negative Flächeninhalte? Natürlich nicht.

Betrachten wir einmal eine beliebige stetige Funktion $f(x)$ über dem Intervall $[a,\ b]$. Nun zerlegen wir das Intervall $[a,\ b]$ in n gleich lange Teile der Länge $\Delta x = \frac{b-a}{n}$:

In den obigen Figuren bedeuten $k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_n$ die Werte der **unterhalb** von $f(x)$ liegenden Treppenfunktion $\underline{f}_n(x)$ bzw. $g_1,\ g_2,\ \ldots,\ g_n$ die Werte der **oberhalb** von $f(x)$ liegenden Treppenfunktion $\overline{f}_n(x)$ innerhalb der einzelnen Teilintervalle.

707. (Fortsetzung)

a) Es sind Unter- und Obersumme zu berechnen. Wir zeigen den Rechengang für die Untersumme:

$$\underline{F}_n = k_1\Delta x + k_2\Delta x + \ldots + k_n\Delta x = \Delta x(k_1 + k_2 + \ldots + k_n) = \Delta x \cdot \sum_{i=1}^{n} k_i = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} k_i$$

Die Berechnung der Obersumme ist analog durchzuführen.

b) Nun unterscheiden wir, ob $f(x)$ positiv oder negativ ist:

1.Fall: $f(x) \geqslant 0$ für $x \in [a, b]$. Für diesen Fall stellen wir die Herleitung der Formel wie folgt dar:

Wenn $f(x) \geqslant 0$ gilt, dann sind sämtliche k_i und sämtliche g_i der Intervallzerteilung ebenfalls positiv, d. h.

$$k_i \geqslant 0 \text{ und } g_i \geqslant 0$$

Das bedeutet, dass auch die Ober- bzw. Untersumme immer positiv ist:

$$\overline{F}_n \geqslant 0 \text{ und } \underline{F}_n \geqslant 0 \text{ für **jedes** } n \in \mathbb{N}^*$$

Wenn nun **alle** Ober- bzw. Untersummen positiv sind, dann gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} \overline{F}_n \geqslant 0 \text{ und } \lim_{n\to\infty} \underline{F}_n \geqslant 0$$

Sind diese beiden Grenzwerte gleich, so entspricht ihnen das bestimmte Integral:

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \underline{F}_n = \lim_{n\to\infty} \overline{F}_n = \int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$$

Der Flächeninhalt A zwischen dem Funktionsgraphen von $f(x)$ und der x-Achse — der ja **stets positiv** sein muss —ist also in diesem Fall mit dem bestimmten Integral identisch:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

2. Fall: $f(x) \leqslant 0$ für $x \in [a, b]$. Es ist zu zeigen, dass in diesem Fall $A = -\int_a^b f(x)\,dx$ gilt.

c) Man vergleiche die Ergebnisse des bestimmten Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$ für $f(x) = x^2$ und $f(x) = -x^2$.

d) Einerseits kann man nicht voraus setzen, dass eine Funktion $f(x)$ auf $[a, b]$ positiv oder negativ ist, andererseits darf ein **Flächeninhalt** nie negativ sein.

Wie kann man aus diesem Grund den Flächeninhalt A mittels des bestimmten Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$ allgemein definieren?

Bisher haben wir das bestimmte Integral nur für die Berechnung des Flächeninhalts benützt. Das heißt aber nicht, dass die Anwendung des bestimmten Integrals auf solche zweidimensionalen Probleme beschränkt bleiben muss.

Ganz im Gegenteil: Mit unserem neuen Begriff stehen uns dreidimensionale Räume zur Berechnung ihrer Inhalte offen. Prinzipiell kann man zwar mit Hilfe der Integralrechnung das Volumen sehr komplizierter Körper ermitteln, wir aber wollen uns hier mit **Rotationskörpern** begnügen.

Ein Rotationskörper wird durch seine Oberfläche begrenzt. Diese entsteht, wenn eine Kurve der xy-Ebene um die x-Achse bzw. y-Achse **rotiert.**

708. Rotation um die x-Achse

Wir lassen für die Kurve in der xy-Ebene nur eine stetige Funktion $y = f(x)$ auf dem Intervall $[x_1, x_2]$ zu.

Erinnern wir uns an die Herleitung der Flächenformel: Dort war zunächst die Ober- und Untersumme der Fläche zu bilden.

Nun haben wir es aber mit dem Volumen V_x[1] zu tun: Also müssen wir Ober- und Untersumme von V_x bestimmen. Hierzu zerstückelt man das Intervall $[x_1, x_2]$ in n gleich lange Teilintervalle der Länge $\Delta x = \frac{x_2 - x_1}{n}$.

In jedem dieser Intervalle bestimmen wir den jeweils kleinsten Funktionswert k_i bzw. den größten Funktionswert g_i für $i = 1, \ldots, n$. Dadurch entstehen wiederum zwei Treppenfunktionen.

Lässt man diese um die x-Achse rotieren so entstehen zwei Drehkörper, die jeweils aus n gleich dicken zylinderförmigen Scheiben bestehen. Ihre Volumina bilden die Obersumme $\overline{V_n}$ bzw. Untersumme $\underline{V_n}$ von V_x.

a) Man zeige: $\overline{V_n} = \pi \sum\limits_{i=1}^{n} g_i^2 \, \Delta x$

b) Man zeige: $\underline{V_n} = \pi \sum\limits_{i=1}^{n} k_i^2 \, \Delta x$

Das Volumen V_x des Rotationskörpers liegt immer zwischen Ober- und Untersumme: $\underline{V_n} \leqslant V_x \leqslant \overline{V_n}$.

Diese Ungleichung kommt uns doch schon bekannt vor.

Wenn wir jetzt die Zerstückelung von $[x_1, x_2]$ immer weiter vorantreiben, d. h. die Anzahl n der Teilintervalle erhöhen, werden $\overline{V_n}$ und $\underline{V_n}$ sich dem Volumen V_x nähern.

Wir bilden also die beiden Grenzwerte $\lim\limits_{n \to \infty} \underline{V_n}$ und $\lim\limits_{n \to \infty} \overline{V_n}$.

Stimmen sie überein, so können sie durch das bestimmte Integral $\pi \int\limits_{x_1}^{x_2} y^2 \, dx$ ersetzt werden. Dieses muss dem Volumen V_x des Rotationskörpers gleich sein:

$$V_x = \pi \int\limits_{x_1}^{x_2} y^2 \, dx$$

[1] Der Index x in V_x deutet an, dass es sich um ein Volumen eines Körpers handelt, der durch Rotation einer ebenen Kurve um die x-Achse entsteht.

709. Rotation um die y-Achse

a) Man ermittle die Obersumme $\overline{V_n}$ im Intervall $[y_1, y_2]$.

b) Man ermittle die Untersumme $\underline{V_n}$ im Intervall $[y_1, y_2]$.

c) Wie lautet die Formel für V_y?

710. Es ist zu zeigen, dass sich Stammfunktionen der gleichen Funktion f(x) nur durch eine additive Konstante C ($C \in \mathbb{R}$) unterscheiden.

Anleitung: Betrachtet man eine im abgeschlossenen Intervall [a, b] stetige und im offenen Intervall]a, b[differenzierbare Funktion f(x), so liefert der Differenzenquotient $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ den Anstieg der Kurvensekante durch die Punkte $P_1(a, f(a))$, $P_2(b, f(b))$.

Verschiebt man diese Sekante parallel, so wird mindestens einmal eine Lage eintreten, bei der die Parallele die Kurve in einer Zwischenstelle $x_0 \in]a, b[$ berührt, d. h. zur Tangente wird.

Es gilt dann $\boxed{f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$.

Dieser Zusammenhang heißt auch **Mittelwertsatz der Differenzialrechnung**.

711. Es sind mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Integralrechnung die nachfolgenden Integrale abzuschätzen und mit dem exakten Wert zu vergleichen.

a) $\int_1^3 \left(\frac{x^2}{4} + 1\right) dx$ **b)** $\int_0^2 x^3\, dx$

Anleitung: Ist die Funktion im abgeschlossenen Intervall I = [a, b] stetig, so nimmt sie in diesem Intervall I ihr Minimum m und ihr Maximum M an.

Für jedes x aus I gilt danach $m \leq f(x) \leq M$ und auch $m \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq m \cdot (b - a)$.

Der Inhalt der Fläche zwischen der Kurve f(x) und der x-Achse ist somit durch die Flächeninhalte der Rechtecke mit der Breite (b – a) und den Höhen m und M nach unten bzw. oben begrenzt.

Es muss demnach eine Zahl μ mit $m \leq \mu \leq M$ geben, so dass der Inhalt der Fläche zwischen Kurve und x-Achse mit dem Inhalt des Rechtecks der Breite (b – a) und der Höhe μ übereinstimmt.

Wegen der Stetigkeit von f(x) gibt es mindestens eine Zahl ξ aus [a, b] mit $\mu = f(\xi)$.

Es gilt demnach $\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = \mu \cdot (b - a) = f(\xi) \cdot (b - a)}$.

Dieser Zusammenhang heißt auch **Mittelwertsatz der Integralrechnung**.

712. Die wahren Aussagen sind anzukreuzen:

- ○ **a)** Ein konstanter Faktor kann vor das Integralzeichen gesetzt werden. (Begründung?)
- ○ **b)** Das Integral einer Summe von Funktionen ist gleich der Differenz der Integrale der einzelnen Funktionen.
- ○ **c)** Ein Grundintegral ist ein unbestimmtes Integral, das direkt durch Umkehrung der Regeln der Differenzialrechnung berechenbar ist.
- ○ **d)** Eine Summe von endlich vielen Funktionen darf gliedweise integriert werden.
- ○ **e)** Eine Funktion $f(x)$ integrieren heißt, jene Funktionen $F(x)$ suchen, deren Ableitung $f(x)$ ist.
- ○ **f)** Das Integrieren ist eine Umkehraufgabe des Differenzierens mit unendlich vielen Lösungen.
- ○ **g)** Wenn man die Integrationsgrenzen vertauscht, bleibt das Vorzeichen des bestimmten Integrals unverändert.
- ○ **h)** Das bestimmte Integral einer Funktion ist gleich Null, wenn die obere und untere Grenze gleich sind.

713. Der fehlende Text ist einzusetzen:

a) Lässt sich die Integrationskonstante C auf Grund gegebener Bedingungen bestimmen, so heißt ein solches Integral ..... (bestimmtes/unbestimmtes) Integral.

b) Das Integrationsintervall des bestimmten Integrals ..... (kann/kann nicht) beliebig unterteilt werden.

c) Wenn die obere und untere Grenze eines bestimmten Integrals gleich sind, so repräsentiert dieses Integral eine Fläche von ..... FE.

d) Wir nennen jede Funktion $F(x)$, für die innerhalb der Definitionsmenge $F'(x) = f(x)$ ist, eine ..... von $f(x)$.

e) Das Integrieren ist eine Umkehraufgabe des Differenzierens mit ..... (endlich/unendlich) vielen Lösungen.

f) Der Inhalt der Fläche zwischen einem Funktionsgraphen mit $y = f(x)$ und der x-Achse im Intervall $[a, b]$ ist ..... (meistens positiv/stets nicht negativ/positiv), wenn $f(x) \geqslant 0$ für $x \in [a, b]$.

g) Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ ist ..... (meistens positiv/stets nicht negativ/positiv), wenn $f(x) \geqslant 0$ für $x \in [a, b]$.

h) Hat $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ keine Nullstellen, so lässt sich der Inhalt der Fläche zwischen dem Funktionsgraphen und der x-Achse im Intervall $[a, b]$ durch ..... ($\int_a^b y\,dx \,/\, |\int_a^b y\,dx| \,/\, \pi\int_a^b y^2\,dx$) darstellen.

Bei den folgenden Aufgaben ist durch Angabe einer Nebenbedingung aus der Menge der unendlich vielen Stammfunktionen F von f genau eine definiert. Diese ist zu berechnen.

714.

	a)	b)	c)	d)
$f(x)$	$6x^2 - 5x + 2$	$\frac{3}{x}$	$\sqrt[3]{2x}$	$\frac{3}{\sqrt{x}}$
Nebenbedingung	F geht durch P(2, 15)	$F(2) = \ln 32$	$P(4, 15) \in F$	$F(3) = 6\sqrt{3}$

715.

	a)	b)	c)	d)
$f(x)$	$\frac{5x^3 - 3x + 14}{7x^3}$	$\frac{(2x-1)^3}{3x^2}$	$\frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x^2}}$	$\frac{x^2 - 1}{x\sqrt{x} - x}$
Nebenbedingung	$P(1, 1) \in F$	Bei $x = 1$ hat F den Wert $\frac{2}{3}$	$F(1) = \frac{3}{2}$	Bei $x = 1$ hat F den Wert 5

Bei den folgenden Aufgaben ist der Inhalt A der von f auf [a, b] begrenzten Fläche durch Integration zu berechnen.

716.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
f(x)	x	$x+1$	$3x$	$-x$	4	-7	$-2x$	$-\frac{3}{4}x$
a	0	0	0	0	2	−3	−2	−8
b	1	1	10	1	7	5	3	2

Bemerkung: Die Funktionen wurden bei dieser Aufgabe so gewählt, dass eine Überprüfung des gefundenen Werts mit Hilfe der bekannten Flächenformeln für Rechteck, Dreieck bzw. Trapez möglich ist.

717.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
f(x)	x^2	x^2+2	$-x^2$	$\frac{1}{x^2}$	$2-x^2$	x^2-5x+4	x^2-x	x^2-4x
a	−2	−2	−2	1	−2	0	−2	1
b	2	2	2	2	2	5	2	5

Bei den folgenden Aufgaben schließen die Graphen von f(x) und g(x) eine endliche Fläche ein, deren Inhalt A_{fg} zu berechnen ist:

718.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
f(x)	x^2	x^2	x^2-9	$\frac{x^2}{2}+1$	x^2	x^2-1	$\frac{x^2}{6}$	x^2
g(x)	$x+6$	$2x+3$	$x+11$	$\frac{x}{2}+4$	$2-x^2$	$7-x^2$	$\frac{x^2}{12}+3$	$2x-x^2$

719.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
f(x)	$-x^2+3x+5$	x^3-x^2+x-1	x^3-4x	x^3-3x^2	x^2	$\sqrt{6x}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{36}{x^2}$
g(x)	$x+2$	x^3+x^2+x-3	x^2-4	$x-3$	$\sqrt{x}$	x	$\frac{10}{3}-x$	$x+7$

720. Die durch den Ursprung gehende Funktion $f\colon x \mapsto ax^4+bx^2$ begrenzt mit der x-Achse eine Fläche mit dem Inhalt $A_f = \frac{128}{15}$. Ferner schneidet f die x-Achse in N(4, 0). Wie groß sind a und b?

721. Die Funktion $f\colon x \mapsto ax^3+bx^2+cx+d$ geht durch P(3, −16), besitzt bei $x=3$ ein relatives Extremum und bei $x=1$ eine Wende- und Nullstelle. Man ermittle den Inhalt der von f und der x-Achse begrenzten Fläche.

722. $f\colon x \mapsto ax^2+bx+c$ geht durch P(0, 2) und Q(1, 9). Die Steigung der Tangente bei $x=3$ ist 2. Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse?

723 Eine Polynomfunktion zweiten Grads geht durch P(−2, 0) und Q(4, 0) und berührt die Gerade g: $y=9$. Welchen Inhalt hat die von ihr und der x-Achse begrenzte Fläche?

Anleitung: Welche Kurve entsteht als Graph? Man benütze deren Symmetrie-Eigenschaften.

724. Die folgenden Relationen bzw. Funktionen sind durch ihre Gleichung gegeben und lassen sich in der Form $y = f(x)$ bzw. $y = g(x)$ schreiben. Wie groß ist der jeweils eingeschlossene Flächeninhalt A_{fg}?

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
f(x)	$x^2 = 6 - y$	$x^2 - y = 4$	$x^2 - y = 0$	$x^2 = 2y$	$y^2 = x$	$y^2 = 4x$	$y^2 = 4x$	$y^4 = x^3$
g(x)	$x = y$	$2x - y = -4$	$x^2 + y = 2x$	$x^2 + x - y = 4$	$x - y = 2$	$2x - y = +4$	$x^2 = 4y$	$y^2 = 2 - x$

725. Die durch $f: x \mapsto \frac{x^3}{8}$ auf $[0, 4]$ begrenzte Fläche soll durch eine zur y-Achse parallele Gerade $g: x = c$ halbiert werden. Gleichung der Geraden?

726. Die durch $f: x \mapsto x^2$ auf $[0, 2]$ begrenzte Fläche soll durch eine zur x-Achse parallele Gerade $g: y = d$ halbiert werden! (Vgl. nebenstehende Figur) Gleichung der Geraden?

Anleitung: Zunächst berechnen wir A; $\ldots \frac{A}{2} = \frac{4}{3}$, $\int_0^x x^2 dx + d(2 - x) = \frac{4}{3}$ usw.

727. $f: x \mapsto \frac{3x^2 + 1}{10}$ begrenzt auf $[0, a]$ eine Fläche mit dem Inhalt $A_f = 1$. Wie groß ist a?

728. Welche zur y-Achse parallele Gerade schließt mit $f: x \mapsto x^2$ und der x-Achse eine Fläche vom gegebenen Inhalt A_f ein?

a) $A_f = 4$ **b)** $A_f = 36$ **c)** $A_f = \sqrt{3}$

729. Man lege durch den Punkt $P(-1, y_P)$ der Kurve $y = -x^2 + 4$ die Tangente t und berechne den Inhalt des durch t, x-Achse und die Kurve f begrenzten Flächenstücks! (Vgl. nebenstehende Figur)

730. Für welches b ist $\int_0^b (x^2 - 5x - 6)\, dx = 0$?

731. $f: x \mapsto cx^2$ und $g: x \mapsto 1 - \frac{x^2}{c}$ begrenzen eine endliche Fläche. Man berechne $c \in \mathbb{R}^+$ so, dass deren Inhalt A_{fg} ein Maximum wird. (Vgl. nebenstehende Figur)

Anleitung: Zunächst ist $\frac{1}{2} A_{fg}$ allgemein zu ermitteln und daran ist die Extremwertaufgabe anzuschließen.

732. Man ermittle den Inhalt A der von der Kurve $x^2 = 2(y - 2)$ und der Geraden $x - y = -6$ begrenzten Fläche!

733. In einem thermodynamischen Kreisprozess soll die Gesamtarbeit W, die bei einem Zyklus verrichtet wird, ermittelt werden. W ist gleich dem Inhalt der in nebenstehender Figur rosa unterlegten Fläche.

Anleitung: Aus dem gewohnten $\int_a^b f(x)\, dx$ wird $\int_{V_1}^{V_2} p(V)\, dV$.

Bei den folgenden Aufgaben rotiert die durch f: $x \mapsto f(x)$ auf [a, b] begrenzte Fläche um die x-Achse. Wie groß ist das Volumen V des entstehenden Drehkörpers?

734.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
f(x)	x	$4x$	$\frac{x}{2}+1$	$x-3$	x^2	x^2+1	$\frac{x^3}{2}$	x^2-x
a	1	3	0	4	0	0	0	2
b	2	6	4	6	2	1	4	3

735.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
f(x)	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\sqrt{4x}$	$\sqrt{6x}$	$\sqrt{(x+4)^3}$	$\frac{6}{5}\sqrt{25-x^2}$	$\frac{5}{6}\sqrt{36-x^2}$	$4\sqrt{x-4}$	$x+\sqrt{x}$
a	1	2	0	0	0	0	5	1
b	2	8	3	3	5	6	6	4

Bei den folgenden Aufgaben ist das Volumen V zu berechnen, das entsteht, wenn die zwischen der x-Achse und dem Graphen der gegebenen Funktion f eingeschlossene Fläche um die x-Achse rotiert?

736.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
f	x^2-4	$2x^2-18$	$5-x^2$	$8-2x^2$	x^2-3x	$3x^2-5x$	$x-2x^2$	$3x-2x^2$

737.

	a)	b)	c)	d)
f	x^2-5x+6	x^2+3x+2	x^2-8x+7	$x^2+2x-15$

738.

	a)	b)	c)	d)
f	x^2+x-12	$-x^2+5x+14$	$-x^2-4x+21$	$-x^2+3x+28$

739.

	a)	b)	c)	d)
f	x^3-6x^2+9x	$-x^3+2x^2-x$	x^3-4x^2-5x	x^3-2x^2-3x

740.

	a)	b)	c)	d)
f	x^3-8x^2-9x	x^3-4x^2-12x	x^3-11x^2+10x	$-x^3+3x^2+10x$

741.

	a)	b)	c)	d)
f	x^3+x^2-4x-4	x^3+2x^2-x-2	$x^3+2x^2-9x-18$	x^3-x^2-x+1

742.

	a)	b)	c)	d)
f	x^3+4x^2-x-4	x^3-3x^2-x+3	$2x^3+3x^2-3x-2$	$2x^3+x^2-2x-1$

Bei den folgenden Aufgaben schließen f und g eine endliche Fläche ein. Welches Volumen V entsteht, wenn diese Fläche um die x-Achse rotiert?

743.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
f	x^2+2	x^2+1	x^2+1	x^2+2	x^2+2	$2x^2+1$	$2x^2+3$	$2x^2+1$
g	$5x-4$	$3x-1$	$7x-9$	$7x-8$	$4x-1$	$5x-1$	$3x+2$	$7x-2$

744.

	a)	b)	c)	d)
f	x^2-2x+2	x^2-4x+5	$-x^2+8x-12$	$-3x^2+18x-23$
g	$-x^2+4x+2$	$-x^2+4x-1$	$-2x^2+16x-24$	$-2x^2+12x-15$

745.

	a)	b)	c)	d)
f	x^2-4x+4	x^2-4x+3	x^2-4x	$2x^2$
g	$-x^2+4$	$-3x^2+3$	$-3x^2+12x-12$	$-2x^2+8x$

Bei den folgenden Aufgaben rotiert die von den Kurven k_1, k_2 mit den gegebenen Gleichungen begrenzte Fläche um die x-Achse. Das Volumen des entstehenden Drehkörpers als Differenz der Volumina zweier Drehkörper ist zu berechnen. Eventuell ist Intervallteilung vorzunehmen.

746.

	a)	b)	c)	d)
k_1	$y=\pm\sqrt{8x}$	$y=\frac{x^2}{8}$	$y^2=6x$	$y^2=4x$
k_2	$x=2$	$y=\frac{x}{2}+4$	$y=x$	$x=2$

747.

	a)	b)	c)	d)
k_1	$y^2=2x+6$	$y^2=8x$	$y^2=8x$	$y^2=8x$
k_2	$y^2=6x$	$y=\pm 4\sqrt{3-x}$	$x=2$	$y^2=3x+10$

Bei den folgenden Aufgaben rotiert die von den Kurven k_1, k_2 mit den gegebenen Gleichungen begrenzte Fläche um die **(1)** x-Achse **(2)** y-Achse. Das Volumen des entstehenden Drehkörpers als Differenz der Volumina zweier Drehkörper ist zu berechnen. Eventuell ist Intervallteilung vorzunehmen.

748.

	a)	b)	c)	d)
k_1	$y=x^2-4$	$y^2=6x$	$y^2=x^3$	$y=\sqrt{8x}$
k_2	$y=0$	$y-x=0$	$y^2+(x-2)=0$	$y=x$

749.

	a)	b)	c)	d)
k_1	$x^2+y^2=25$	$y^2=2px$	$y^2=3x$	$y^2=4x$
k_2	$x^2=y-\frac{37}{16}$	$x^2=2py$	$y^2=5-2x$	$y=x$

2. Integration durch Substitution

Unter Verwendung der Formeln (1) $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ und (4) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$ konnten wir zahlreiche Integrale berechnen.

Der bisher eingeschlagene Lösungsweg versagt aber beispielsweise bei den folgenden Problemstellungen:

(1) $\int 2x(x^2-4)^{0,3}\,dx = ?$ (2) $\int \sqrt[3]{3+4x}\,dx = ?$ (3) $\int \frac{2x-5}{x^2-5x+6}\,dx = ?$

Mit der sogenannten **Integration durch Substitution**[1] lernen wir nun ein neues Verfahren kennen, das uns die Lösung einer großen Gruppe von Integralen ermöglicht.

Beispiel:

a) $\int 5\sqrt{4+5x}\,dx = ?$ **b)** $\int 2x(x^2-4)^3\,dx = ?$ **c)** $\int \sqrt[3]{3+4x}\,dx = ?$

Lösung:

Die Lösung erfolgt gemäß der in der Außenspalte gegebenen Systematik.

a) (1) $u = 4+5x$ (2) $\frac{du}{dx} = 5 \Leftrightarrow dx = \frac{du}{5}$

(3) $\int 5\sqrt{4+5x}\,dx = \int 5\sqrt{u}\,\frac{du}{5} = \int \sqrt{u}\,du = \int u^{\frac{1}{2}}\,du =$

(4) $= \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{u^3} + C =$

(5) $= \frac{2}{3}\sqrt{(4+5x)^3} + C$ $\int 5\sqrt{4+5x}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{(4+5x)^3} + C$

b) (1) $u = x^2-4$ (2) $\frac{du}{dx} = 2x \Leftrightarrow dx = \frac{du}{2x}$

(3) $\int 2x(x^2-4)^3\,dx = \int 2xu^3\,\frac{du}{2x} = \int u^3\,du =$

(4) $= \frac{u^4}{4} + C =$

(5) $= \frac{(x^2-4)^4}{4} + C$ $\int 2x\,(x^2-4)^3\,dx = \frac{(x^2-4)^4}{4} + C$

c) (1) $u = 3+4x$ (2) $\frac{du}{dx} = 4 \Leftrightarrow dx = \frac{du}{4}$

(3) $\int \sqrt[3]{3+4x}\,dx = \int \sqrt[3]{u}\,\frac{du}{4} = \frac{1}{4}\int u^{\frac{1}{3}}\,du =$

(4) $= \frac{1}{4}\cdot\frac{u^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{16}u^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{16}\sqrt[3]{u^4} + C =$

(5) $= \frac{3}{16}\sqrt[3]{(3+4x)^4} + C$ $\int \sqrt[3]{3+4x}\,dx = \frac{3}{16}\sqrt[3]{(3+4x)^4} + C$

Rechenregel zur Integration durch Substitution:

(1) Festlegung der Substitution $u = \blacksquare$

(2) Bildung der Ableitung $\frac{du}{dx} = \blacksquare'$ und explizite Berechnung von $dx = \frac{du}{\blacksquare'}$

(3) Durchführung der Substitution — $\blacksquare$ und dx werden ersetzt — und Vereinfachung des Integranden, sofern letzteres möglich ist.

(4) Integration

(5) Rücksubstitution — u wird durch $\blacksquare$ ersetzt.

Im nebenstehenden Beispiel wurde jeweils ein „Teil" des Integranden durch die neue Variable u ersetzt. Das ist auch schon die eigentliche Kunst dieser Integrationsmethode: Man hat eine **geeignete Substitution** durchzuführen, so dass das gegebene Integral auf ein Grundintegral zurückgeführt wird. Leider gibt es keine allgemein gültige Regel, was eine „geeignete" Substitution ist. Das Verfahren erfordert somit eine gewisse Übung.

Gibt es eigentlich ein Verfahren zur **unmittelbaren** Umformung des Integranden, so dass man sich manchmal das „Herumsubstituieren" erspart? Die Antwort auf diese Frage findet sich in der Außenspalte. Die auf den ersten Blick kompliziert erscheinende Formel (5) beruht auf der Integration durch Substitution:

$$\int \underbrace{2x}_{f'(x)}\,\underbrace{(x^2-4)}_{f(x)}{}^{\overset{n}{3}}\,dx = \underbrace{\frac{(x^2-4)^{\overset{n+1}{4}}}{4}}_{\frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}} + C$$

(5) $\int f'(x)\,[f(x)]^n\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$

[1]) substitutio (lat.): Einsetzung.

Beispiel:

a) $\int 24x^2(7+8x^3)^2\,dx = ?$ **b)** $\int x^4(8x^5+7)^6\,dx = ?$ **c)** $\int \frac{dx}{(1-3x)^2} = ?$

Lösung:

Die Lösung erfolgt gemäß der in der Außenspalte gegebenen Systematik.

a) (1) $f(x) = 7+8x^3,\ f'(x) = 24x^2$

(2) $\int 24x^2(7+8x^3)^2\,dx = \int \underbrace{24x^2}_{f'(x)}\underbrace{(7+8x^3)}_{f(x)}{}^{\overset{n}{2}}\,dx =$

(3) $= \frac{(7+8x^3)^3}{3} + C$ $\qquad \int 24x^2(7+8x^3)^2\,dx = \frac{(7+8x^3)^3}{3} + C$

b) (1) $f(x) = 8x^5+7,\ f'(x) = 40x^4$

(2) $\int x^4(8x^5+7)^6 dx = \frac{1}{40}\int \underbrace{40x^4}_{f'(x)}\underbrace{(8x^5+7)}_{f(x)}{}^{\overset{n}{6}}\,dx =$

(3) $= \frac{(8x^5+7)^7}{40\cdot 7} + C$ $\qquad \int x^4(8x^5+7)^6\,dx = \frac{(8x^5+7)^7}{280} + C$

Korrekturfaktor

c) (1) $f(x) = 1-3x,\ f'(x) = -3$

(2) $\int \frac{dx}{(1-3x)^2} = \int (1-3x)^{-2}\,dx,$

$\int (1-3x)^{-2}\,dx = \frac{1}{3}\int \underbrace{(-3)}_{f'(x)}\underbrace{(1-3x)}_{f(x)}{}^{\overset{n}{-2}}\,dx =$

Korrekturfaktor

(3) $= -\frac{1}{3}\cdot\frac{(1-3x)^{-1}}{-1} + C$ $\qquad \int \frac{dx}{(1-3x)^2} = \frac{1}{3-9x} + C$

Rechenregel zur unmittelbaren Integration:

(1) Festlegung von $f(x) = \blacksquare$ und Bildung der Ableitung $f'(x) = \blacksquare'$.

(2) Folgendes wird angeschrieben: gesuchtes Integral $= \int f'(x)\,[f(x)]^n\,dx$.

(3) Ist diese Gleichung „richtig", kann sofort integriert werden. Andernfalls muss vor dem Integral ein Korrekturfaktor gesetzt werden.

Es darf mit jeder reellen Zahl, nicht jedoch mit der Integrationsvariablen korrigiert werden!

(5) $\int f'(x)\,[f(x)]^n\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$

Für Formel (5) gilt die Einschränkung, dass der Exponent $n \neq -1$ sein muss. Warum eigentlich? Schauen wir uns den Fall $n = -1$ an einem konkreten Beispiel an:

$\int (2x-5)(x^2-5x+6)^{-1}\,dx = \ldots = \frac{(x^2-5x+6)^0}{0} + C \Big\}$ Division durch Null

$\int (2x-5)(x^2-5x+6)^{-1}\,dx$ ist ein (zunächst) unlösbares Integral.

Mit Hilfe der „Integration durch Substitution" bekommen wir die Sache jedoch in den Griff:

(1) $u = x^2-5x+6$ $\qquad$ (2) $\frac{du}{dx} = 2x-5 \Leftrightarrow dx = \frac{du}{2x-5}$

(3) $\int (2x-5)(x^2-5x+6)^{-1}\,dx = \int (2x-5)\,u^{-1}\frac{du}{2x-5} = \int \frac{du}{u} =$

(4) $= \ln|u| + C =$ $\qquad$ (5) $= \ln|x^2-5x+6| + C$

$\int (2x-5)(x^2-5x+6)^{-1}\,dx = \ln|x^2-5x+6| + C$

Formel (6) — vgl. Außenspalte — zeigt die unmittelbare Umformung.

„Durch Null darf nicht dividiert werden", ist das eigentlich eine sinnvolle Forderung? Wer Zweifel hat, ist eingeladen, die folgenden Zeilen zu überdenken:

$1-1 = 1-1$

$(1+1)(1-1) = 1(1-1)\ |:\underbrace{(1-1)}_{0}$

$1+1 = 1$

$2 = 1$

$\Rightarrow$ Die Division durch Null führt zu einem Widerspruch.

(6) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C,\ f(x) \neq 0$

Beispiel:

a) $\int \frac{4x-5}{2x^2-5x+1}\,dx = ?$ **b)** $\int \frac{12x-8}{3x^2-4x+5}\,dx = ?$

Lösung:

a) $\int \frac{\overbrace{4x-5}^{f'(x)}}{\underbrace{2x^2-5x+1}_{f(x)}}\,dx = \ln|2x^2-5x+1| + C$

b) $\int \frac{12x-8}{3x^2-4x+5}\,dx = 2\int \frac{\overbrace{6x-4}^{f'(x)}}{\underbrace{3x^2-4x+5}_{f(x)}}\,dx = 2\ln|3x^2-4x+5| + C$

(Der Faktor 2 vor dem zweiten Integral: Korrekturfaktor)

$$\int \frac{12x-8}{3x^2-4x+5}\,dx = 2\ln|3x^2-4x+5| + C$$

Was passiert, wenn man das Integral $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$ mittels Substitution zu lösen hat? Das Integral wird dabei in ein anderes — natürlich **gleich großes** — Integral $\int_{u_1}^{u_2} g(u)\,du$ umgewandelt, so dass dieses nun elementar lösbar ist (vgl. nachstehende Figuren).

Die Flächen unter den beiden Kurven sind **gleich groß!**

AUFGABEN

Die folgenden Aufgaben sind mittels Integration durch Substitution zu lösen:

750. a) $\int (1+x)^4\,dx$ **b)** $\int (3x-2)^3\,dx$ **c)** $\int (2-x)^3\,dx$

751. a) $\int x(3x^2-1)^2\,dx$ **b)** $\int x(5-7x^2)^2\,dx$ **c)** $\int x(3-2x^2)\,dx$

752. a) $\int (2x-5)(4x^2-20x+7)\,dx$ **b)** $\int x(3x-10)(3x^3-15x^2+10)\,dx$ **c)** $\int x(2x-1)(4x^3-3x^2+8)^4\,dx$

753. a) $\int (7-71x)^{-2}\,dx$ **b)** $\int \frac{x^2}{(5-4x^3)^3}\,dx$ **c)** $\int \frac{4x-14}{(x^2-7x+6)^4}\,dx$

754. a) $\int \frac{x+4}{(x^2+8x-7)^3}\,dx$ **b)** $\int \frac{3x^2-x^4}{(x^5-5x^3+2)^5}\,dx$ **c)** $\int \frac{x(2-x)}{(3x^3-9x^2-22)^6}\,dx$

755. a) $\int \sqrt{2x-2}\,dx$ **b)** $\int \sqrt[3]{(3-2x)^2}\,dx$ **c)** $\int \sqrt[5]{x\left(\frac{1}{x}-5\right)}\,dx$

756. a) $\int 2x\sqrt{x^2-5}\,dx$ **b)** $\int x\sqrt{x^2+5}\,dx$ **c)** $\int (-x\sqrt{x^2-1})\,dx$

757. a) $\int (2x-1)\sqrt{7x^2-7x-1}\,dx$ **b)** $\int (4-x)\sqrt[4]{(x^2-8x+1)^3}\,dx$ **c)** $\int (1-x)\sqrt[5]{(x^2-2x+9)^2}\,dx$

758. a) $\int (5x-12)^{-\frac{1}{2}}\,dx$ **b)** $\int \frac{2x^2}{\sqrt[3]{1-x^3}}\,dx$ **c)** $\int \frac{5-2x}{\sqrt{(x^2-5x+6)^3}}\,dx$

759. a) $\int \frac{17-2x}{\sqrt{x^2-17x+1}}\,dx$ **b)** $\int \frac{x(6-x^2)}{\sqrt[3]{x^4-12x^2-9}}\,dx$ **c)** $\int \frac{x(2-x^3)}{\sqrt[4]{(5x^5-25x^2+9)^3}}\,dx$

760. a) $\int \frac{dx}{5+x}$ **b)** $\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$ **c)** $\int \frac{x}{1-x^2}\,dx$

761. a) $\int \frac{2x^3}{5-x^4}\,dx$ **b)** $\int \frac{4x^3+8x}{(x^2+2)^2}\,dx$ **c)** $\int \frac{x(x^2-3)}{(3-x^2)^2}\,dx$

762. a) $\int \frac{12x-5x^4-2}{2x^5-12x^2+4x+9}\,dx$ **b)** $\int \frac{x(x^6-x^4+1)}{3x^8-4x^6+12x^2+17}\,dx$ **c)** $\int \frac{-x^3(7x^3-18x^2+1)}{4x^7-12x^6+x^4-3}\,dx$

763. a) $\int_0^3 (3+x)^2\,dx$ b) $\int_1^4 (4x-2)^3\,dx$ c) $\int_0^1 (3-2x)^4\,dx$

764. a) $\int_2^3 x(x^2-1)^2\,dx$ b) $\int_1^2 x(1-2x^2)^3\,dx$ c) $\int_2^4 x(3x^2-4)^2\,dx$

765. a) $\int_2^3 (x-2)(x^2-4x+8)\,dx$ b) $\int_1^2 x(x-6)(x^3-9x^2+1)\,dx$ c) $\int_{-3}^{-2} x^2(1-2x)(3x^4-2x^3-9)\,dx$

766. a) $\int_{-3}^{-1} (3-2x)^{-3}\,dx$ b) $\int_2^1 \frac{x}{(1-2x^2)^2}\,dx$ c) $\int_3^4 \frac{x-3}{(x^2-6x+6)^2}\,dx$

767. a) $\int_1^2 \frac{x-1}{(x^2-2x-1)^2}\,dx$ b) $\int_0^1 \frac{2x-x^2}{(x^3-3x^2+8)^3}\,dx$ c) $\int_{-1}^0 \frac{x(1-2x)}{(4x^3-3x^2+8)^4}\,dx$

768. a) $\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx$ b) $\int_0^2 \sqrt[3]{8-4x}\,dx$ c) $\int_0^2 \sqrt[3]{(4x+1)^2}\,dx$

769. a) $\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx$ b) $\int_1^2 x\sqrt[3]{\left(\frac{4-7x^2}{3}\right)^2}\,dx$ c) $\int_1^2 x^2\sqrt[4]{\frac{15x^3-8}{7}}\,dx$

770. a) $\int_{-1}^2 (x+1)\sqrt{x^2+2x+3}\,dx$ b) $\int_0^1 (2-x)\sqrt[3]{x^2-4x+4}\,dx$ c) $\int_{-3}^{-2} (3-x)\sqrt[4]{x^2-6x-9}\,dx$

771. a) $\int_1^5 (2x-1)^{-\frac{1}{2}}\,dx$ b) $\int_1^2 \frac{x^3}{\sqrt[3]{24-x^4}}\,dx$ c) $\int_5^6 \frac{4-x}{\sqrt{(x^2-8x+15)^3}}\,dx$

772. a) $\int_2^3 \frac{1-x^2}{\sqrt{x^3-3x+1}}\,dx$ b) $\int_{-3}^{-2} \frac{x(3-x^2)}{\sqrt[3]{x^4-6x^2+9}}\,dx$ c) $\int_{-1}^0 \frac{x^3(2-5x)}{\sqrt[5]{(2x^5-x^4+4)^3}}\,dx$

773. a) $\int_3^5 \frac{dx}{x-1}$ b) $\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{1-x}$ c) $\int_{-3}^{-2} \frac{x}{1+x^2}\,dx$

774. a) $\int_0^1 \frac{5x^2}{3-2x^3}\,dx$ b) $\int_3^7 \frac{x(8-x^2)}{(x^2-8)^2}\,dx$ c) $\int_0^1 \frac{1+2x+x^2}{(x+1)^3}\,dx$

775. a) $\int_4^5 \frac{x(1-x-x^2)}{3x^4+4x^3-6x^2-8}\,dx$ b) $\int_{-2}^{-1} \frac{x^3(x-x^2-1)}{10x^6-12x^5+15x^4-30}\,dx$ c) $\int_3^4 \frac{x^4(5-4x-4x^3)}{3x^8+4x^6-6x^5-8}\,dx$

Vermischte Aufgaben

776. Die folgenden Formeln sind mit Hilfe der Kettenregel der Differenzialrechnung herzuleiten:

a) $\int f'(x)\,[f(x)]^n\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$ b) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$

Die nachstehenden Integrale sind durch Wahl von geeigneten Substitutionen zu berechnen:

777. a) $\int (2+3x)^2\,dx$ b) $\int (4x-1)^4\,dx$ c) $\int (ax+b)^n\,dx$ d) $\int (a-bx)^{-n}\,dx$

778. a) $\int \frac{4}{(1+2x)^3}\,dx$ b) $\int \frac{a}{(bx+c)^4}\,dx$ c) $\int \frac{dx}{(ax+b)^n} \quad (n \neq 1)$ d) $\int \frac{4x}{(1-x^2)^4}\,dx$

779. a) $\int \sqrt{1-2x}\,dx$ b) $\int \sqrt{(2-5x)^3}\,dx$ c) $\int \sqrt[3]{1-2x}\,dx$ d) $\int x\sqrt[3]{(x^2-1)^4}\,dx$

780. a) $\int \frac{6\,dx}{\sqrt{1-2x}}$ b) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{6x-5}}$ c) $\int \frac{4dx}{\sqrt[3]{ax+b}}$ d) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[n]{x^2-1}} \quad (n \neq 1)$

Bei den folgenden Aufgaben ist eine bestimmte Stammfunktion F durch Substitution und anschließendes Einsetzen einer Nebenbedingung zu bestimmen:

781. a) $f\colon x \mapsto \frac{3x-7}{3x^2-14x-2}$, F geht durch P(5, ln 3) **b)** $f\colon x \mapsto \frac{3x-7}{(3x^2-14x-2)^2}$, $F(5)=\frac{5}{6}$

782. a) $f\colon x \mapsto \frac{2x^2-1}{2x^3-3x}$, $F(2)=\ln 10$ **b)** $f\colon x \mapsto \frac{2x^2-1}{(2x^3-3x)^4}$, $F(1)=\frac{4}{3}$

Bei den folgenden Aufgaben ist der Flächeninhalt A der von f auf [a, b] begrenzten Fläche zu bestimmen:

783.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
f(x)	$(x+1)^2$	$(2x-5)^3$	$\sqrt[3]{1+x}$	$\sqrt[3]{(1+x)^2}$	$(2x-3)^{-2}$	$(2+x)^{-\frac{1}{2}}$	$2(3-4x)^5$	$3(2-x)^2$
a	0	3	2	2	−1	1	1	1
b	1	4	3	3	0	2	2	2

784.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
f(x)	$x(1+x^2)^2$	$x\sqrt{x^2+1}$	$\frac{x}{(x^2+1)^3}$	$\frac{x}{x^2-1}$	$x(1-x^2)^2$	$x\sqrt{1-x^2}$	$\frac{x}{1-x^2}$	$\frac{x}{(1-x^2)^2}$
a	1	0	1	2	3	0	$\frac{1}{4}$	−3
b	2	1	2	3	4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	−2

785. Die von f auf [a, b] begrenzte Fläche rotiert um die x-Achse. Das Volumen V ist zu berechnen:

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
f(x)	$x\sqrt{x^3+1}$	$\frac{x}{x^3+1}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^3}}$	$\frac{\sqrt{x}}{2-x^2}$	$\sqrt{x}\,(1+x^2)$	$\sqrt{x}\,\sqrt[3]{x^2-1}$	$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2+2}}$	$\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{17-x^4}}$
a	1	0	0	0	1	1	2	1
b	2	3	$\frac{1}{2}$	1	4	3	5	2

786. Die folgenden Relationen sind durch ihre Gleichungen gegeben und lassen sich jeweils in der Form $y=f(x)$ bzw. $y=g(x)$ schreiben. Man berechne **(1)** den eingeschlossenen Flächeninhalt A **(2)** das Volumen V_x bei Rotation um die x-Achse **(3)** das Volumen V_y bei Rotation um die y-Achse:

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
f(x)	$y^2=6x$	$y^2=3x$	$y^2=x$	$y^2=2x$	$y^2=7x$	$x^2=2y$	$x^2=4y-4$	$x^2=8y$
g(x)	$y^2=12-2x$	$y^2=12-x$	$y^2=3x-2$	$y^2=5x-6$	$x^2=7y$	$x^2=3y-4$	$x^2=2y$	$x^2=18-y$

3. Partialbruchzerlegung (Teilbruchzerlegung)

Mit Hilfe der im Abschnitt „Differenzialrechnung" erlernten Regel sollte es uns nicht schwer fallen, die erste Ableitung der Funktion $y = 3\ln\frac{x+1}{x+2}$ zu berechnen:

$$y' = 3\left[\frac{x+2}{x+1}\cdot\frac{(x+2)-(x+1)}{(x+2)^2}\right] = 3\left[\frac{x+2-x-1}{(x+1)(x+2)}\right] = \frac{3}{x^2+3x+2}$$

Wie hätten wir umgekehrt $\int\frac{3}{x^2+3x+2}\,dx$ bestimmt?

Grundintegral ist es keines, und auch die „Integration durch Substitution" bringt uns (wie man sich leicht überzeugen kann) der Lösung nicht näher.

In diesem Kapitel werden wir ein Verfahren kennen lernen, das es ermöglicht, gebrochenrationale Funktionen zu integrieren.

Die Kapitelüberschrift hat es schon verraten: Es handelt sich um die sogenannte **Partialbruchzerlegung**. Der Integrand wird in Teilbrüche zerlegt, die dann mit Hilfe der schon bekannten Formeln integriert werden.

Wir lernen hier also keine neuen Formeln der Integralrechnung, sondern ein **Verfahren zur Umformung des Integranden**.

Um den bei der Partialbruchzerlegung einzuschlagenden Lösungsweg zu begründen, sind Existenz- und Eindeutigkeitsbeweise heranzuziehen. Wir wollen uns darauf beschränken, die Methode zu demonstrieren.

1. Fall:

Der Grad des Zählers ist kleiner als der Grad des Nenners und der Nenner ist in Linearfaktoren zerlegbar, die reell und verschieden sind.

Rechenregel:

(1) Zerlegung des Nenners in Linearfaktoren.

(2) Zerlegung von $\frac{Z(x)}{N(x)}$ in Partialbrüche.

(3) Bestimmung der Konstanten (A, B, ...).

(4) Einsetzen der Konstanten und Integration.

Beispiel:

$$\int\frac{3}{x^2+3x+2}\,dx = ?$$

Lösung:

Der Zähler Z(x) ist eine Konstante. Mithin liegt also der Grad Null vor: $3 = 3x^0$. Die Gradzahl des Nenners N(x) ist 2, da der höchste vorkommende Exponent der Integrationsvariablen 2 ist. ⇒ Der Grad des Zählers ist kleiner als der Grad des Nenners:

(1) $x^2+3x+2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2} = -1,\ -2 \Rightarrow x^2+3x+2 = (x+1)(x+2)$

(2) $\frac{3}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$ Multiplikation mit dem Hauptnenner.

(3) $3 = A(x+2) + B(x+1)$

$x = -1$ und $x = -2$ werden eingesetzt.

$x = -1$ eingesetzt:

$3 = A(-1+2) + B(-1+1) \Leftrightarrow 3 = A \Leftrightarrow \mathbf{A = 3}$

$x = -2$ eingesetzt:

$3 = A(-2+2) + B(-2+1) \Leftrightarrow -3 = B \Leftrightarrow \mathbf{B = -3}$

(4) $\int\frac{3}{x^2+3x+2}\,dx = \int\left(\frac{3}{x+1} - \frac{3}{x+2}\right)dx = 3\ln|x+1| - 3\ln|x+2| + C$

$$\int\frac{3}{x^2+3x+2}\,dx = 3\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + C$$

Beispiel:

$\int \frac{3x^2+8x+2}{x^3+2x^2+x}\,dx = ?$

Lösung:

Wie man leicht erkennt, ist der Grad des Zählers kleiner als der Grad des Nenners.

(1) $x^3+2x^2+x=0 \Leftrightarrow x(x^2+2x+1)=0 \Leftrightarrow \ldots x_1=0,\ x_2=x_3=-1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^3+2x^2+x=x(x+1)^2$

(2) $\frac{3x^2+8x+2}{x(x+1)^2} + \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$ Multiplikation mit dem Hauptnenner.

(3) $3x^2+8x+2=A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx$
$x=0$ und $x=-1$ werden eingesetzt.
$x=0$ eingesetzt: $2=A \Leftrightarrow \mathbf{A=2}$
$x=-1$ eingesetzt: $-3=-C \Leftrightarrow \mathbf{C=3}$
$x=1$ eingesetzt: $13=4\cdot 2+2B+3 \Leftrightarrow \mathbf{B=1}$
($x=1$ ist eine beliebig gewählte Zahl.)

(4) $\int \frac{3x^2+8x+2}{x^3+2x^2+x}\,dx = \int\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{3}{(x+1)^2}\right)dx =$
$= 2\ln|x|+\ln|x+1|-\frac{3}{x+1}+C$

$$\int \frac{3x^2+8x+2}{x^3+2x^2+x}\,dx = \ln\left|x^2(x+1)\right| - \frac{3}{x+1} + C$$

2. Fall:

Der Grad des Zählers ist kleiner als der Grad des Nenners und der Nenner ist in Linearfaktoren zerlegbar, die reell aber nicht alle verschieden sind.

Rechenregel:

(1) Zerlegen des Nenners — vgl. nebenstehendes Beispiel.

(2) Zerlegung von $\frac{Z(x)}{N(x)}$ in Partialbrüche, wobei alle Potenzen $(x-x_1)^1$, $(x-x_1)^2$, $(x-x_1)^3$ usw. als Nenner zu berücksichtigen sind.

(3) Bestimmung der Konstanten (A, B, ...).

(4) Einsetzen der Konstanten und Integration.

Beispiel:

$\int \frac{x^3-x^2+2x+2}{x^2-1}\,dx = ?$

Lösung:

Der Grad des Zählers ist größer als der Grad des Nenners.

Polynomdivision:

$$\begin{array}{l} (x^3-x^2+2x+2):(x^2-1)=x-1 \\ \underline{-(x^3 \qquad -x)} \\ \quad -x^2+3x \\ \quad \underline{-(-x^2 \qquad +1)} \\ \qquad\quad 3x+1 \quad \text{Rest}^{1)} \end{array}$$

$\Rightarrow (x^3-x^2+2x+2):(x^2-1)=x-1+\frac{3x+1}{x^2-1}$

$\int \frac{x^3-x^2+2x+2}{x^2-1}\,dx = \int\left(x-1+\frac{3x+1}{x^2-1}\right)dx$

Um $\int \frac{3x+1}{x^2-1}\,dx$ zu berechnen, wird die Partialbruchzerlegung (1. Fall) durchgeführt und wir erhalten $\int \frac{3x+1}{x^2-1}\,dx = \int\left(\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)dx$

Somit ergibt sich folgendes Resultat:

$$\int \frac{x^3-x^2+2x+2}{x^2-1}\,dx = \frac{x^2}{2} - x + \ln\left|(x-1)^2(x+1)\right| + C$$

3. Fall:

Der Grad des Zählers ist größer als der Grad des Nenners oder der Grad des Zählers ist gleich dem Grad des Nenners.

Rechenregel:

Man teilt Zähler durch Nenner (Polynomdivision). Dadurch erhält man im Quotienten einzelne Summanden und einen Restbruch. Auf diesen ist — wenn die Nullstellen des Nenners allesamt reell sind — die in den ersten zwei Beispielen gewählte Vorgangsweise anzuwenden.

Es gibt noch den Fall, dass der Nenner **komplexe Nullstellen** enthält. Darauf soll hier aber nicht näher eingegangen werden.

[1]) Das Verfahren wird abgebrochen, wenn die höchste Potenz der Variablen im Rest **kleiner** ist als die höchste Potenz der Variablen im Divisor.

AUFGABEN

Die folgenden Aufgaben sind mittels Partialbruchzerlegung zu lösen:

787. a) $\int \frac{dx}{x^2-1}$ **b)** $\int \frac{x}{x^2-4}\,dx$ **c)** $\int \frac{x+2}{9-x^2}\,dx$

788. a) $\int \frac{dx}{(x+2)(x-3)}$ **b)** $\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)}$ **c)** $\int \frac{x^2+2x+5}{(x-1)(x-2)(x+3)}\,dx$

789. a) $\int \frac{-x+9}{x^2-2x-24}\,dx$ **b)** $\int \frac{5x-12}{x^2-5x+6}\,dx$ **c)** $\int \frac{x+5}{x^2-2x-3}\,dx$

790. a) $\int \frac{dx}{x^2(x-1)}$ **b)** $\int \frac{8-x}{(4-x)^2}\,dx$ **c)** $\int \frac{dx}{(x-7)^3}$

791. a) $\int \frac{3x-7}{x^2-6x+9}\,dx$ **b)** $\int \frac{2x-1}{x^2-2x+1}\,dx$ **c)** $\int \frac{5-2x}{x^2-4x+4}\,dx$

792. a) $\int \frac{dx}{x^3+8x^2+16x}$ **b)** $\int \frac{3x-4}{x^3-10x^2+25x}\,dx$ **c)** $\int \frac{x^2-2x+9}{x^3+12x^2+36x}\,dx$

793. a) $\int \frac{x^3}{x^2+6x+8}\,dx$ **b)** $\int \frac{1-5x^3}{x^2-3x+2}\,dx$ **c)** $\int \frac{x^3-2x^2}{x^2-2x-15}\,dx$

794. a) $\int \frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\,dx$ **b)** $\int \frac{x^5}{x^5-5x^3+4x}\,dx$ **c)** $\int \frac{2x^4-2x^2+1}{(x+1)^2(x-1)^2}\,dx$

795. a) $\int \frac{x^3-x^2-2x-3}{x^2-2x+1}\,dx$ **b)** $\int \frac{x^4-x^3-9x^2-26x+11}{x^2-4x-2}\,dx$ **c)** $\int \frac{x^4-3x^2+x-1}{(x-1)^2(x+2)}\,dx$

Vermischte Aufgaben

796. a) $\int \left(\frac{1}{x+3}+\frac{2}{x-3}\right)dx$ **b)** $\int \left(\frac{1}{x+3}+\frac{1}{(x+3)^2}\right)dx$ **c)** $\int \left(x+1+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right)dx$

797. a) $\int \frac{1}{x^2-4}\,dx$ **b)** $\int \frac{3x-1}{x^2-1}\,dx$ **c)** $\int \frac{x^2+9}{x^2-9}\,dx$

798. a) $\int \frac{x-2}{x^2-x}\,dx$ **b)** $\int \frac{x+3}{x^2+x}\,dx$ **c)** $\int \frac{6+4x}{x+x^2}\,dx$

799. a) $\int \frac{x-7}{x^2+x-2}\,dx$ **b)** $\int \frac{2x+3}{x^2-5x+6}\,dx$ **c)** $\int \frac{7x+8}{x^2+x-2}\,dx$

800. a) $\int \frac{6x+9}{x^3-9x}\,dx$ **b)** $\int \frac{dx}{x^3-2x^2}\,dx$ **c)** $\int \frac{2x+1}{x^3-4x}\,dx$

801. a) $\int \frac{5x+11}{x^2-3x-10}\,dx$ **b)** $\int \frac{x+7}{x^2-x-6}\,dx$ **c)** $\int \frac{3x-5}{x^2-4x+4}\,dx$

802. a) $\int \frac{x-3}{x^4-10x^2+9}\,dx$ **b)** $\int \frac{x^3+2x+3}{x^4-13x^2+36}\,dx$ **c)** $\int \frac{x^4+1}{x^5-45x^3+324x}\,dx$

803. a) $\int \frac{1}{(x-1)(x+2)^2}\,dx$ **b)** $\int \frac{x+2}{(x-1)(1-x)}\,dx$ **c)** $\int \frac{15x^2+26x-5}{x^3+3x^2-4x}\,dx$

804. a) $\int \frac{dx}{x^3-x^2}\,dx$ **b)** $\int \frac{3x^2-13x+16}{(x-2)^3}\,dx$ **c)** $\int \frac{x^3+4}{(1+x)^2(1-x)^2}\,dx$

805. a) $\int \frac{x}{(3x+1)^2}\,dx$ **b)** $\int \frac{x+1}{(2x+1)^2}\,dx$ **c)** $\int \frac{x+1}{(1-x)^3}\,dx$

4. Integration von Exponentialfunktionen und trigonometrischen Funktionen

Um die in der Überschrift genannten Funktionen zu integrieren, wollen wir auf die bisherigen Integrationsmethoden zurückgreifen. Die entsprechenden Formeln finden sich in der Außenspalte.

Beispiel:

Die nachstehenden Integrale sind zu berechnen:

a) $\int (e^x - 4^x)\,dx$ **b)** $\int e^{3x}\,dx$ **c)** $\int 5^{7x}\,dx$ **d)** $\int (\sin x + \cos x)\,dx$

e) $\int \frac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx$ **f)** $\int \sin 5x\,dx$ **g)** $\int \sin x\, e^{\cos x}\,dx$ **h)** $\int \tan x\,dx$

Lösung:

a) $\int (e^x - 4^x)\,dx = e^x - \frac{4^x}{\ln 4} + C$ ③, ⑦, ⑧

b) $\int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}\int \underbrace{3}_{f'(x)} \cdot e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x} + C$ ②, ⑨

↑ Korrekturfaktor

c) $\int 5^{7x} = \frac{1}{7}\int \underbrace{7}_{f'(x)} \cdot 5^{7x}\,dx = \frac{5^{7x}}{7\ln 5} + C$ ②, ⑩

↑ Korrekturfaktor

d) $\int (\sin x + \cos x)\,dx = -\cos x + \sin x + C$ ③, ⑪, ⑫

e) $\int \frac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + 1\right)dx = \tan x + x + C$ ③, ⑬, ①

f) $\int \sin 5x\,dx = \frac{1}{5}\int \underbrace{5}_{f'(x)} \cdot \sin 5x\,dx = -\frac{1}{5}\cos 5x + C$ ②, ⑭

↑ Korrekturfaktor

g) $\int \sin x\, e^{\cos x}\,dx = (-1)\int \underbrace{-\sin x}_{f'(x)}\, e^{\cos x} = -e^{\cos x} + C$ ②, ⑨

↑ Korrekturfaktor

h) $\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x\,dx}{\cos x} = (-1)\int \frac{\overbrace{-\sin x}^{f'(x)}}{\underbrace{\cos x}_{f(x)}}\,dx = -\ln|\cos x| + C$ ②, ⑥

↑ Korrekturfaktor

Zusammenstellung wichtiger trigonometrischer Formeln:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$\sin 2x = 2\sin x \cos x$ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

Die folgenden Formeln sind mit Hilfe der Differenzialrechnung herleitbar:

⑦ $\int e^x\,dx = e^x + C$

⑧ $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ a \in \mathbb{R}^+,\ a \neq 1$

⑨ $\int f'(x)e^{f(x)} = e^{f(x)} + C$

⑩ $\int f'(x)a^{f(x)} = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C,$ $a \in \mathbb{R}^+,\ a \neq 1$

Man beachte: Die Formeln ⑦ und ⑧ sind Spezialfälle von ⑨ und ⑩.

⑪ $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

⑫ $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

⑬ $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

⑭ $\int f'(x)\sin f(x) = -\cos f(x) + C$

⑮ $\int f'(x)\cos f(x) = \sin f(x) + C$

⑯ $\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} = \tan f(x) + C$

Man beachte: Die Formeln ⑪, ⑫ und ⑬ sind Spezialfälle von ⑭, ⑮ und ⑯.

AUFGABEN

Die nachstehenden Integrale sind zu berechnen:

806. a) $\int (2e^x - 10^x)\,dx$ **b)** $-\int t\,a^x\,dx$

807. a) $\int (e^t - 4^t)\,dt$ **b)** $\int (e^{\ln 3} - e^t)\,dt$

808. a) $\int (\sin^2 x + \cos^2 x)\,dx$ **b)** $\int (\sin x + \cos x)\,dx$

809. a) $\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx$ **b)** $\int \frac{6+e^4\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx$

810. a) $\int (5 + 5\tan^2 x)\,dx$ **b)** $\int e^{\ln 2}\sin x\,dx$

811. a) $\int (\cos 2t + 2\sin^2 t)\,dt$ **b)** $\int x\sqrt{\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha}\,d\alpha$

812. a) $\int \tan^2 x\,dx$ **b)** $\int \frac{\cos\omega}{\cos^2 t}\,d\omega$

Anleitung: $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

813. a) $\int \frac{5^x\cos^2 x + \cos^2 x + 1}{\cos^2 x}\,dx$ **b)** $\int (\tan 2x - \tan 2x\tan^2 x)\,dx$

814. a) $\int e^{3x}\,dx$ **b)** $\int x e^{-2x^2}\,dx$

815. a) $\int e^{\ln 2}e^{-x}\,dx$ **b)** $\int \frac{e^{3x-1}}{\sqrt{e^{3x+1}}}\,dx$

816. a) $\int 3^{4x+1}\,dx$ **b)** $\int (10^{2x} - 3^x + 1)\,dx$

817. a) $\int (x\cdot 4^{x^2-5} + e^{-x})\,dx$ **b)** $\int \left(\frac{2^{(x+1)^2}}{2^{x^2+1}} - \sqrt[3]{e^{5x-2}}\right)dx$

818. a) $\int \sin 4x\,dx$ **b)** $\int (-\cos^3 2x)\,dx$

819. a) $\int \frac{\sin(10-16x)}{\cos^2(8x-5)}\,dx$ **b)** $\int \frac{\cos 2x\,dx}{\sin x\cos x}$

820. a) $\int \tan\frac{x}{2}\,dx$ **b)** $\int \cos x\,e^{\sin x}\,dx$

821. a) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{\cos 2x}}\,dx$ **b)** $\int \frac{\sqrt{\tan 2x}}{\cos^2 2x}\,dx$

822. a) $\int \sin 2x\,dx$ **b)** $\int \left(\frac{x}{4^{-2x^2+1}} + \frac{1}{x^3}\cos^4\frac{2x^2+1}{x^2}\right)dx$

823. a) $\int e^{-t}\,dt$ **b)** $\int e^{4a+1}\,da$

824. a) $\int e^{ax+b}\,dx$ **b)** $\int a^{-kx+d}\,dx$

825. a) $\int \sin(4x-1)\,dx$ **b)** $\int \sin(\omega t + \varphi)\,dt$

826. a) $\int \cos(kx+d)\,dx$ **b)** $\int \cos(2-\beta t)\,dt$

827. a) $\int \sin^2 x\cos x\,dx$ **b)** $\int \cos^4 x\sin x\,dx$

828. a) $\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx$ **b)** $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\sin 2\sqrt{x}\,dx$

829. Eine zur y-Achse parallele Gerade soll die Fläche unterhalb der Funktion **a)** $f_1: x \mapsto e^x$ auf $[0, 1]$ **b)** $f_2: x \mapsto \sin x$ auf $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ im Verhältnis 1:2 teilen. Gleichung dieser Geraden?

830. Man berechne den Inhalt der in nebenstehender Figur rosa unterlegten Fläche zwischen der Sinuslinie und der blau eingezeichneten Geraden.

831. Man berechne den Inhalt der in nebenstehender Figur blau unterlegten Fläche zwischen der um eine Einheit verschobenen Sinuslinie und der blau eingezeichneten Geraden.

832. Wie groß ist die von den Funktionen $f: x \mapsto \sin x$ und $g: x \mapsto \frac{x}{2}$ eingeschlossene Fläche A_{fg}?

Anleitung: Man berechne die Schnittpunkte mit Hilfe des NEWTONschen Näherungsverfahrens auf drei Dezimalstellen genau.

833. f begrenzt auf [a, b] eine Fläche. Wie groß ist ihr Inhalt A?

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
f	$\sin \frac{x}{5}$	$\cos \frac{x}{6}$	$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right)$	$x \sin x^2$	e^{2x+3}	$x \cdot e^{x^2}$	2^{-x}	$x \cdot 10^{x^2}$
a	0	0	0	0	1	0	-1	0
b	π	π	$\frac{\pi}{2}$	π	2	1	0	1

834. Man berechne den Inhalt A_{fg} der zwischen f und g liegenden Fläche auf [a, b].

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
f	$\sin x$	$\sin x$	$\sin x$	$\cos x$	$\sin x$	$\cos x$	e^{1-x}	$e^{\frac{2x}{3}}$
g	$\cos x$	$-\cos x$	$\tan x$	$\tan x$	$\sin 2x$	$\cos \frac{x}{2}$	2^{2x-2}	3^{x-1}
a	0	0	0	0	0	$\frac{\pi}{4}$	0	0
b	2π	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	2	-1

835. Die durch $f: x \mapsto f(x)$ auf [a, b] begrenzte Fläche rotiert um die x-Achse. Wie groß ist das Volumen V des entstehenden Drehkörpers?

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
f	$e^{\frac{x}{2}}$	$\sqrt{\sin x}$	$\sqrt{\cos x}$	$\sqrt{\tan x}$	$\sqrt{x}\, e^{x^2}$	$\sin x \sqrt{\cos x}$	$x \sqrt{\sin x^3}$	$\frac{1}{\cos x}$
a	0	0	$\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{6}$
b	1	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	1	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

5. Partielle Integration

Durch die Formel

(17) $\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du + c$

wird $\int u\,dv$ in die Form $\int v\,du$ umgewandelt. Durch geschickte Wahl der Faktoren u und dv gelingt es oft, $\int v\,du$ leichter zu lösen als $\int u\,dv$.

Leider gibt es keine Regel über eine zum Erfolg führende Aufteilung des Integranden. Mitunter gibt es überhaupt keinen brauchbaren Ansatz.

Begründung für die Bezeichnung **„partielle“** Integration: Auf der rechten Seite von Formel (17) findet sich ein Integral. Die Integration von $\int u\,dv$ erfolgte teilweise (partiell).

Mit der „Integration durch Substitution“ und der „Partialbruchzerlegung“ konnten wir bereits zahlreiche Integrale lösen. Eine weitere wirkungsvolle Methode ist die sogenannte **„partielle Integration“**, die wir in diesem Kapitel besprechen wollen.

Beispiel:

a) $\int x\,e^x\,dx = ?$ **b)** $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = ?$ **c)** $\int e^x \sin x\,dx = ?$

Lösung:

Keines der Integrale ist mittels „Integration durch Substitution“ oder „Partialbruchzerlegung“ lösbar.

a) $\int \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{e^x\,dx}_{dv} = \ldots$ (17) u und dv wurden festgelegt. Nun gilt es, v und du zu ermitteln:

$$\left.\begin{array}{l}\int dv = v^{1)}\\ \int e^x\,dx = e^{x\,1)}\end{array}\right\} \Rightarrow v = e^x \qquad \left|\begin{array}{l} u = x \\ \frac{du}{dx} = 1 \Leftrightarrow du = dx\end{array}\right.$$

$$\ldots = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C$$

Bemerkung: Die Festlegung von $u = e^x$ und $dv = x\,dx$ hätte auf das **kompliziertere** Integral $\int x^2 e^x\,dx$ (Genauer: $\frac{1}{2}(x^2e^x - \int x^2e^x\,dx)$) geführt. Es bedarf also einer gewissen Übung, den Integranden so aufzuteilen, damit **einfachere** Integrale entstehen.

b) $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \int \underbrace{\ln x}_{u}\cdot\underbrace{\frac{dx}{x^2}}_{dv} = \ldots$ (17)

Nebenrechnung: $\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}^{1)} \Rightarrow v = -\frac{1}{x}$ $\qquad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow du = \frac{dx}{x}$

$$\ldots = \ln x\left(-\frac{1}{x}\right) - \int\left(-\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{x} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C = -\frac{1}{x}(\ln x + 1) + C$$

c) $\int \underbrace{e^x}_{u}\,\underbrace{\sin x\,dx}_{dv} = \ldots$ (17)

Nebenrechnung: $\int \sin x\,dx = -\cos x^{1)} \Rightarrow v = -\cos x$

$$\frac{du}{dx} = e^x \Leftrightarrow du = e^x\,dx$$

$$\ldots = e^x(-\cos x) - \int(-\cos x)\,e^x\,dx = -e^x\cos x + \int e^x \cos x\,dx = \ldots$$

Nun gilt es $\int \underbrace{e^x}_{u}\,\underbrace{\cos x\,dx}_{dv}$ zu ermitteln:[2)]

Nebenrechnung: $\int \cos x\,dx = \sin x^{1)} \Rightarrow v = \sin x$ $\quad \frac{du}{dx} = e^x \Leftrightarrow du = e^x\,dx$

Das auf Seite 149 gegebene Versprechen, den Unterschied zwischen $V_1 = \pi\int_a^b (f(x) - g(x))^2\,dx$ und $V_2 = \pi\int_a^b ((f(x))^2 - (g(x))^2)\,dx$ anzugeben, wird nun eingelöst!

$$V_1 = \pi\int_a^b (f(x) - g(x))^2\,dx$$

Und V_2 findet sich auf der nächsten Seite ...

1) Bei der Teilintegration lassen wir die Integrationskonstante unberücksichtigt.
2) u und v haben nun eine andere Bedeutung als vorhin.

Fassen wir — der besseren Übersicht wegen — die Ergebnisse der beiden Nebenrechnungen zusammen:

$$\int e^x \sin x\,dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx$$

$$\int e^x \cos x\,dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx$$

$$\Rightarrow \int e^x \sin x\,dx = -e^x \cos x + \left(e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx\right)$$

$$2\int e^x \sin x\,dx = -e^x \cos x + e^x \sin x$$

$$\int e^x \sin x\,dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x)$$

Zusatzfrage: Auf welche einzig mögliche andere Art kann man die Integranden $e^x \sin x$ und $e^x \cos x$ noch zerlegen?

S₁, S₂, f(x), g(x), a, b

$$V_2 = \pi\int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2)\,dx$$

AUFGABEN

Die folgenden Aufgaben sind mittels partieller Integration zu lösen:

836. a) $\int x e^{-x}\,dx$ b) $\int x^2 e^x\,dx$ c) $\int x \cdot 2^x\,dx$ d) $\int x^2 \cdot 3^{2x}\,dx$

837. a)[1] $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$ b)[1] $\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$ c) $\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx$ d) $\int \ln x\,dx$

838. a) $\int x \ln x\,dx$ b) $\int x^2 \ln x\,dx$ c) $\int x^3 \ln x\,dx$ d) $\int x^4 \ln x\,dx$

839. a) $\int x \sin x\,dx$ b) $\int x \cos 2x\,dx$ c) $\int x^2 \sin(-x)\,dx$ d) $\int x^2 \cos 3x\,dx$

840. a) $\int \sin^2 x\,dx$ b) $\int \cos^2 x\,dx$ c) $\int e^x \sin 2x\,dx$ d) $\int e^x \cos x\,dx$

841. a)[1] $\int \sin x \cos x\,dx$ b) $\int x^3 e^{4x}\,dx$ c) $\int e^x \sin^2 x\,dx$ d) $\int e^{3x} \cos \frac{x}{3}\,dx$

842. a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x\,dx$ b) $\int_0^{\pi} x^2 \sin x\,dx$ c) $\int_0^1 x(1-x)^{10}\,dx$ d) $\int_2^4 x^4 \ln(x^2-1)\,dx$

843. Die folgende Formel ist mit Hilfe der Produktregel der Differenzialrechnung herzuleiten:

$$\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du + C$$

844. Das unbestimmte Integral $\int x\sqrt{x+1}$ lösen zwei Schüler auf verschiedene Arten:

(1) mittels partieller Integration

$$\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{(x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx}_{dv} = \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}}_{v} - \int \underbrace{\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}}_{v} \cdot \underbrace{1\,dx}_{du} =$$

$$= \frac{2x}{3}\sqrt{(x+1)^3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{(x+1)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C =$$

$$= \frac{2x}{3}\sqrt{(x+1)^3} - \frac{4}{15}\sqrt{(x+1)^5} + C$$

(2) mittels Substitution

$$u = x+1 \Leftrightarrow x = u-1$$

$$\frac{du}{dx} = 1 \Leftrightarrow du = dx$$

$$\int (u-1) \cdot u^{\frac{1}{2}}\,du = \int (u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}})\,du =$$

$$= \frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{5}\sqrt{u^5} - \frac{2}{3}\sqrt{u^3} =$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{(x+1)^5} - \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + C$$

Was ist davon zu halten?

[1]) Dieses Integral kann man auch ohne partielle Integration lösen.

6. Numerische Integration

Unter **numerischer Integration** versteht man die näherungsweise zahlenmäßige (numerische) Berechnung bestimmter Integrale. Die numerische Integration gewann mit der Entwicklung programmierbarer Rechenautomaten an Bedeutung. Mit ihr lässt sich jedes **bestimmte Integral** mit jeder gewünschten Genauigkeit berechnen.

Zahlreiche Probleme der Technik und Wirtschaft führen auf relativ komplizierte Integrale, bei denen alle bisherigen Integrationsmethoden versagen:

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{25\cos^2 t + 9\sin^2 t}\,dt \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \qquad \int_0^s \sin\frac{u^2}{2}\,du$$

Um derartige Integrale **näherungsweise** zu berechnen gibt es verschiedene Methoden, von denen die sogenannte **SIMPSONsche Regel** eine der effizientesten[1] ist.

Die Grundidee stammt von Johannes KEPLER: Eine gegebene Funktion f auf [a, b] soll durch eine Polynomfunktion zweiten Grads ersetzt werden. KEPLER entwickelte schließlich die berühmte „Fassregel“:

(18) $$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$ **KEPLERsche Fassregel**

y=f(x)

a $\frac{a+b}{2}$ b

Beispiel:

Mit Hilfe der KEPLERschen Fassregel ist $\int_0^3 x^4\,dx$ zu berechnen!

Lösung:

$f(x) = x^4$, $a = 0$, $b = 3$ (Formel (18))

$$\int_0^3 x^4\,dx \approx \frac{3-0}{6}\left[f(0) + 4f\left(\frac{3}{2}\right) + f(3)\right] = \frac{1}{2}\left(0 + 4\cdot\frac{81}{16} + 81\right) = \ldots = 50{,}625$$

$$\int_0^3 x^4\,dx \approx 50{,}625$$

Um die Genauigkeit der KEPLERschen Fassregel nachzuprüfen, wollen wir dieses Beispiel analytisch berechnen:

$$\int_0^3 x^4\,dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^3 = \ldots = 48{,}6$$

Thomas SIMPSON (1710—1761) verfeinerte die KEPLERsche Fassregel, indem er [a, b] in eine **beliebige** Anzahl n gleich breiter Teilintervalle zerlegte ($n \in \mathbb{N}^*$).

Beispiel:

Ausgehend von der KEPLERschen Fassregel $S_1 = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$ ist das Intervall [a, b] nun in die beiden Teile $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ und $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ zu zerlegen und auf jedes Teilintervall die KEPLERsche Fassregel anzuwenden, d. h. S_2 ist zu ermitteln.

Lösung:

$$S_2 = \frac{\frac{a+b}{2} - a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] +$$
$$+ \frac{b - \frac{a+b}{2}}{6}\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 4f\left(\frac{a+3b}{4}\right) + f(b)\right] =$$
$$= \frac{b-a}{12}\left[f(a) + 4f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 4f\left(\frac{a+3b}{4}\right) + f(b)\right]$$

IOHANNES KEPPLERVS; Wieda Würtembergicus, Sacrae Caesar. Majest. atque Ordin. Sup. Austriae Mathematicus Insignis. Nat. A. 1571. d. 27. Decembr. Den Ratisbonae 1630. 15. Nov. Ex Collect. one Friderici Roth-Scholtzii Norimberg.

Johannes KEPLER (1571—1630), bedeutender deutscher Mathematiker und Astronom. Er verfasste unter anderem das Buch „Die Stereometrie des Fasses“. Von 1593 bis 1598 lebte KEPLER in Graz, danach in Prag und von 1614 bis 1627 in Linz.

[1]) effizient (lat.): wirksam (wirtschaftlich, leistungsfähig).

Das im vorigen Beispiel dargestellte Verfahren kann fortgesetzt werden und man erhält schließlich die allgemeine Darstellung der SIMPSONschen Regel:

(19) $$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{3n}\{f(a)+f(b)+4[f(x_1)+f(x_3)+\ldots+f(x_{n-1})]+ +2[f(x_2)+f(x_4)+\ldots+f(x_{n-2})]\}\quad (n\in\mathbb{N}_g\backslash\{0\})$$

Sicherlich erscheint Formel (19) auf den ersten Blick recht verwirrend. Die Sache ist allerdings wirklich nicht schwierig. Ein Blick auf das folgende Beispiel zeigt die Anwendung in übersichtlicher Form.

Beispiel:

$\int_0^3 x^4\,dx$ ist für **a)** $n = 4$ **b)** $n = 10$ mit Hilfe der SIMPSONschen Regel zu ermitteln.

Lösung:

a) $\frac{b-a}{n} = \frac{3}{4} = 0{,}75$

x_i	$f(x_i) = x_i^4$		
$a = x_0 = 0$	0		
$x_1 = 0{,}75$		0,31641	
$x_2 = 1{,}5$			5,0625
$x_3 = 2{,}25$		25,6289	
$b = x_4 = 3$	81		
	$81 = \sum_1$	$25{,}9453 = \sum_2$	$5{,}0625 = \sum_3$

$\sum_1$	= 81
$4\sum_2$	= 103,7813
$2\sum_3$	= 10,125
$\sum$	= 194,9063

$$\int_0^3 x^4\,dx \approx \frac{b-a}{3n}\cdot\sum = \frac{1}{4}\cdot 194{,}9063 = 48{,}73$$

$$\int_0^3 x^4\,dx \approx 48{,}73$$

b) $\frac{b-a}{n} = \frac{3}{10} = 0{,}3$

x_i	$f(x_i) = x_i^4$		
$a = x_0 = 0$	0		
$x_1 = 0{,}3$		0,0081	
$x_2 = 0{,}6$			0,1296
$x_3 = 0{,}9$		0,6561	
$x_4 = 1{,}2$			2,0736
$x_5 = 1{,}5$		5,0625	
$x_6 = 1{,}8$			10,4976
$x_7 = 2{,}1$		19,4481	
$x_8 = 2{,}4$			33,1776
$x_9 = 2{,}7$		53,1441	
$b = x_{10} = 3{,}0$	81		
	$81 = \sum_1$	$78{,}3189 = \sum_2$	$45{,}8784 = \sum_3$

$\sum_1$	= 81
$4\sum_2$	= 313,2756
$2\sum_3$	= 91,7568
$\sum$	= 486,0324

$$\int_0^3 x^4\,dx \approx \frac{b-a}{3n}\cdot\sum = \frac{1}{10}\cdot 486{,}0324 = 48{,}603$$

$$\int_0^3 x^4\,dx \approx 48{,}603$$

AUFGABEN

Bei den folgenden Aufgaben sind die gegebenen Integrale näherungsweise auf drei gültige Stellen zu berechnen.

845. a) $\int_0^2 (4-x)^2\,dx,\ n=4$ **b)** $\int_{-5}^{10} (4-x^2)\,dx,\ n=20$ **c)** $\int_1^3 \sqrt{x^3-1}\,dx,\ n=6$ **d)** $\int_0^2 e^x\,dx,\ n=4$

846. a) $\int_4^8 \sqrt{x-4}\,dx,\ n=8$ **b)** $\int_1^6 \frac{dx}{x^2},\ n=10$ **c)** $\int_0^8 \sqrt{x}\,dx,\ n=8$ **d)** $\int_2^3 \ln x\,dx,\ n=6$

847. a) $\int_0^3 \sqrt{1+x^3}\,dx,\ n=2$ **b)** $\int_0^3 \sqrt{1+x^3}\,dx,\ n=16$ **c)** $\int_0^2 e^{x^2}\,dx,\ n=8$ **d)** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x^2+\sin x}\,dx,\ n=12$

848. a) $\int_2^4 x\ln x\,dx,\ n=6$ **b)** $\int_1^3 \ln x\,dx,\ n=4$ **c)** $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx,\ n=4$ **d)** $\int_1^3 e^{-x^2}\,dx,\ n=20$

Vermischte Aufgaben

849. a) Die numerische Integration der Funktion $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ mit Hilfe der KEPLERschen Fassregel baut auf der Idee auf, $f(x)$ durch eine Polynomfunktion zweiten Grads $p(x)=ux^2+vx+w$ zu ersetzen und anschließend diese zu integrieren:

$$f(x)\approx p(x)\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b p(x)\,dx = S_1$$

Man zeige: $\int_a^b p(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left[2u(a^2+ab+b^2)+3v(a+b)+6w\right]$

b) In der nebenstehenden Figur ist angedeutet, wie die Polynomfunktion zweiten Grads zu verlaufen hat: durch die Punkte $P(a, f(a))$, $Q\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$, $R(b, f(b))$.
Jetzt können die drei Koeffizienten u, v und w bestimmt werden:

(1) $p(a)=f(a)$

(2) $p\left(\frac{a+b}{2}\right)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

(3) $p(b)=f(b)$

$p(x)$ wird nun durch ux^2+vx+w ersetzt:

(1) $ua^2+va+w=f(a)$

(2) $u\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+v\left(\frac{a+b}{2}\right)+w=f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

(3) $ub^2+vb+w=f(b)$

Es ist zu zeigen, dass aus dem Gleichungssystem (1) bis (3) folgt:

$$u=\frac{2}{(a-b)^2}\left[f(a)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

$$v=\frac{-1}{(a-b)^2}\left[(a+3b)\,f(a)-4(a+b)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right)+(3a+b)\,f(b)\right]$$

$$w=\frac{1}{(a-b)^2}\left[(ab+b^2)\,f(a)-4abf\left(\frac{a+b}{2}\right)+(a^2+ab)\,f(b)\right]$$

c) Die KEPLERsche Fassregel (18) ist herzuleiten, indem die in **b)** gefundenen Koeffizienten in **a)** eingesetzt werden.

850. Die SIMPSONsche Regel (19) hat gegenüber der KEPLERschen Regel den Vorteil der größeren Genauigkeit. Allerdings muss man diese Verbesserung um den Preis eines höheren Rechenaufwands erkaufen. Das Intervall [a, b], über dem wir f(x) integrieren wollen, wird in **beliebig viele** Teile zerlegt. Die Teilungspunkte, die wir dadurch auf der x-Achse erhalten, nennen wir $x_0(=a), x_2, x_4, x_6, \ldots, x_n(=b), (n \in \mathbb{N}_g)$.

Auf **jedes** dieser Teilintervalle wird nun die KEPLERsche Regel (18) angewendet, d. h. wir müssen die Mittelpunkte von $[x_0, x_2], [x_2, x_4], [x_4, x_6], \ldots, [x_{n-2}, x_n]$ bestimmen. Wir nennen sie: $x_1, x_3, x_5, \ldots, x_{n-1}$. Unser ursprüngliches Intervall ist also in $\frac{n}{2}$ gleich lange Teilintervalle der Länge $\frac{2(b-a)}{n}$ zerlegt worden (vgl. nebenstehende Figur).

y = f(x)
a = x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 . . . x_{n-2} x_{n-1} x_n = b

a) Für das Intervall $[x_0, x_2]$ ist zu zeigen: $\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{3n}[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)]$.

b) Das Verfahren in **a)** wird auf alle übrigen Intervalle übertragen. Wir schreiben der Übersicht wegen unsere Ergebnisse systematisch auf:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{3n}\{f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2) \qquad \}$$

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{3n}\{ \qquad f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4) \qquad \}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad . \qquad \ddots$$

$$\int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{3n}\{ \qquad f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx ?$$

Die folgenden Integrale sind nach der SIMPSONschen Regel für n = 6 zu ermitteln:

851. a) $\int_1^3 \sqrt{x^3-1}\,dx$ **b)** $\int_1^2 2^{\ln x}\,dx$ **c)** $\int_0^\pi e^{\sin x}\,dx$ **d)** $\int_1^2 \frac{\sin x}{x}\,dx$

852. a) $\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} \frac{\cos x}{x}\,dx$ **b)** $\int_1^2 \frac{e^x}{x}\,dx$ **c)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$ **d)** $\int_2^4 x \sin x\,dx$

853. Der Graph der Funktion $y = \frac{1}{x}$ rotiert im Intervall [1, a], a > 1 um die x-Achse und erzeugt den in nebenstehender Figur dargestellten blauen Trichter.

a) Man berechne die Fläche A des Mittelschnitts.

b) Wie groß ist das Trichtervolumen V ?

c) Es zu zeigen: $\lim_{a\to\infty} A(a) = \infty$, $\lim_{a\to\infty} V(a) = \pi$

$y = \frac{1}{x}$
A
1
a
V

7. Uneigentliche Integrale

Biby, der junge Black Retriever, trägt seinen Knochen ins Wohnzimmer, sucht eine passende Stelle, um dort mit den Vorderpfoten ein „Erdloch" zu scharren. Er legt den Knochen „hinein" und schiebt mit dem Maul die nicht vorhandene Erde darüber, den Rest besorgen die Hinterläufe. Biby, nun sichtlich zufrieden, trottet davon. Der Knochen liegt auf dem zerkratzten Parkett.

Verhaltensforscher können heute diese Merkwürdigkeit erklären. Es handelt sich dabei um ein angeborenes Verhaltensprogramm, das bei gegebenen Umweltbedingungen stur abläuft. Pech für Biby, wenn er den Zimmerboden für eine Wiese hält. Seine Vorfahren waren kaum gescheiter als er, nur gab es damals keine Parkettböden und somit nicht derlei Probleme.

Und weil uns so etwas ja nicht passieren kann und wir überdies doch vernunftbegabte Wesen sind, rechnen wir gleich ein Beispiel.

Bevor man ein Werkzeug einsetzt, sollte man sich von seiner Anwendbarkeit überzeugen (vgl. nebenstehendes Beispiel).

Beispiel:

Man berechne die Fläche A unterhalb der Kurve $y = \frac{1}{x^2}$ im Intervall $[-1, +1]$.

Lösung:

$$A = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{-1}^{+1} x^{-2}\,dx = \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_{-1}^{+1} = -\left[\frac{1}{x}\right]_{-1}^{+1} = -(1-(-1)) = -2$$

Diese Lösung hat leider einen Schönheitsfehler: Sie ist falsch.

Denn die Kurve $y = \frac{1}{x^2}$ verläuft ausschließlich über der x-Achse. Somit muss der darunter liegende Flächeninhalt positiv sein.

Offenbar ist uns beim vorigen Beispiel ein Fehler unterlaufen, aber welcher? Wir haben doch wie bisher gerechnet. Nun, sagen wir es so: Wir haben den uns schon gut bekannten Integrationsalgorithmus richtig angewandt, aber leider auf das „falsche“ Problem. Es ist uns nämlich entgangen, dass der Integrand $y = \frac{1}{x^2}$ im Intervall $[-1, +1]$ an der Stelle $x = 0$ eine Polstelle hat und deshalb unendlich groß wird.

Wenn bei einem Integral also irgendein Bestandteil unendlich groß ist, so sprechen wir von einem **uneigentlichen Integral**. Derartige Integrale sind ein bisschen vorsichtiger zu behandeln als **eigentliche Integrale**. Man darf sich hier nicht einfach auf das Anwenden der Integrationsregeln beschränken. Die Beherrschung der Rechenregeln ist eben eine **notwendige** aber nicht **hinreichende** Bedingung bei der Lösung mathematischer Probleme. Aber wir haben vorhin den Integrationsalgorithmus so stur ablaufen lassen wie Biby seine programmierte Knochenvergrabung.

Beispiel:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3} = ?$$

Lösung:

Es handelt sich dabei um ein **Integral**, das an der oberen Grenze **uneigentlich** der **1. Art** ist.

Wir haben uns dabei den folgenden Grenzübergang vorzustellen:

$$\lim_{z\to\infty} \int_1^z \frac{dx}{x^3} = \lim_{z\to\infty} \int_1^z x^{-3}\,dx = \lim_{z\to\infty} \left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_1^z = \lim_{z\to\infty} \left[\frac{-1}{2x^2}\right]_1^z =$$

$$= \lim_{z\to\infty} \left[\frac{-1}{2z^2} - \left(\frac{-1}{2\cdot 1}\right)\right] = \underbrace{\lim_{z\to\infty} \frac{-1}{2z^2}}_{=0} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Der Grenzwert existiert also. Auch der Integrand war über jedem Intervall $[1, z]$ integrierbar (vgl. nebenstehende Definition). Somit darf der angegebene Ausdruck $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3}$ durch $\frac{1}{2}$ ersetzt werden: $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2}$.

Bemerkung: In der Praxis kürzt man dieses Rechenverfahren ab.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \int_1^{\infty} x^{-3}\,dx = \left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_1^{\infty} = \lim_{z\to\infty} \left(\frac{-1}{2z^2}\right) - \left(\frac{-1}{2\cdot 1}\right) = \frac{1}{2}$$

Definition:

Ein bestimmtes Integral, bei dem mindestens eine der beiden **Integrationsgrenzen unendlich** (uneigentlich) ist, heißt **uneigentliches Integral 1. Art**. Es wird als Grenzwert erklärt:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{z\to\infty} \int_a^z f(x)\,dx$$

Diese Definition ist nur dann sinnvoll, wenn

(1) dieser Grenzwert existiert und

(2) $f(x)$ über $[a, z]$ integrierbar ist.

Nicht alle uneigentlichen Integrale sind so „zahm“ wie das nebenstehende:

$\int_0^{\infty} \sin x\,dx$ existiert nicht.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \infty$$

Bei bestimmten (eigentlichen) Integralen haben wir bisher immer beide Integrationsgrenzen einfach in die Stammfunktion eingesetzt. Das vorige Beispiel zeigt uns, dass wir jetzt die Stammfunktion an der Uneigentlichkeitsstelle einem Grenzübergang unterwerfen müssen.

Der Aufmerksame vermutet richtig: Es gibt auch **uneigentliche Integrale 2. Art.**

Beispiele für uneigentliche Integrale, die in der Physik und Technik eine bedeutende Rolle spielen:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx,\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx,\quad \int_0^{\infty} x^{n-1}e^{-x}\,dx,$$

$$\int_0^{\infty} \sin x^2\,dx,\quad \int_0^{\infty} \cos x^2\,dx$$

Sie sind analytisch (elementar) nicht lösbar, haben aber alle einen endlichen Grenzwert.

Definition:

Ein bestimmtes Integral, bei dem der **Integrand** an mindestens einer der beiden Integrationsgrenzen **unendlich** (uneigentlich) ist, heißt **uneigentliches Integral 2. Art** (d. h. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$).

Es wird als Grenzwert erklärt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{z\to a}\int_z^b f(x)\,dx^{1)}$$

Diese Definition ist nur dann sinnvoll, wenn

(1) dieser Grenzwert existiert und

(2) $f(x)$ über $[z, b]$ integrierbar ist.

Beispiel:

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = ?$$

Lösung:

Für den Integranden gilt

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$, d. h. das **Integral** wird an der unteren Integrationsgrenze **uneigentlich der 2. Art.**

Wir berechnen den Grenzwert:

$$\lim_{z\to 0}\int_z^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{z\to 0}\int_z^4 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \lim_{z\to 0}\left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_z^4 =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left[2\sqrt{x}\right]_z^4 = \lim_{z\to 0}\left[2\sqrt{4} - 2\sqrt{z}\right] = 4 - \underbrace{\lim_{z\to 0} 2\sqrt{z}}_{=0} = 4$$

Da die Forderungen **(1)** und **(2)** (vgl. Außenspalte) erfüllt sind, gilt:

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 4$$

Bemerkung: Im Allgemeinen kann man die obige Rechnung auch einfacher anschreiben.

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_0^4 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_0^4 = \left[2\sqrt{x}\right]_0^4 = 2\sqrt{4} - \lim_{z\to 0} 2\sqrt{z} = 4$$

Auch hier genügt es eigentlich, an der kritischen Integrationsgrenze einen Grenzübergang durchzuführen. Diesen erspart man sich jedoch nicht, wenn die Unstetigkeitsstelle innerhalb des Integrationsintervalls liegen sollte. Jetzt wird auch klar, warum unser eingangs erwähntes Beispiel $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2} = ?$ nicht so einfach zu berechnen ist.

Die kritische (unstetige) Stelle $x = 0$ liegt hier **innerhalb** (und **nicht wie** in den zwei vorigen Beispielen **an der Grenze**) des Integrationsbereichs. In diesem Fall muss man das Integral geeignet zerteilen, d. h. man trennt das Integrationsintervall an sämtlichen Unstetigkeitsstellen auf, so dass aus dem uneigentlichen Integral eine Summe von uneigentlichen Integralen der 2. Art wird. Ähnliches gilt für Integrale, die an beiden Integrationsgrenzen uneigentlich der 1. Art sind.

Folgende Regel sollte man sich also merken:

Der Wert eines beliebigen uneigentlichen Integrals wird bestimmt, indem es derart in Summanden zerlegt wird, dass jedes Teilintegral entweder uneigentlich der 1. Art oder der 2. Art ist.

[1] Es gilt dabei $z > a$. Ist $\int_a^b f(x)\,dx$ hingegen an der oberen Grenze b **uneigentlich der 2. Art**, so muss $z < b$ gelten!

Beispiel:

Man berechne **a)** $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ **b)** $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2}$

Lösung:

a) Das uneigentliche Integral 1. Art wird in zwei Teile zerlegt, z. B.

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

Wir hätten auch an einer anderen Stelle das Integral aufteilen können. Wichtig ist nur, dass die übrig bleibenden Teilintegrale jeweils an höchstens **einer** Integrationsgrenze uneigentlich sind.

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_{-\infty}^{0} + [\arctan x]_{0}^{\infty} =$$

$$= [\arctan 0 - \underbrace{\lim_{s \to -\infty} \arctan s}_{=-\frac{\pi}{2}}] + [\underbrace{\lim_{t \to \infty} \arctan t}_{=+\frac{\pi}{2}} - \arctan 0] =$$

$$= 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - 0 = \pi$$

Man schreibt auch kürzer:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{t \to \infty} \arctan t - \lim_{s \to -\infty} \arctan s =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$$

Wichtig ist dabei, dass beide Grenzübergänge gesondert behandelt werden.

b) Das uneigentliche Integral 2. Art **muss** an der Stelle $x = 0$ aufgetrennt werden:

$$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2} + \int_{0}^{+1} \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{1}{x}\right]_{0}^{1} =$$

$$= \left[\underbrace{\lim_{s \to 0}\left(-\frac{1}{s}\right)}_{+\infty} - \left(\frac{-1}{-1}\right)\right] + \left[\frac{-1}{1} - \underbrace{\lim_{t \to 0}\left(\frac{-1}{t}\right)}_{-\infty}\right] =$$

$$= +\infty - 1 - 1 + \infty = +\infty > 0$$

Die Fläche unterhalb der Kurve ist also doch positiv, allerdings unendlich groß. Das Integral **divergiert**.

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2} = +\infty$$

Im Allgemeinen gelten für uneigentliche Integrale auch sämtliche Rechenregeln, die für eigentliche Integrale erklärt wurden: Summenregel, Substitution, Partialbruchzerlegung, partielle Integration. Man hat aber immer darauf zu achten, ob auch innerhalb der Rechnung sämtliche Grenzwerte existieren, andernfalls versagen die Regeln.

Auf Seite 139 wurden die Formeln für die Ableitung von Arkusfunktionen dargestellt.

Aus $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x| < 1)$ folgt

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$$

Aus $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ folgt

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C.$$

Bei all unseren Betrachtungen wird ein uneigentliches Integral als Grenzwert einer Folge (eigentlicher Integrale) aufgefasst. Darum ist es sinnvoll, von der **Konvergenz eines uneigentlichen Integrals** (vgl. nebenstehendes Beispiel) zu sprechen — oder aber auch von seiner **Divergenz**, z. B. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, dx = \infty$.

Sämtliche uneigentlichen Stellen eines Integrals müssen gesondert behandelt werden.

Über Unstetigkeitsstellen darf man nicht „hinweg integrieren":

Das Integral muss an der unstetigen Stelle s des Integranden zerteilt werden.

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{s} f(x)\,dx + \int_{s}^{b} f(x)\,dx$$

AUFGABEN

Die folgenden Integrale sind zu berechnen:

854. a) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^4}$ **b)** $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ **c)** $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ **d)** $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

855. a) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2}$ **b)** $\int_1^{\infty} \sqrt{x^3}\,dx$ **c)** $\int_1^{\infty} x^{-\frac{1}{3}}\,dx$ **d)** $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x}$

856. a) $\int_0^{2} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ **b)** $\int_0^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ **c)** $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2}$ **d)** $\int_0^{4} \frac{2}{x\sqrt{x}}\,dx$

857. a) $\int_{-2}^{3} \frac{dx}{x^2}$ **b)** $\int_0^{10} \frac{dx}{x^2}$ **c)** $\int_0^{1} \frac{dx}{x}$ **d)** $\int_0^{32} \frac{dx}{\sqrt[5]{x^3}}$

858. a) $\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$ **b)** $\int_0^{2} \frac{dx}{x-1}$ **c)** $\int_2^{\infty} \frac{2}{x^3}\,dx$ **d)** $\int_1^{4} \frac{2x-3}{x^2-3x}\,dx$

859. a) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ **b)** $\int_4^{\infty} \left(x^{-\frac{1}{2}}+\frac{3}{x^4}\right)dx$ **c)** $\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ **d)** $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

860. a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan\varphi\,d\varphi$ **b)** $\int_0^{\infty} \sin x\,dx$ **c)** $\int_{-1}^{+1} x^{-\frac{2}{3}}\,dx$ **d)** $3\int_0^{9} x^{-\frac{1}{2}}dx$

861. a) $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$ **b)** $\int_0^{1} \ln x\,dx$ **c)** $\int_1^{\infty} \left(\frac{2}{\sqrt[5]{x}}+x^{-\frac{4}{3}}\right)dx$ **d)** $\int_{-1}^{4} \frac{dx}{x^2}$

862. Man berechne allgemein:

a) $\int_0^{\infty} a^x\,dx \quad (a > 0)$ **b)** $\int_0^{a} \frac{dx}{\sqrt{x}} \quad (a > 0)$ **c)** $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^n}$ **d)** $\int_0^{1} \frac{dx}{x^n}$

THINK THINK THINK ThInk THINK THINK THINK ThInk THINK ThInk THINK ThInk THINK

THINK ThInk THINK THINK THINK ThInk THINK

863. $U_1 =$ Menge aller uneigentlichen Integrale 1. Art

$U_2 =$ Menge aller uneigentlichen Integrale 2. Art

$U =$ Menge aller uneigentlichen Integrale

a) Was bedeuten die Aussagen **(1)** $U = U_1 \cup U_2$ und **(2)** $U_1 \cap U_2 = \{\ \}$ in Worten?

b) Sind die Aussagen **(1)** bzw. **(2)** wahr? Die Antwort ist jeweils zu beweisen.

8. Problemstellungen der Physik und Technik

Elektrotechnik / Elektronik

864. Durch einen Kupferdraht ($R = 2{,}5\ \Omega$) fließt ein Wechselstrom $i(t) = 1{,}2 \sin(100\,\pi t)$ A. Wie groß ist die Wärmeenergie $W = \int\limits_0^T i^2(t)\,R\,dt$, die während einer Periodendauer T frei wird?

865. Es ist das elektrische Potenzial U einer kreisförmigen Leiterplatte (mit der Ladung $Q = 1\,\mu C$) bezüglich des Punkts P zu bestimmen (vgl. nebenstehende Figur). $r = 1\,dm$, $d = 20\,cm$

Anleitung: $dU = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 l}$, $dQ = \sigma dA$, $\sigma = \frac{Q}{\pi r^2}$ ..... Flächenladungsdichte, $\varepsilon_0 = 8{,}8542 \cdot 10^{-12}$ As/Vm.

866. a) Es ist der OHMsche Widerstand R_1 einer massiven Kupferelektrode der Form eines Kegelstumpfs mit kugelförmigen Elektrodenflächen (vgl. nebenstehende Figur) allgemein zu bestimmen.

Anleitung: $dR = \frac{\rho dr}{A}$, $A = 2\pi r^2 (1 - \cos\alpha)$ ...... Fläche einer Kugelschale mit dem Öffnungswinkel 2α

b) Welchen Wert nimmt R_1 für $r_1 = 20\,mm$, $r_2 = 30\,mm$, $\alpha = 30°$, $\rho_{Cu} = 0{,}0176\ \Omega\,mm^2/m$ an?

c) Welchen Radius r_0 weist eine volumsgleiche und zylinderförmige Elektrode mit der Höhe $h = r_2 - r_1$ auf?

d) Wie groß ist der OHMsche Widerstand R_2 der zylindrischen Kupferelektrode aus Aufgabe **c)**? Wie groß ist dabei der prozentuelle Fehler p gegenüber R_1?

Maschineningenieurwesen / Mechatronik

867. a) Der Kasten moderner Elektrolokomotiven stützt sich über Federn auf sogenannte Drehgestelle ab, die unter anderem die Motoren und Achsen enthalten.

Bei der thyristorgesteuerten Lokomotive der ÖBB-Reihe 1044 sind insgesamt 8 derartige Kastenfedern vorhanden, auf die sich die Gesamtmasse des Kastens von $m = 44{,}8\,t$ aufteilt. Durch den auf sie entfallenden Gewichtskraftanteil F wird jede Feder — bei still stehendem Fahrzeug — um einen Federweg $x = 90\,mm$ zusammen gedrückt. Es ist die Federkonstante k zu berechnen.

b) Wie viel Arbeit wird bei der Kontraktion der Kastenfeder verrichtet?

Anleitung: $W = \int\limits_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx$

c) Wodurch wird die in **b)** ermittelte Federarbeit W im nebenstehenden Diagramm veranschaulicht?

868. In allen Industriesaaten gibt es heute bereits gesetzlich vorgeschriebene Abgastests für die Typenzulassung neuerer Fahrzeuge, um zu erreichen, dass die emittierten Schadstoffe bestimmte Grenzwerte nicht überschreiten. Dabei wird das Fahrzeug in einer Prüfzelle den simulierten Bedingungen eines praktischen Fahrbetriebs (Trägheitskraft, Roll- und Luftwiderstand usw.) unterworfen.

Um repräsentative Abgaswerte zu erhalten, müssen auch die Geschwindigkeiten auf dem Rollenprüfstand mit jenen auf der Straße überein stimmen.

Hierzu wurde in Österreich der Fahrzeugzyklus FTP 75 herangezogen (vgl. obige Figur), der im Geschwindigkeits- und Beschleunigungsverlauf möglichst gut mit der Fahrweise im normalen Straßenverkehr überein stimmt.

a) Angenommen die Geschwindigkeit $v(t)$ (in m/s) liegt als Funktion der Zeit t vor $(0\,s \leqslant t \leqslant 2477\,s)$. Wie lang ist dann die Zykluslänge l, d. h. welche Strecke würde das Fahrzeug auf der Straße zurück legen?

b) Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit $\overline{v}$, wenn das 10-Minuten-Intervall, in dem der Motor abgestellt ist, unberücksichtigt bleibt?

869. Instrumentierter Kerbschlagbiegeversuch

Der sogenannte **Kerbschlaghammer** dient in der Werkstoffprüfung zur Messung der „Kerbschlagzähigkeit". Dabei wird eine gekerbte — im Pendelschlagwerk frei aufliegende — Probe durch eine einmalige Schlagbeanspruchung gebrochen. Die beim Durchbrechen der Werkstoffprobe aufgenommene Schlagarbeit A_V vermindert die Bewegungsenergie (kinetische Energie) des Schlaghammers und entspricht — bezogen auf den Kerbquerschnitt — der Kerbschlagzähigkeit.

a) In Hinblick auf die nebenstehende Figur ist die aufgenommene Schlagarbeit A_V allgemein zu bestimmen.

Anleitung: $dA_V = G\,dh \ldots$

b) Bei einem Kerbschlagbiegeversuch an einer ermüdungsangerissenen Probe wurde die Schlagkraft F in Abhängigkeit des Hammerweges s aufgenommen:

s in mm	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5
F in kN	0	6	10,9	11,4	10,8	9,6	8	6,4	4,9	3,8	2,9	2,2	1,7	1,3

s in mm	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10	10,5	11	11,5	12	12,5	13	13,5	14
F in kN	1,1	0,9	0,7	0,6	0,5	0,4	0,35	0,26	0,23	0,2	0,17	0,13	0,1	0,08	0,06

Technische Versuchs- und Forschungsanstalt der Technischen Universität Wien
Leiter: o. Prof. Dipl. Ing. Dr. sc. techn. T. Varga

Werkstoff :
Proben-Nr. :
Prueftemp. : –20 Grad C
Av : 41.8 [J]
A max : 11.6 [J]
P max : 11444 [N]

Bild: Kraft - Durchbiegungsdiagramm des instrumentierten Kerbschlagbiegeversuches an einer ermüdungsangerissenen Probe. Schlaggeschwindigkeit v = 0.1 [m/s]

Nicht nur die Fläche A_V unterhalb der Kurve $F(s)$, sondern auch ihr Verlauf ist äußerst informativ: So gibt z. B. die Steilheit der Kurve vor dem Bruch über die Sprödigkeit der Probe Aufschluss.

Die Schlagarbeit $A_V = \int_0^{14} F(s)$ ist mittels SIMPSONscher Regel $(n = 28)$ zu berechnen.

Physik

870. Der Eurocity „Smetana"[1] verlässt die Ostseite des Wiener Südbahnhofs mit einer gleichmäßig wachsenden Beschleunigung $a(t)$, die nach $t_1 = 100\,s$ den Wert $a_1 = 0{,}5\,m/s^2$ annimmt.

a) Man berechne die Geschwindigkeit v_1 zum Zeitpunkt t_1.

b) Welchen Weg s_1 hat der Zug bis dahin zurückgelegt?

c) Wie lauten die Funktionen $a(t)$, $v(t)$ und $s(t)$?

d) Die Graphen der Funktionen $a(t)$, $v(t)$, $s(t)$ sind über dem Intervall $[0, t_1]$ darzustellen.

871. Der Zug U4 der Wiener U-Bahn („Silberpfeil") fährt zwischen „Friedensbrücke" und „Rossauer Lände" mit einer konstanten Geschwindigkeit $v_0 = 15\,m/s$ (d. h. $a(t) = 0$).
Plötzlich kommt es infolge von Netzschwankungen zu einem unregelmäßigen Beschleunigungsverhalten, d. h. $a(t) \neq 0$ (vgl. nebenstehende Figur). Die Fahrgäste verspüren dabei einen Ruck im Bewegungsablauf.

a in m/s²
1
0 1 1,5 2 t in s
-1

a) Man stelle den Verlauf der Beschleunigung $a(t)$ als Funktion der Zeit t dar.

Anleitung:

$$a(t) = \begin{cases} \ldots.. & t < 1 \\ \ldots.. & 1 \leqslant t < 1{,}5 \\ \ldots.. & 1{,}5 \leqslant t < 2 \\ \ldots.. & t \geqslant 2 \end{cases}$$

b) Wie lauten die Funktionen $v(t)$ und $s(t)$ für $s(0) = 0$?

c) Die Graphen der Funktionen $a(t)$, $v(t)$, $s(t)$ sind über dem Intervall $[0, 3]$ zu zeichnen.

872. Ein Holzzylinder schwimmt im Wasser, so dass nur sein oberstes Drittel sichtbar ist.

F(x)
G
x
h
2h/3
Ø2r

a) Welche Dichte ρ_{Holz} hat der Zylinder?

Anleitung: Der Auftrieb F_A ist gleich dem Gewicht G des Zylinders.

b) Welche Arbeit W muss beim Herausziehen des Körpers aus dem Wasser verrichtet werden? ($r = 10\,cm$, $h = 6\,dm$)

Anleitung: $F(x) = G - F_A(x)$, $W = \int\limits_0^{\frac{2h}{3}} F(x)\,dx = \ldots$

873. Mit welcher Geschwindigkeit v muss eine Rakete (Masse m) die Erde mindestens verlassen, um den Mond gerade noch zu erreichen? Warum ist v kleiner als die zweite kosmische Geschwindigkeit v_2?

r_E r_M
E m M
x
d

Anleitung: $E_{kin} \geqslant E_{pot}$, $E_{pot} = \int\limits_{r_E}^{d - r_M} (F_E(x) - F_M(x))\,dx$

F_E, F_M ..... Gravitationskräfte bezüglich Erde bzw. Mond, die auf eine Masse m wirken.

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}$, $r_E = 6{,}37 \cdot 10^6 m$, $m_E = 5{,}97 \cdot 10^{24}\,kg$, $r_M = \frac{r_E}{4}$, $m_M = \frac{m_E}{81}$, $d = 380 \cdot 10^6\,m$

[1]) Benannt nach **Bedřich (Friedrich) SMETANA** (1824—1884), tschechischer Komponist.

Gravitationsgesetz	COULOMBsches Gesetz[1]
$F_G = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$	$F_{El} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$
$G = 6{,}672 \cdot 10^{-11}\,m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}$..... Gravitationskonstante	$\varepsilon_0 = 8{,}8542 \cdot 10^{-12} AsV^{-1}m^{-1}$..... Dielektrizitätskonstante
m_1, m_2..... Massen, die in Wechselwirkung treten	Q_1, Q_2..... Ladungen, die einander anziehen oder abstoßen
r..... Abstand beider Massen	r..... Abstand beider Ladungen

Die **Gravitationskraft** F_G und die **COULOMBkraft** F_{El} werden in der Physik auch als **Zentralkräfte** bezeichnet. Beide Gesetze zeigen trotz unterschiedlichen physikalischen Gehalts (so gibt es zwar positive und negative Ladungen, aber nur positive Massen) die gleiche Abstandsabhängigkeit. Berechnet man nun Arbeitsintegrale oder Potenziale, kommt man daher zu ähnlichen Aussagen.

874. a) Welche Arbeit W gegen die Erdanziehungskraft musste aufgebracht werden, um den 1975 in eine Umlaufbahn geschossenen Nachrichtensatelliten Telestar III auf eine geostationäre Bahn von h = 36000 km Höhe über der Erdoberfläche zu bringen?

Das Arbeitsintegral $W = \int_{R_E}^{R_U} F\,dr$ ist zu berechnen.

Der Satellit wurde von der Erdoberläche ($R_E = 6370$ km) in die Umlaufbahn ($R_U = R_E + h$) gebracht. Berechnet werden soll die dazu nötige Arbeit, wenn die Masse der Erde $m_1 = 6 \cdot 10^{24}$ kg und die Masse des Satelliten $m_2 = 1400$ kg beträgt.

b) Nun sollte die massengleiche Voyager 2 (vgl. nebenstehende Figur) für eine Planetenerkundungsmission das Gravitationsfeld der Erde völlig verlassen (d. h. in unendlich weite Entfernung von der Erdoberfläche geschossen werden: $R_U = \infty$). Welche Arbeit W_∞ ist bei sonst gleichen Bedingungen hierzu notwendig?

c) Die „Arbeit" $f(R) = \frac{-W_\infty}{m_1}$ wird als **Gravitationspotenzial** bezeichnet. Dieses soll nun als Funktion des Abstands R vom Erdmittelpunkt aufgetragen werden. Welche Kurve erhält man?

Abgase von Industriebetrieben enthalten oft große Staubmengen. Eine sehr effiziente Möglichkeit der umweltschonenden Reinigung der Industrieabgase besteht in einer elektrostatischen Filterung. Das verunreinigte Gas tritt in einen Behälter, in dem ein elektrostatisches Feld mit hoher Spannung aufgebaut wird. Die Staubteilchen werden durch die Spitzenwirkung und Influenz entsprechend hoch aufgeladen und lagern sich an der Behälteraußenwand ab (vgl. nebenstehende Figur).

Hochspannung
Reingas
Sprühelektrode
Niederschlagselektrode
Rohgas

875. a) Man berechne unter Zuhilfenahme der Formel für die COULOMBkraft F_{El} das Potenzial $\frac{W_{El}}{Q_1}$ der Behälterwand gegenüber dem r = 2 m entfernten Metalldraht, der eine Ladung von $Q_2 = 1{,}3 \cdot 10^{-6}$ C trägt. (Wanddicke: 20 cm)

b) Wie würde der Ausdruck in **a)** lauten, wenn das Staubteilchen in großer Entfernung (gegen die Größe des Staubteilchens kann die Wegstrecke aus dem Rauchgasrohr als unendlich angenommen werden) von der Behälterwand aufgeladen wird?

c) Man berechne, mit welcher Geschwindigkeit ein Staubteilchen (Masse $m = 10^{-8}$ kg, Influenzladung 10^{-9} C) auf der Behälterwand auftreffen würde, wenn es in r = 2 m Entfernung von der Wand aufgeladen wird.

Anleitung: $W_{El} = E_{kin} = \frac{mv^2}{2}$

[1]) Benannt nach **Charles Augustin DE COULOMB** (1736—1806), französischer Physiker.

FUNKTIONEN IN MEHREREN VARIABLEN

1. Ein zunächst unlösbares Problem

Vor kurzem rief mich ein Ingenieur an. Er hatte die Aufgabe, aus rechteckigen Blechen mit den Maßen 2 m Breite eine Wasserrinne zu bauen, so dass möglichst viel Wasser fließen kann. Der Querschnitt A sollte also „optimal" sein.

Wir einigten uns auf eine Rinne mit rechteckigem Querschnitt (vgl. Figur in der Außenspalte). Die zugehörige Extremwertaufgabe war rasch gelöst:

(1) Skizze vgl. Außenspalte.
(2) HB: $A = xy$ maximal
(3) NB: $y = 2 - 2x$
(4) $A = x(2 - 2x)$
(5) $\overline{A} = x - x^2$
(6) $\overline{A}' = 1 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0{,}5$
(7) $\overline{A}''(0{,}5) = -2 < 0$ $\overline{A}$ bzw. A hat bei $x = 0{,}5$ ein relatives Maximum
(8) $y = 2 - 2 \cdot 0{,}5 = 1$
(9) $A_{max} = 0{,}5 \cdot 1 = 0{,}5$ $\mathbf{A_{max} = 0{,}5\,m^2}$

Wenn also die Seitenwand 0,5 m hoch ist, ist der Querschnitt $A_{max} = 0{,}5\,m^2$ groß. Der Ingenieur war mit dieser Antwort zufrieden.

Etwas später stellte ich mir die Frage: Ist dieser Querschnitt wirklich optimal? Könnte vielleicht noch mehr Wasser fließen, wenn die Rinne einen **trapezförmigen** Querschnitt aufweist?

Für den Flächeninhalt A_T eines Trapezes gilt: $A_T = \frac{a+c}{2} h$

Auf unsere Wasserrinne bezogen (vgl. Figur in der Außenspalte) ergibt sich:

$$A = \frac{2 - 2x + 2 - 2x + 2y}{2} \sqrt{x^2 - y^2}$$

$$A = (2 - 2x + y)\sqrt{x^2 - y^2}$$

Die Funktionsgleichung $A = (2 - 2x + y)\sqrt{x^2 - y^2}$ enthält die beiden unabhängigen Variablen x und y. Wie kann man bei einer Funktion in **zwei** unabhängigen Variablen den Extremwert ermitteln?

$y^2 + h^2 = x^2 \Rightarrow h = \sqrt{x^2 - y^2}$

Um eine Antwort auf diese Frage zu finden, klären wir zunächst Folgendes:

2. Was ist eigentlich eine Funktion in zwei unabhängigen Variablen?

„Fast niemals hängt eine Größe von nur einer einzigen anderen ab, fast immer sind mehrere voneinander unabhängige Faktoren zu berücksichtigen. So ist die Fahrgeschwindigkeit eines Autos z. B. von der Gashebelstellung abhängig — je mehr ich darauf drücke, umso rascher geht's dahin —, aber auch von der Steigung der Straße oder vom Gewicht des Wagens oder von der Art des verwendeten Kraftstoffs oder von der Motortemperatur. Die Schußweite einer Granate richtet sich nach der Pulverladung, d.h. nach der Anfangsgeschwindigkeit, mit der das Geschoß den Lauf verläßt, und nach dem Erhebungswinkel des Geschützes. Schießt man sehr weit, so kommen noch die Luftdichte, die Temperatur, die geographische Länge und Breite, etwaige Windeinflüsse usw. dazu."[1]

[1]) Aus „KARLSON, Zauber der Zahlen" (Ullstein Verlag).

Die Funktionsgleichung einer Funktion in zwei unabhängigen Variablen lautet allgemein:
$z = f(x, y)$ in expliziter Form z ist der Funktionswert, x und y sind die unabhängigen Variablen, z ist eine **Funktion** von x und y. Es wird also jedem geordneten Paar (x, y) **genau ein** Wert z zugeordnet.

Implizite Darstellung einer Funktion in zwei unabhängigen Variablen:

$$F(x, y, z) = 0$$

So lautet z. B. die explizite Darstellung einer Funktionsgleichung in zwei unabhängigen Variablen:
$z = 3x + 5y$. Die zugehörige implizite Form lautet: $z - 3x - 5y = 0$.

Um den Punkt P(6, 10, 12) zu konstruieren, gehen wir 6 Einheiten vom Ursprung entlang der x-Achse, dann 10 Einheiten parallel zur y-Achse und schließlich 12 Einheiten parallel zur z-Achse.

Es gibt also Funktionen, bei denen mehr als zwei Variable im Spiel sind, z. B. $z = 3x + 5y$. Unser gewohntes kartesisches Koordinatensystem ist zweidimensional. Es reicht nicht aus, um darin den Graphen von $z = 3x + 5y$ einzutragen.

Die geometrische Darstellung dieser Funktion kann aber in einem **dreidimensionalen Koordinatensystem** erfolgen. Hierbei handelt es sich einfach um eine Aufstockung des geläufigen ebenen Systems in die dritte Dimension. Wir denken dabei z. B. an eine nach vorne verlaufende (positive) x-Achse, eine y-Achse nach rechts und eine z-Achse nach oben. Jede Achse schließt mit der anderen einen rechten Winkel ein.

Es entstehen drei Ebenen: die xy-, die xz- und die yz- Ebene. Umfassendste Definitionsmenge einer Funktion in zwei unabhängigen Variablen ist $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, das ist geometrisch die xy-Ebene.

Die z-Koordinate, also der zu (x, y) gehörige Funktionswert, wird jeweils normal zur xy-Ebene nach oben (für $z > 0$) bzw. nach unten (für $z < 0$) aufgetragen. Der dadurch entstehende Graph ist eine **Fläche** im dreidimensionalen Raum.

Nochmals: Eine Funktionsgleichung in drei Variablen ergibt eine Punktmenge in Form einer ebenen oder gekrümmten Fläche.

Beispiel:

Welche Flächen werden durch **a)** $z = 0$ **b)** $x = y$ **c)** $y = 2$ beschrieben? Entsprechende Skizzen sind anzufertigen!

Lösung:

a) Die xy-Ebene bildet die Menge aller Punkte, für die $z = 0$ ist.

b) Es ist die Ebene durch den Koordinatenursprung, die den rechten Winkel zwischen x-und y-Achse halbiert.

c) Die Figur zeigt die zur xz-Ebene parallele Ebene im Abstand $y = 2$.

Für jeden in der yz-Ebene liegenden Punkt gilt: $x = 0$.

Die Funktionsgleichungen $x = 1$ und $x = 3$ bilden Ebenen, die zur yz-Ebenen parallel sind — vgl. die Figur in der Außenspalte.

Die Funktionsgleichung $F(x, y, z) = 0$ ergibt eine Punktmenge in Form einer ebenen oder gekrümmten Fläche. Wenn wir diese Fläche mit der Ebene $x = a$ schneiden, erhalten wir eine Kurve f, die nur die Variablen y und z enthält.

Analoge Überlegungen lassen sich für die xy- und die xz-Ebene durchführen.

Um den Graphen der Funktion $F(x, y, z) = 0$ im Koordinatensystem darzustellen, wird man am Besten die Gleichungen der Schnittkurven mit den Koordinatenebenen aufstellen. Wenn diese Kurven **normalaxonometrisch**[1] gezeichnet werden, ergibt sich eine gute Darstellung der zu $F(x, y, z) = 0$ gehörenden Flächen und ihre Lage im Koordinatensystem.

Beispiel:

Welche Fläche wird durch die Funktionsgleichung $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} + \frac{z}{5} = 1$ mit $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ und $z \geqslant 0$ dargestellt? Die drei Gleichungen der Schnittkurven der Fläche mit den Koordinatenebenen sind aufzustellen und anschließend in einem gemeinsamen Koordinatensystem räumlich darzustellen.

Lösung:

Durch Nullsetzen der einzelnen Variablen ergeben sich die Gleichungen der Schnittkurven mit den Koordinatenebenen:

(1) Für die xy-Ebene ist $z = 0$: $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$

(2) Für die xz-Ebene ist $y = 0$: $\frac{x}{4} + \frac{z}{5} = 1$

(3) Für die yz-Ebene ist $x = 0$: $\frac{y}{3} + \frac{z}{5} = 1$

Beispiel:

Ein anschauliches Bild des Graphen der durch $z = \sqrt{64 - x^2 - y^2}$ festgelegten Funktion ist zu skizzieren. Weiters ist die umfassendste Definitionsmenge D dieser Funktion anzugeben ($G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$).

Lösung:

Zunächst ermitteln wir die Schnittkurven mit den Koordinatenebenen:

(1) Für die xy-Ebene ist $z = 0$: $0 = \sqrt{64 - x^2 - y^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 64$

$(x^2 + y^2 = 64) \wedge (z = 0)$ ergibt in der geometrischen Deutung einen Kreis in der xy-Ebene mit dem Radius $r = 8$.

Die Gleichung $x^2 + y^2 = 64$ allein entspricht in unserem dreidimensionalen Koordinatensystem einem (unendlich langen) Kreiszylinder mit der z-Achse als Zylinderachse und dem Radius $r = 8$.

Erst die xy-Ebene ($\hat{=}\ z = 0$) schneidet aus dem Zylinder obigen Kreis heraus.

(2) Für die xz-Ebene ist $y = 0$: $z = \sqrt{64 - x^2} \Leftrightarrow x^2 + z^2 = 64$

$z = \sqrt{64 - x^2}$ (gemeinsam mit $y > 0$) entspricht einem Halbkreis in der xz-Ebene mit dem Radius $r = 8$.

(3) Für die yz-Ebene ist $x = 0$: $z = \sqrt{64 - y^2}) \Leftrightarrow y^2 + z^2 = 64$

$z = \sqrt{64 - y^2}$ (gemeinsam mit $x > 0$) entspricht einem Halbkreis in der yz-Ebene mit dem Radius $r = 8$.

$\sqrt{64 - x^2 - y^2}$ ist nur für $64 - x^2 - y^2 \geqslant 0$ definiert:

$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 64\}$

[1]) Die sogenannte **Normalaxonometrie** ist eine geometrische Methode, um dreidimensionale Körper mittels Parallelprojektion möglichst anschaulich und verzerrungsfrei (im Unterschied zum Schrägriss) abzubilden.

Neben der Darstellung im räumlichen Koordinatensystem gibt es auch noch andere Möglichkeiten, eine Gleichung in zwei unabhängigen Variablen geometrisch zu deuten, etwa durch sogenannte **Zylinderkoordinaten**.

Dieses System hat zwei verschiedene Arten von Koordinaten: Zwei Längen (axial und radial) und einen Winkel (vgl. nebenstehende Figur).

Die Ortung einer Information im Magnetplatten-Stapel eines Computers bedient sich dieser Koordinaten. Die Anwendung dieses Systems in der Mathematik beschränkt sich aber auf Ausnahmefälle, wie etwa die Beschreibung elektromagnetischer Felder in Koaxial-Kabeln.

Damit möge die Betrachtung über die geometrische Interpretation von Gleichungen in drei Variablen abgeschlossen sein. Sie soll nicht zuletzt dazu gedient haben, das räumliche Vorstellungsvermögen zu fördern und zu formen.

3. Partielle Ableitungen

Bei der **partiellen** (teilweisen) Ableitung einer Funktion f(x, y) wird nach **einer** Variablen (x oder y) differenziert, wobei man die andere Variable **vorübergehend** als Konstante betrachtet. Zur Kennzeichnung, dass es sich um die partielle Ableitung handelt, verwendet man nicht wie beim gewöhnlichen Differenzialquotienten den Buchstaben d, sondern das Symbol ∂.

Folgende Schreibweisen sind üblich:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = f_x$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = f_y$$

Gegeben ist die Funktion $z = 3x + 5y$. Gesucht sind die **partiellen Ableitungen** (vgl. Außenspalte) dieser Funktion.

Um eine partielle Ableitung zu bilden, differenziert man wie gewohnt nach einer unabhängigen Variablen und behandelt dabei die andere unabhängige Variable als Konstante:

$\frac{\partial z}{\partial x} = 3$ (gesprochen: dz partiell nach dx ist gleich 3)

$\frac{\partial z}{\partial y} = 5$ (gesprochen: dz partiell nach dy ist gleich 5)

Die partielle Ableitung kann auch bei Funktionen in drei und mehr unabhängigen Variablen durchgeführt werden. Sämtliche Ableitungsregeln bleiben bestehen.

Beispiel:

a) $z = x^2 + 4xy - 5y^2 \quad f_x = ?,\ f_y = ?$ **b)** $z = \frac{x}{y} - \frac{y}{x} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = ?,\ \frac{\partial z}{\partial y} = ?$

c) $V = \frac{\pi r^2 h}{3} \quad \frac{\partial V}{\partial h} = ?,\ \frac{\partial V}{\partial r} = ?$

d) $R = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \quad \frac{\partial R}{\partial R_1} = ?,\ \frac{\partial R}{\partial R_2} = ?,\ \frac{\partial R}{\partial R_3} = ?$

Lösung:

a) $f_x = 2x + 4y \qquad f_y = 4x - 10y$

b) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y} + \frac{y}{x^2} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x}$

c) $\frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\pi r^2}{3} \qquad \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2\pi r h}{3}$

d) $\frac{\partial R}{\partial R_1} = 1 \qquad \frac{\partial R}{\partial R_2} = \frac{R_3(R_2 + R_3) - R_2 R_3 \cdot 1}{(R_2 + R_3)^2} = \frac{R_3^2}{(R_2 + R_3)^2}$

$$\frac{\partial R}{\partial R_3} = \frac{R_2(R_2 + R_3) - R_2 R_3 \cdot 1}{(R_2 + R_3)^2} = \frac{R_2^2}{(R_2 + R_3)^3}$$

Wir wissen jetzt, wie man formal partielle Ableitungen bildet. Die folgenden Überlegungen sollen uns einen gewissen Einblick in die Bedeutung der partiellen Ableitungen geben, wobei bewusst auf eine strenge analytische Herleitung verzichtet wurde.

Wir betrachten die Ebene $x + 2y + 2z = 4$ und stellen zunächst fest, dass sie die Koordinatenebenen in den „Spuren“ AB, BC und CA schneidet, mit A(4, 0, 0), B(0, 2, 0)und C(0, 0, 2).

Befinden wir uns im Punkt P(1, 0,5, 1) der Ebene, so mag uns interessieren, mit welchem Anstieg (oder Gefälle) wir zu rechnen haben, wenn wir uns von P wegbegeben.

Jeder Wanderer oder Skiläufer weiß aber, dass die Steigung, die ihn auf seinem Weg erwartet, sehr von der Richtung abhängt, die er einzuschlagen gedenkt. (Es sei denn, er befinde sich auf einer horizontalen Ebene.)

Von den Möglichkeiten, die einem fiktiven Wanderer in P zur Verfügung stehen, greifen wir zwei besondere heraus:

(1) Die Bewegung erfolgt parallel zur xz-Ebene, führt also von P zu Q. Der Weg verläuft dann parallel zur Spur CA und an der lässt sich die Größe des Gefälles ablesen: Es beträgt $-0{,}5$.

(2) Durch eine Bewegung parallel zur yz-Ebene gelangt man von P nach R, wobei das Gefälle -1 beträgt, wie aus der Spur CB zu entnehmen ist.

Wie wir wissen, ist die Steigung eine Angelegenheit einer ersten Ableitung, hier also der ersten Ableitung der Variablen z.

Was gegenüber den vertrauten Begriffen aus der Analytik der Ebene ($y = f(x)$ und $y' = \frac{dy}{dx}$) neu auf uns zukommt ist der Umstand, dass wegen $z = f(x, y)$ die Richtung des Fortschreitens erst festgelegt werden muss, ehe zwecks Ermittlung der Steigung abgeleitet wird.

Für den oben mit **(1)** bezeichneten Weg ist charakteristisch, dass y seinen Wert nicht ändert, dass also die Variable y vorübergehend „konstant“ bleibt.

Die Veränderung der Variablen z unter der Voraussetzung, dass allein x variiert, ist eben die (erste) **partielle Ableitung** von z nach x: $\frac{\partial z}{\partial x}$.

Das soll sofort an der Gleichung unserer Ebene erprobt werden. In für z expliziter Form lautet sie: $z = 2 - \frac{x}{2} - y$

$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{2}$ in Übereinstimmung mit dem durch die Überlegung gefundenen Wert.

Für den Weg **(2)** von P nach R gilt x = konstant, also haben wir die partielle Ableitung von z nach y zu bilden: $\frac{\partial z}{\partial y} = -1$, was unsere Überlegung ebenfalls bestätigt.

Beispiel:

Gegeben ist die Funktion $z = 3x^2 + 5xy + 2y^2$. Gesucht sind die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung.

Lösung:

$f_x = 6x + 5y$, $f_y = 5x + 4y$

Die Ableitungsfunktionen f_x und f_y sind wieder Funktionen der unabhängigen Variablen x und y. f_x und f_y kann sowohl nach x als auch nach y abgeleitet werden — man erhält partielle Ableitungen zweiter Ordnung:

$f_{xx} = 6$ $f_{yy} = 4$ f_{xy}[1] $= 5$ f_{yx}[1] $= 5$

[1]) Die Reihenfolge der Variablen-Indizes gibt die Reihenfolge an, in der die partiellen Ableitungen gebildet wurden.

Das geschwungene ∂ deutet an, dass alle anderen Variablen, von denen z noch abhängen mag, für die Bildung dieser Ableitung als Konstante anzusehen ist.

Wie bei einer Ebene nicht anders zu erwarten war, ergeben beide partiellen Ableitungen konstante Werte, das heißt das Gefälle ändert sich während des Fortschreitens nicht und ist auch von der Wahl des Ausgangspunkts unabhängig. Man beachte übrigens, dass die Begriffe „Ebene“ in den Gebieten der Mathematik und der Geografie verschiedene Bedeutungen haben. Tritt an die Stelle der Ebene eine gekrümmte Fläche, so ändert sich nichts an der Idee der partiellen Ableitungen. Lediglich ihre Konstanz kann nicht weiter bestehen.

Partielle Ableitungen zweiter Ordnung

Folgende Schreibweisen sind üblich:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}$$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ wird gesprochen als: d zwei z partiell nach dx Quadrat.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{yx}$$

f_{xy} und f_{yx} werden als **gemischt-partielle Ableitungen** bezeichnet.

Beispiel:

Die ersten und zweiten partiellen Ableitungen nachstehender Funktionsgleichungen sind zu bilden:

a) $z = x^3 - y^3 + 1$ **b)** $z = \frac{xy}{x+y}$ **c)** $z = \sqrt{5x^5 - 3y^3}$ **d)** $z = \sin 4x \cos 3y$

e) $z = \ln xy$ **f)** $z = ye^{xy}$ **g)** $z = \ln x^2 \sqrt{\cos y}$ **h)** $z = x^y$

Lösung:

a) $f_x = 3x^2$ $f_{xx} = 6x$ $f_{xy} = 0$ $f_y = 3y^2$ $f_{yy} = 6y$ $f_{yx} = 0$

b)

$$f_x = \frac{y(x+y) - xy \cdot 1}{(x+y)^2} = \frac{y^2}{(x+y)^2}$$

$$f_{xx} = -\frac{y^2 \cdot 2(x+y)}{(x+y)^4} = -\frac{2y^2}{(x+y)^3}$$

$$f_{xy} = \frac{2y(x+y)^2 - y^2 \cdot 2(x+y)}{(x+y)^4} = \frac{(x+y)(2xy + 2y^2 - 2y^2)}{(x+y)^4} = \frac{2xy}{(x+y)^3}$$

$$f_y = \frac{x(x+y) - xy \cdot 1}{(x+y)^2} = \frac{x^2}{(x+y)^2}$$

$$f_{yy} = -\frac{x^2 \cdot 2(x+y)}{(x+y)^4} = -\frac{2x^2}{(x+y)^3}$$

$$f_{yx} = \frac{2x(x+y)^2 - x^2 \cdot 2(x+y)}{(x+y)^4} = \frac{(x+y)(2x^2 + 2xy - 2x^2)}{(x+y)^4} = \frac{2xy}{(x+y)^3}$$

c)

$$f_x = \frac{25x^4}{2\sqrt{5x^5 - 3y^3}}$$

$$f_{xx} = \frac{100x^3 \cdot 2\sqrt{5x^5 - 3y^3} - 25x^4 \cdot 2 \cdot \frac{25x^4}{2\sqrt{5x^5 - 3y^3}}}{4(5x^5 - 3y^3)} = \frac{200x^3(5x^5 - 3y^3) - 625x^8}{4(5x^5 - 3y^3)\sqrt{5x^5 - 3y^3}} = \frac{375x^8 - 600x^3y^3}{4\sqrt{(5x^5 - 3y^3)^3}}$$

$$f_{xy} = \frac{25x^4}{2} \cdot \frac{-\frac{-9y^2}{2\sqrt{5x^5 - 3y^3}}}{5x^5 - 3y^3} = \frac{225x^4y^2}{4\sqrt{(5x^5 - 3y^3)^3}}$$

$$f_y = \frac{-9y^2}{2\sqrt{5x^5 - 3y^3}}$$

$$f_{yy} = \frac{-18y \cdot 2\sqrt{5x^5 - 3y^3} + 9y^2 \cdot 2 \cdot \frac{-9y^2}{2\sqrt{5x^5 - 3y^3}}}{4(5x^5 - 3y^3)} = \frac{-36y(5x^5 - 3y^3) - 81y^4}{4(5x^5 - 3y^3)\sqrt{5x^5 - 3y^3}} = \frac{27y^4 - 180x^5y}{4\sqrt{(5x^5 - 3y^3)^3}}$$

$$f_{yx} = \frac{9y^2}{2} \cdot \frac{-\frac{-25x^4}{2\sqrt{5x^5 - 3y^3}}}{5x^5 - 3y^3} = \frac{225x^4y^2}{4\sqrt{(5x^5 - 3y^3)^3}}$$

d)

$f_x = \cos 4x \cdot 4\cos 3y = \mathbf{4\cos 4x \cos 3y}$

$f_{xx} = 4(-\sin 4x) \cdot 4\cos 3y = \mathbf{-16\sin 4x \cos 3y}$

$f_{xy} = 4\cos 4x(-\sin 3y) \cdot 3 = \mathbf{-12\cos 4x \sin 3y}$

$f_y = \sin 4x(-\sin 3y) \cdot 3 = \mathbf{-3\sin 4x \sin 3y}$

$f_{yy} = -3\sin 4x \cos 3y \cdot 3 = \mathbf{-9\sin 4x \cos 3y}$

$f_{yx} = -3\cos 4x \cdot 4\sin 3y = \mathbf{-12\cos 4x \sin 3y}$

e) $f_x = \frac{1}{xy} \cdot y = \frac{1}{x}$ $f_{xx} = -\frac{1}{x^2}$ $f_{xy} = 0$ $f_y = \frac{1}{xy} \cdot x = \frac{1}{y}$ $f_{yy} = -\frac{1}{y^2}$ $f_{yx} = 0$

f)

$f_x = ye^{xy} \cdot y = \mathbf{y^2e^{xy}}$

$f_{xx} = y^2e^{xy} \cdot y = \mathbf{y^3e^{xy}}$

$f_{xy} = 2ye^{xy} + y^2e^{xy} \cdot x = \mathbf{ye^{xy}(2 + xy)}$

$f_y = 1 \cdot e^{xy} + ye^{xy} \cdot x = \mathbf{e^{xy}(1 + xy)}$

$f_{yy} = e^{xy} \cdot x(1 + xy) + e^{xy} \cdot x = xe^{xy}(1 + xy + 1) = \mathbf{xe^{xy}(2 + xy)}$

$f_{yx} = e^{xy} \cdot y(1 + xy) + e^{xy} \cdot y = ye^{xy}(1 + xy + 1) = \mathbf{ye^{xy}(2 + xy)}$

g)

$$f_x = \frac{1}{x^2} \cdot 2x\sqrt{\cos y} = \frac{2}{x}\sqrt{\cos y}$$

$$f_{xx} = -\frac{2}{x^2}\sqrt{\cos y}$$

$$f_{xy} = \frac{2}{x} \cdot \frac{-\sin y}{2\sqrt{\cos y}} = -\frac{\sin y}{x\sqrt{\cos y}}$$

$$f_y = \ln x^2 \cdot \frac{-\sin y}{2\sqrt{\cos y}}$$

$$f_{yy} = -\frac{\ln x^2}{2} \cdot \frac{\cos y\sqrt{\cos y} - \sin y \cdot \frac{-\sin y}{\sqrt{\cos y}}}{\cos y} = -\frac{\ln x^2}{2} \cdot \frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos y\sqrt{\cos y}} = -\frac{\ln x^2}{2\sqrt{\cos^3 y}}$$

$$f_{yx} = \frac{1}{x^2} \cdot 2x \cdot \frac{-\sin y}{2\sqrt{\cos y}} = -\frac{\sin y}{x\sqrt{\cos y}}$$

h)

$f_x = \mathbf{yx^{y-1}}$ $f_{xx} = \mathbf{y(y-1)x^{y-2}}$

$f_{xy} = 1 \cdot x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x = \mathbf{x^{y-1}(1 + y\ln x)}$

$f_y = \mathbf{x^y \ln x}$ $f_{yy} = \mathbf{x^y \ln^2 x}$

$f_{yx} = yx^{y-1}\ln x + x^y \cdot \frac{1}{x} = \mathbf{x^{y-1}(y\ln x + 1)}$

Beim obigen Beispiel fällt auf, dass die gemischt-partiellen Ableitungen jeweils übereinstimmen: $f_{xy} = f_{yx}$

Dies ist kein Zufall, es gilt der Satz von SCHWARZ:

Bei gemischt-partiellen Ableitungen ist es gleichgültig, in welcher Reihenfolge partiell differenziert wird.

Bei der gemischt-partiellen Ableitung wird die partielle (erste) Ableitung — nach der anderen Variablen — differenziert.

Wer sich unter dieser Art einer „Steigungsänderung" etwas vorstellen will, wird eingeladen, folgenden Vergleich mit zu überlegen: Ein Skiläufer steht auf einem Übungshang, wobei seine Skier in die x-Richtung zeigen. Die Neigung seiner Bretter (der Tangens ihres Winkels mit der Horizontalen) entspricht dem Wert für $\frac{\partial z}{\partial x}$ an der betreffenden Hangstelle. Denkt er daran, geradeaus zu marschieren, so muss er — je nach dem Wert von $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ — mit einer Änderung der Neigung rechnen. Hat er aber die Absicht, sogenannte Treppenschritte normal zu seiner Spur auszuführen, dann würde sich die Neigung seiner Skier je nach $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ändern.

Satz von SCHWARZ:

Sind die gemischt-partiellen Ableitungen in einer Umgebung der Stelle (x_0, y_0) stetig, so sind sie in dieser Umgebung **einander gleich** und es kommt **nicht** darauf an, in welcher Reihenfolge partiell differenziert wird.

Für alle $(x, y) \in U(x_0, y_0)$ gilt:

$f_{xy} = f_{yx}$

H. Schwarz.

Hermann Amandus SCHWARZ
(1843 — 1921)
deutscher Mathematiker

4. Fehlerabschätzung und -fortpflanzung

Beispiel:

Eine Uhrenbatterie hat einen Durchmesser von 6,8 mm.

a) Wie groß ist die „Grundfläche" G dieser Uhrenbatterie?

b) Die Grundfläche G ist in Abhängigkeit vom Radius x für $3 \leqslant x \leqslant 4$ grafisch darzustellen.

c) Wie groß ist der maximale Fehler, der sich bei der Berechnung von G ergibt, wenn man davon ausgeht, dass der Durchmesser mit einer Genauigkeit von ± 0,2 mm gemessen wurde?

Bemerkung: Um den Funktionscharakter zu betonen, wurde der Radius mit x bezeichnet.

Lösung:

a) $G = \pi x^2 = 36{,}3$ $\quad$ $G = 36{,}3\ \text{mm}^2$

b) G ist die abhängige, x ist die unabhängige Variable. Es gilt, die Funktion $f: x \mapsto \pi x^2$ über $D = [3, 4]$ grafisch darzustellen:

Wertetabelle:

x	f(x)
3	28
3,2	32
3,4	36
3,6	41
3,8	45
4	50

Als Ursprung wurde der Punkt (3, 28) gewählt. Die Maßstäbe auf den beiden Achsen sind verschieden.

Das obige Foto zeigt eine Uhrenbatterie.

c) Wurde der Durchmesser mit einem Fehler von ± 0,2 mm gemessen, kann der Radius x mit einem maximalen Fehler ± 0,1mm behaftet sein.

Darstellung von f: $x \mapsto \pi x^2$ für $3{,}4 \leqslant x \leqslant 3{,}5$

Es stellt sich folgende Frage: Wie groß ist die Veränderung Δf, wenn sich x um $\Delta x = 0{,}1$ ändert?

Nun: $\Delta f = f(3{,}5) - f(3{,}4) =$

$= 38{,}5 - 36{,}3 = 2{,}2$

Maximaler Fehler: 2,2 mm²

Das Differenzial df ist (bei kleinem dx) ein Näherungswert für die tatsächliche Funktionswertdifferenz Δf:

$$\Delta f \approx df = f'(x)\, dx = f'(x)\, \Delta x$$

Wenn wir allgemein die Funktion f an der Stelle x durch ihre Tangente ersetzen — vgl. Außenspalte — und unter Δf die Veränderung von f verstehen, sobald sich x um dx ändert, dann ist — für kleine Werte dx — das sogenannte **Differenzial** df eine Näherung für Δf: $\Delta f \approx df$. Wegen $\tan\alpha = \frac{df}{dx}$ bzw. $\tan\alpha = f'(x)$ folgt: $f'(x) = \frac{df}{dx}$

$$df = f'(x)\, dx$$

Auf unser obiges Beispiel angewandt:

$\Delta f \approx df = f'(x)\, dx$, f: $x \mapsto \pi x^2$, $f'(x) = 2\pi x$

$df = 2\pi x\, dx$, $x = 3{,}4$, $dx = 0{,}1$ (lt. Angabe)

$df = 2\pi \cdot 3{,}4 \cdot 0{,}1 = 2{,}1$ **Maximaler Fehler: 2,1mm²**

Eine Uhrenbatterie hat einen Durchmesser von 6,8 mm und eine Höhe von 2,1mm. Mit den Mitteln der Differenzialrechnung ist der maximale Fehler zu bestimmen, der sich bei der Berechnung des Volumens dieser Batterie ergibt, wenn man davon ausgeht, dass der Durchmesser mit einer Genauigkeit von ± 0,2 mm und die Höhe mit einer Genauigkeit von ± 0,1mm gemessen wurde.

Dieses Problem ist deshalb etwas schwieriger, da beim Volumen **zwei** unabhängige Variablen im Spiel sind: Radius und Höhe.

„Mit den Mitteln der Differenzialrechnung ..." soll das Beispiel gelöst werden. Das heißt nichts anderes, als dass wir mit dem Differenzial df einen Näherungswert für die tatsächliche Funktionswertdifferenz bestimmen sollen. Allerdings geht es hier nicht um **ein** Differenzial, denn wir haben es ja mit zwei unabhängigen Variablen zu tun. Es gilt also zunächst Folgendes zu klären: Was versteht man unter Differenzialen in zwei unabhängigen Variablen?

Gehen wir von der Funktion $z = f(x, y)$ aus. Diese sei an der Stelle (x, y) nach beiden Variablen differenzierbar, d. h. $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ existieren.

Ändert sich nun x um eine Größe dx, dann ist das **partielle Differenzial** $dz_x = \frac{\partial z}{\partial x} dx$. Analog ist $dz_y = \frac{\partial z}{\partial y} dy$.

Wenn sich aber nun **beide** unabhängigen Variablen ändern, dann erhält man das **vollständige Differenzial** $dz = dz_x + dz_y$.

Definition:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

Die Größe dz heißt **vollständiges Differenzial** der Funktion $z = f(x, y)$.

Beispiel:
Das vollständige Differenzial der durch ihre Funktionsgleichung gegebenen Funktion **a)** $z = 3x^5 - 4y^2$ **b)** $z = 3x^2y^3 + 4x^3y^2$ **c)** $z = \ln x + y$ **d)** $z = e^x \cos y$ ist zu bestimmen.

Lösung:
a) $dz = 15x^4\,dx - 8y\,dy$ **b)** $dz = (6xy^3 + 12x^2y^2)\,dx + (9x^2y^2 + 8x^3y)\,dy$
c) $dz = \frac{1}{x}\,dx + dy$ **d)** $dz = e^x \cos y\,dx - e^x \sin y\,dy$

Geometrische Veranschaulichung des vollständigen Differenzials

Die Funktion $z = f(x, y)$ wird durch die krumme Fläche φ beschrieben. φ wird durch die rosa Tangentialebene τ im Punkt P berührt. Aus der Figur kann man erkennen: Ändert sich die Variable x um die Größe dx, dann ändert sich das z der Tangentialebene τ um dz_x. (vgl. blauer Pfeil P′R′)
Für den blauen Pfeil P′S′ ergibt sich analog: Wird y um dy geändert, dann nimmt das z der Tangentialebene τ um dz_y zu.
Und wenn wir **beide** unabhängigen Variablen x, y ändern, gelangen wir zum Punkt Q. Aus der Ähnlichkeit der blauen Dreiecke kann man erkennen: Die Änderung des z von τ ist genau die **Summe** der beiden Teiländerungen, d. h. $dz = dz_x + dz_y$. Diese Summe ist somit das vollständige Differenzial. Geometrisch bedeutet es den gesamten Anstieg dz der Tangentialebene.
Wegen $dz_x = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx$ und $dz_y = \frac{\partial z}{\partial y}\,dy$ ergibt sich $dz = \frac{\partial z}{\partial y}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy$.

Wir wollen nun der Frage der **Fehlerfortpflanzung** nachgehen. Mit anderen Worten: Welche Auswirkungen auf das Ergebnis haben Ungenauigkeiten bei Ausgangswerten?
Angenommen wir haben einen Wert x mit einer Abweichung von $\pm x$ und einen Wert y mit einer Abweichung von $\pm y$ bestimmt. Die größtmöglichen absoluten Abweichungen sind demnach $|\Delta x|$ und $|\Delta y|$.
Wie leicht einzusehen ist, ergibt sich für die Summe $z = x + y$ folgender Zusammenhang: $|\Delta z| \leqslant |\Delta x| + |\Delta y|$

Der Betrag der absoluten Abweichung einer Summe ist kleiner oder gleich der Summe der Beträge der absoluten Abweichungen der Summanden.

Beispiel:
Das vollständige Differenzial von $z = xy$ ist **a)** zu berechnen **b)** geometrisch zu deuten **c)** im Hinblick auf die Fehlerfortpflanzung zu interpretieren.

Lösung:
a) $dz = y\,dx + x\,dy$
b) Wenn wir $z = xy$ als Fläche eines Rechtecks mit den Seitenlängen x und y auffassen, dann wird durch eine Vergrößerung der Seiten um Δx bzw. Δy der ursprüngliche Flächeninhalt xy um Δz größer:
$\Delta z = y\,\Delta x + x\,\Delta y + \Delta x\,\Delta y$
Vergleicht man Δz mit dem in **a)** ermittelten dz, zeigt sich, dass bei der Näherung $\Delta x \approx dx$, $\Delta y \approx dy$ und $\Delta z \approx dz$ die Abweichung gleich dem Produkt $\Delta x \Delta y$ ist.
Diese Abweichung ist allerdings vernachlässigbar klein.

c) Aus $\Delta z = \Delta(xy) = y\Delta x + x\Delta y$ folgt durch Division durch xy und analoge Überlegung hinsichtlich der größtmöglichen absoluten Abweichungen folgender Zusammenhang für die relative Abweichung des Produkts:

$$\left|\frac{\Delta(xy)}{xy}\right| \leqslant \left|\frac{\Delta x}{x}\right| + \left|\frac{\Delta y}{y}\right|$$

Der Betrag der relativen Abweichung eines Produkts ist kleiner oder gleich der Summe der Beträge der relativen Abweichungen der Faktoren.

5. Extremwerte

P ist so zu bestimmen, dass $a+b+c$ ein Minimum wird:

x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 und y_3 sind Konstante, z. B. $x_1 = 32$ cm, $y_1 = 48$ cm usw.

Bei einem Banküberfall kam es zu einer Schießerei. Auf der nebenstehenden grafischen Darstellung sind drei Einschusslöcher zu erkennen.

Für die Kriminalbeamten bzw. bei einer gerichtlichen Verhandlung könnte sich leicht die Frage erheben: Wohin hat der Schütze gezielt, was war seine Absicht?

Wie kann man aus den drei Einschusslöchern auf das Ziel schließen, das der Schütze vermutlich treffen wollte?

Nun: Es ist anzunehmen, dass er jenen Punkt P(x, y) treffen wollte, der den drei Einschusslöchern am „nächsten" liegt, d. h. für den die Summe S der Abstände von den Löchern am kleinsten ist:

$$S = \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} + \sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2} + \sqrt{(x-x_3)^2+(y-y_3)^2}$$

Wir müssten also jene Werte x, y finden, für die die Summe S minimal wird. Schwierig! Denn um den Extremwert einer Funktion in zwei unabhängigen Variablen zu bestimmen, sind Überlegungen anzustellen.

Tatsächlich wird es uns erst viel später gelingen, das obige Problem zu lösen.

Stürzen wir uns aber gleich einmal in die „graue Theorie" und klären wir, was man unter Extremwerten von Funktionen in zwei unabhängigen Variablen versteht:

Auf der durch die Funktion $z = f(x, y)$ dargestellten Fläche gibt es einen Punkt H, der höher liegt als alle anderen Punkte in seiner unmittelbaren Umgebung. Man sagt: Die Funktion $z = f(x, y)$ hat an der Stelle (x_H, y_H) ein (relatives) **Maximum**.

Anschaulich: Wenn es auf die zu untersuchende Fläche regnete, würde das Maximum am längsten aus dem Wasser herausragen.

Die Funktion z besitzt im Hochpunkt H (Maximum) eine waagrechte Tangentialebene.

Die rosa unterlegte Ebene ε_1 hat die Gleichung $x = x_H$, die blau unterlegte Ebene ε_2 hat die Gleichung $y = y_H$. ε_1 und ε_2 schneiden aus z_1 zwei Kurven k_1 und k_2 heraus, die jetzt ebenfalls an der Stelle x_H bzw. y_H einen Extremwert besitzen, nämlich k_1 für $f_x = 0$ und k_2 für $f_y = 0$.

Auf der durch die Funktion $z = f(x, y)$ dargestellten Fläche gibt es einen Punkt T, der tiefer liegt als alle anderen Punkte in seiner unmittelbaren Umgebung. Man sagt: Die Funktion $z = f(x, y)$ hat an der Stelle (x_T, y_T) ein (relatives) **Minimum**.

Anschaulich: Wenn es auf die zu untersuchende Fläche regnete, würde sich das Wasser im Punkt T sammeln.

Die Funktion z besitzt im Tiefpunkt T (Minimum) eine waagrechte Tangentialebene.

Die rosa unterlegte Ebene ε_1 hat die Gleichung $x = x_T$, die blau unterlegte Ebene ε_2 hat die Gleichung $y = y_T$. ε_1 und ε_2 schneiden aus z_1 zwei Kurven k_1 und k_2 heraus, die jetzt ebenfalls an der Stelle x_T bzw. y_T einen Extremwert besitzen, nämlich k_1 für $f_x = 0$ und k_2 für $f_y = 0$.

Ein **notwendige** (aber nicht **hinreichende**) Bedingung für die Existenz eines Extremwerts bei einer Funktion in zwei Variablen ist, dass alle partiellen Ableitungen Null werden: $f_x = 0$ und $f_y = 0$.
Aus diesem Gleichungssystem in zwei Variablen sind die gesuchten Koordinaten x und y zu berechnen.

Beispiel:

Gegeben ist die Funktion mit der Funktionsgleichung $z = -x^2 - y^2 + 2x + 4y - 3$. Diese Funktion besitzt einen relativen Extrempunkt. Wie lauten seine Koordinaten?

Lösung:

$f_x = -2x + 2$ (1) $-2x + 2 = 0$
$f_y = -2y + 4$ (2) $-2y + 4 = 0$ $\Rightarrow (x,\ y) = (1,\ 2)$

$x = 1$ und $y = 2$ werden jetzt in die gegebene Funktionsgleichung eingesetzt $\Rightarrow z = 2$

Ist es möglich, dass der Punkt einer waagrechten Tangentialebene an eine Fläche $z = f(x,\ y)$ **kein** Extremwert ist?

Leider ja — und ein Beispiel hierfür findet sich in der Außenspalte.

Einerseits ist S Tiefpunkt der Kurve k_1, andererseits ist S Hochpunkt der Kurve k_2.

Und obwohl die Tangenten in k_1 und k_2 waagrecht sind und die partiellen Ableitungen gleich Null sind, liegt kein Extremwert der Fläche vor.

Wir wollen jetzt — ohne Beweis — die **notwendigen und hinreichenden** Bedingungen für die Existenz eines Extremwerts und der Unterscheidung von Maximum und Minimum angeben:

z
$z = x^2 - y^2$
k_1
y
S
x
k_2

S ist ein Beispiel für einen sogenannten **Sattelpunkt**.

$f_x = 0$ und $f_y = 0$ ..... notwendige Bedingung für Extrema

$f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 > 0$ und $f_{xx} < 0$ ..... hinreichende Bedingung für ein **Maximum**

$f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 > 0$ und $f_{xx} > 0$ ..... hinreichende Bedingung für ein **Minimum**

Aus $D = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 > 0$ folgt, dass f_{xx} und f_{yy} bei Vorliegen eines Extremwerts das gleiche Vorzeichen haben. Es genügt daher, in obiger hinreichender Bedingung z. B. f_{xx} zu betrachten.

Beispiel:

Die Extrema der Funktion $f(x,\ y) = x^3 + y^3 - 6xy$ sind zu berechnen.

Lösung:

(1) Notwendige Bedingung: Die partiellen Ableitungen müssen gleich Null sein.

$f_x = 3x^2 - 6y$ $3x^2 - 6y = 0$
$f_y = 3y^2 - 6x$ $3y^2 - 6x = 0$ $\Leftrightarrow (x_1,\ y_1) = (0,\ 0)$ $(x_2,\ y_2) = (2,\ 2)$

(2) Die in (1) ermittelten möglichen Extrema sind auf Maximum und Minimum zu prüfen:

$f_{xx} = 6x$
$f_{yy} = 6y$ $D = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 = 6x \cdot 6y - (-6)^2 = 36xy - 36$
$f_{xy} = -6$

$P_1(0,\ 0)$: $D_1 = -36 < 0 \Rightarrow$ kein Extremum

$P_2(2,\ 2)$: $D_2 = 108 > 0 \Rightarrow$ Extremum, $f_{xx}(2,\ 2) = 12 > 0 \Rightarrow$ Minumum $T(2,\ 2,\ -8)$

Beispiel:

Gegeben ist die Funktion $f(x,\ y) = \frac{3}{x} + \frac{4}{y} + 2x + 3y - 7$. Relative Extrema?

Lösung:

(1)
$$\begin{aligned} f_x &= -\frac{3}{x^2} + 2 \qquad & -\frac{3}{x^2} + 2 &= 0 \\ f_y &= -\frac{4}{y^2} + 3 \qquad & -\frac{4}{y^2} + 3 &= 0 \end{aligned} \Bigg\} \Leftrightarrow \begin{aligned} (x_1,\ y_1) &= \left(\frac{\sqrt{6}}{2},\ \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \qquad (x_2,\ y_2) = \left(\frac{\sqrt{6}}{2},\ -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \\ (x_3,\ y_3) &= \left(-\frac{\sqrt{6}}{2},\ \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \qquad (x_4,\ y_4) = \left(-\frac{\sqrt{6}}{2},\ -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \end{aligned}$$

(2)
$$\left.\begin{aligned} f_{xx} &= \frac{6}{x^3} \\ f_{yy} &= \frac{8}{y^3} \\ f_{xy} &= 0 \end{aligned}\right\} D = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 = \frac{48}{x^3 y^3} \begin{cases} > 0 \text{ für } x > 0 \wedge y > 0 \text{ bzw. } x < 0 \wedge y < 0 \\ < 0 \text{ für } x > 0 \wedge y < 0 \text{ bzw. } x < 0 \wedge y > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ f hat bei $\left(\frac{\sqrt{6}}{2},\ \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ und $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2},\ -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ Extrema.

$f_{xx}\left(\frac{\sqrt{6}}{2},\ \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{6}{\frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}} > 0 \Rightarrow$ Minimum $\qquad$ **T(1,225, 1,155, 4,827)**

$f_{xx}\left(-\frac{\sqrt{6}}{2},\ -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{6}{-\frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}} < 0 \Rightarrow$ Maximum $\qquad$ **H(–1,225, –1,155, –18,827)**

„**Relative**" Extreme wurden bei dem obigen Beispiel gesucht. Unterscheiden sie sich im Allgemeinen von absoluten Extrema? Welcher Unterschied besteht z. B. zwischen einem **relativen** und einem **absoluten** Maximum einer Funktion in zwei unabhängigen Variablen?

In der Außenspalte wurde über den (blau unterlegten) Gebiet G die (rosa unterlegte) Fläche φ dargestellt.

Ihr absolutes Maximum befindet sich in H. Dieser Punkt ist zugleich auch ein relatives Maximum, da er eine horizontale Tangentialebene besitzt.

Auch T hat eine derartige Tangentialebene. T ist nur ein relatives Minimum, aber kein absolutes, da es im Gebiet G noch einen tiefer liegenden Punkt gibt: M.

Der Punkt M ist das absolute Minimum der Fläche φ. Allerdings ist er kein relatives Minimum.

Die bisherigen Ausführungen lassen sich auf Funktionen mit mehr als zwei Variablen sinngemäß übertragen, wobei das Grundprinzip der partiellen Ableitung, jeweils nach einer unabhängigen Variablen zu differenzieren und die übrigen konstant zu halten, unverändert übernommen wird. Allerdings ist es nicht mehr möglich, die Zusammenhänge grafisch darzustellen.

An welchen Stellen hat eine Funktion der Form $y = f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ Extremwerte?

Notwendige Bedingung ist es, dass alle n partiellen Ableitungen der Funktion $y = f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ gleich Null sind. Man erhält somit ein System von n Gleichungen in n Variablen, um **mögliche** Extremwerte zu ermitteln.

Für die hinreichende Bedingung (Nachweis der Art des Extremwerts) sind Kenntnisse notwendig, die weit über den Lehrplan hinaus gehen. Aus diesem Grund wollen wir auf deren Darstellung verzichten.

6. Methode der kleinsten Quadrate

Empirisches Datenmaterial liegt oftmals in Form von Wertepaaren vor, deren Veranschaulichung in einem rechtwinkeligen Koordinatensystem auf eine lineare Entwicklung schließen lässt. Es ist daher nahe liegend, den Zusammenhang durch eine lineare Funktion $y = ax + b$ zu beschreiben.

Das exakte Verfahren nennt man **lineare Regression**. Durch die **Regressionsgerade** soll die Tendenz der „Punktwolke" möglichst treffend beschrieben werden.

Ein ausgezeichnetes Verfahren, um die Regressionsgerade so zu bestimmen, dass sie sich den einzelnen Punkten „am besten anpasst", ist die sogenannte **Methode der kleinsten Quadrate**, die auf Carl Friedrich GAUSS (1777—1855) zurückgeht:

> Die Regressionsgerade ist derart zu legen, dass die Summe der Quadrate aller vertikalen Abstände unserer Punkte von der Geraden möglichst klein wird.

Beispiel:

Man bestimme die Gerade $y = ax + b$, so dass die Summe der Quadrate aller vertikalen Abstände der Punkte A(2, 1), B(3, 3) und C(5, 4) von dieser Geraden möglichst klein wird.

Lösung:

Der auf der Geraden $y = ax + b$ liegende Punkt A* hat die Koordinaten $(2, 2a + b)$. Der vertikale Abstand zum Punkt A ist daher $2a + b - 1$ und das Quadrat dieses Abstands $(2a + b - 1)^2$, wobei die Koeffizienten a und b der Geraden variabel sind.

Die Summe der Quadrate aller vertikalen Abstände ist daher eine Funktion in zwei Variablen:

$$F(a, b) = (2a + b - 1)^2 + (3a + b - 3)^2 + (5a + b - 4)^2$$

a und b sollen so ermittelt werden, dass der Funktionswert F(a, b) ein Minimum wird. Um das Minimum einer Funktion in zwei Variablen zu bestimmen, sind zunächst die sogenannten **partiellen Ableitungen** zu bilden:

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 2 \cdot (2a + b - 1) \cdot 2 + 2 \cdot (3a + b - 3) \cdot 3 + 2 \cdot (5a + b - 4) \cdot 5 = 76a + 20b - 62$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = 2 \cdot (2a + b - 1) \cdot 1 + 2 \cdot (3a + b - 3) \cdot 1 + 2 \cdot (5a + b - 4) \cdot 1 = 20a + 6b - 16$$

Man erhält den Extremwert einer Funktion in zwei Variablen, indem man beide partiellen Ableitungen gleich Null setzt und dieses Gleichungssystem löst:

(1) $76a + 20b - 62 = 0$

(2) $20a + 6b - 16 = 0$

Wir erhalten die Lösungen $\mathbf{a = \frac{13}{14}}$ und $\mathbf{b = -\frac{3}{7}}$ und somit die Geradengleichung $\mathbf{y = \frac{13x}{14} - \frac{3}{7}}$.

Bemerkung: Auf den Nachweis der Art des Extremwerts mit Hilfe der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung wollen wir verzichten.

In der Praxis bestimmt man nicht jedes Mal die partiellen Ableitungen einer eigens aufgestellten Funktion in zwei Variablen, sondern arbeitet mit Formeln.

Im folgenden Beispiel wollen wir nun Formeln für die Koeffizienten a und b der Regressionsgeraden allgemein herleiten.

Beispiel:

Ausgehend von insgesamt n Punkten P_i mit den Koordinaten (x_i, y_i) ist eine allgemeine Formel für die Koeffizienten a und b der Regressionsgeraden $y = ax + b$ herzuleiten.

Lösung:

Die auf der Regressionsgeraden $y = ax + b$ liegenden zugehörigen Punkte P_i^* haben die Koordinaten $(x_i, ax_i + b)$, so dass das Quadrat des Abstands zwischen jedem Punkt P_i vom zugehörigen Punkt P_i^* jeweils $(ax_i + b - y_i)^2$ beträgt.

$$F(a, b) = (ax_1 + b - y_1)^2 + (ax_2 + b - y_2)^2 + \dots + (ax_{n-1} + b - y_{n-1})^2 + (ax_n + b - y_n)^2$$

Wir bilden die partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 2 \cdot (ax_1 + b - y_1) \cdot x_1 + 2 \cdot (ax_2 + b - y_2) \cdot x_2 + \dots + 2 \cdot (ax_{n-1} + b - y_{n-1}) \cdot x_{n-1} + 2 \cdot (ax_n + b - y_n) \cdot x_n$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = 2 \cdot (ax_1 + b - y_1) \cdot 1 + 2 \cdot (ax_2 + b - y_2) \cdot 1 + \dots + 2 \cdot (ax_{n-1} + b - y_{n-1}) \cdot 1 + 2 \cdot (ax_n + b - y_n) \cdot 1$$

Durch entsprechende Umformung erhalten wir:

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 2 \cdot \left[a \cdot \left(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 + x_n^2\right) + b \cdot \left(x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n\right) - \left(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_{n-1} y_{n-1} + x_n y_n\right)\right]$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = 2 \cdot \left[a \cdot \left(x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n\right) + b \cdot n - \left(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + y_n\right)\right]$$

Wir schreiben die partiellen Ableitungen mit dem Summenzeichen an und setzen gleich Null:

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 2 \cdot \left[a \cdot \sum x_i^2 + b \cdot \sum x_i - \sum x_i y_i\right] = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial b} = 2 \cdot \left[a \cdot \sum x_i + b \cdot n - \sum y_i\right] = 0$$

Wir haben daher folgendes Gleichungssystem zu lösen:

(1) $a \cdot \sum x_i^2 + b \cdot \sum x_i = \sum x_i y_i$

(2) $a \cdot \sum x_i + b \cdot n = \sum y_i$

Für das arithmetische Mittel gilt $\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum x_i$ bzw. $\bar{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum y_i$

(1) $a \cdot \sum x_i^2 + b \cdot n \cdot \bar{x} = \sum x_i y_i$

(2) $a \cdot n \cdot \bar{x} + b \cdot n = n \cdot \bar{y} \qquad | \cdot (-\bar{x})$

$$a \cdot \left[\sum x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2\right] = \sum x_i y_i - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}$$

Wir erhalten somit $a = \frac{\sum x_i y_i - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2}$ und $b = \bar{y} - a \cdot \bar{x}$

Bemerkung: An dieser Stelle soll nur die Herleitung der Formeln mit Hilfe der Differenzialrechnung durchgeführt werden. Mehr über den Themenbereich „Regression“ und seine Bedeutung in der Statistik findet sich auf Grund des Lehrplans erst im 4. Band.

AUFGABEN

876. Welche Flächen werden durch **a)** $x = 0$ **b)** $z = 2$ **c)** $y = z$ beschrieben? Entsprechende Skizzen sind anzufertigen!

877. Welche Fläche wird durch die Funktionsgleichung $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ mit $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ und $z \geqslant 0$ dargestellt? Die drei Gleichungen der Schnittkurven mit den Koordinatenebenen sind aufzustellen und anschließend in einem gemeinsamen Koordinatensystem räumlich darzustellen.

878. Zu welcher Funktionsgleichung **a)** $z = 2x + 3y$ **b)** $z = x^2 + y^2$ **c)** $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ **d)** $z = \frac{1}{xy}$ gehört welcher der Graphen **(1)** bis **(4)** ?

(1) (2) (3) (4)

879. Ein anschauliches Bild (axonometrische Darstellung) des Graphen der durch **a)** $z = 5x - 2y$ **b)** $z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}$ festgelegten Funktion ist zu skizzieren. Umfassendste Definitionsmenge D?

Bei den folgenden Aufgaben sind die ersten partiellen Ableitungen der durch ihre Gleichung gegebenen Funktionen zu ermitteln:

880. a) $z = 3x + 5y + 6$ **b)** $z = 4x^3 + 2y^4 + 3$ **c)** $z = \frac{2}{x^3} - \frac{4}{y^2} + 4$

881. a) $z = x^2 - 5xy + 2y^2$ **b)** $z = 2x^3 + 3x^2y + 4xy^2$ **c)** $z = 2xy^4 + 3x^3y - 6x^2y^2$

882. a) $z = \frac{y}{x^2} - \frac{x^2}{y} + 1$ **b)** $z = \frac{y^2}{x^3} + \frac{x^3}{y^2} - 1$ **c)** $z = \frac{x^2 - y^2}{xy}$

883. a) $z = \frac{1}{x} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ **b)** $z = x^{\frac{2}{5}} - y^{-\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{2}}$ $(a \in \mathbb{R})$ **c)** $z = 3x^{\frac{1}{2}}y^2 - 4x^3y^{\frac{1}{3}}$

884. a) $z = y\sqrt{x} - y\sqrt[3]{x}$ **b)** $z = \sqrt{xy} + \frac{1}{xy}$ **c)** $z = \sqrt{x\sqrt{y}} - \sqrt[3]{y\sqrt{x}}$

885. a) $z = \sin x + \sin y$ **b)** $z = \sin(x + y)$ **c)** $z = \sin(x + \sin y)$

886. a) $z = \sin x \sin y$ **b)** $z = \sin xy$ **c)** $z = \sin^2 x \cdot \sin y^2$

887. a) $z = \cos x - \cos y$ **b)** $z = \cos(x - y)$ **c)** $z = \cos(y + \cos x)$

888. a) $z = \frac{\cos x}{\cos y}$ **b)** $z = \cos\frac{x}{y}$ **c)** $z = \cos\sqrt{x} \cdot \sqrt{\cos y}$

889. a) $z = \tan y - \tan x$ **b)** $z = \tan(y - x)$ **c)** $z = \tan(x - \tan y)$

890. a) $z = \frac{\tan y}{\tan x}$ **b)** $z = \tan\frac{y}{x}$ **c)** $z = \sqrt{\tan x^2} \cdot \tan^2\sqrt{y}$

891. a) $z = \sin x \cos y$ **b)** $z = \cos(x \sin y)$ **c)** $z = \tan\frac{y}{\cos x}$

892. a) $z = \frac{\sin xy}{\cos(x + y)}$ **b)** $z = \frac{\tan 2x + \cos 3y}{2x \sin 3y}$ **c)** $z = \frac{\sin(x^2 + \cos 2y)}{x^2 \sin 2y}$

893. a) $z = \ln x + \ln y$ **b)** $z = \ln(x+y)$ **c)** $z = \ln^2(x^3 + \ln^3 y^2)$

894. a) $z = \sqrt{\ln x \ln y}$ **b)** $z = \ln\sqrt{xy}$ **c)** $z = \ln\sqrt{x \ln\sqrt{y}}$

895. a) $z = \ln(x \ln y)$ **b)** $z = \ln\frac{y}{\ln x}$ **c)** $z = \ln(y^2 + \ln 2x)$

896. a) $z = \ln x \sin y$ **b)** $z = \cos(y \ln x)$ **c)** $z = \ln(\sin 2x + \cos y^2)$

897. a) $z = e^x - e^y$ **b)** $z = e^{x-y}$ **c)** $z = e^{x - e^y}$

898. a) $z = \frac{e^y}{e^x}$ **b)** $z = e^{\frac{y}{x}}$ **c)** $z = e^{\sqrt{y}}\sqrt{e^x}$

899. a) $z = x e^y + y e^x$ **b)** $z = xye^{xy}$ **c)** $z = \frac{e^{xy}}{x^2 y}$

900. a) $z = e^{\sin x \cos y}$ **b)** $z = \cos(x e^{xy})$ **c)** $z = xye^{x \tan y}$

901. a) $z = 2^x + 3^y$ **b)** $z = 4^x 5^y$ **c)** $z = 6^{\sqrt{x}}\sqrt{7^y}$

902. a) $z = x^y + y^x$ **b)** $z = x^y y^x$ **c)** $z = x^{\sqrt{y}}\sqrt{y^x}$

903. a) $z = x^{\ln(y+1)}$ **b)** $z = y^{\ln(1-x)}$ **c)** $z = \ln(x^{\cos y} + y^{\sin x})$

Bei den folgenden Aufgaben sind die ersten und zweiten partiellen Ableitungen im jeweils gegebenen Punkt zu berechnen:

904. a) $z = x^3 - y^3 + 1$, $P(6, 3)$ **b)** $z = 3x^2y^3 + 4x^3y^2$, $P(-1, 2)$

905. a) $z = \sqrt[3]{x^2 y}$, $P(\frac{1}{8}, 1)$ **b)** $z = \sqrt{5x^5 - 3y^3}$, $P(1, -1)$

906. a) $z = \frac{xy}{x+y}$, $P(1, -2)$ **b)** $z = \frac{2x+1}{2y-2x}$, $P(-3{,}5, -2{,}5)$

907. a) $z = \ln xy$, $P(3, 2)$ **b)** $z = \ln x + y$, $P(2, -9)$

908. a) $z = \sin 4x \cos 3y$, $P(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$ **b)** $z = \tan^2 xy^2$, $P(\pi, 1)$

909. a) $z = \ln x^2\sqrt{\cos y}$, $P(1, \frac{\pi}{3})$ **b)** $z = \ln\tan\frac{y}{x}$, $P(2, \frac{\pi}{2})$

910. a) $z = y^2 e^x$, $P(0{,}69315, 3)$ **b)** $z = y^x$, $P(-2, 1)$

911. Ein Aluminiumwürfel hat die Kantenlänge 11,8 cm.

a) Welche Masse hat der Würfel, wenn die Dichte von Aluminium $\rho = 2{,}7\ \text{g/cm}^3$ beträgt?

b) Die Masse m ist in Abhängigkeit von der Kantenlänge x für $10 < x < 15$ grafisch darzustellen!

c) Wie groß ist der maximale Fehler, der sich bei der Berechnung der Masse ergibt, wenn man davon ausgeht, dass die Kantenlänge mit einer Genauigkeit von $\pm$ 0,1 cm gemessen wurde?

912. Ein Schüler läuft die Strecke von 60 m in 9,7 Sekunden.

a) Mit welcher Geschwindigkeit (in m/s) legt der Schüler die 60 m zurück?

b) Die Geschwindigkeit v ist in Abhängigkeit von der Zeit t für $9 < t < 11$ grafisch darzustellen!

c) Wie groß ist der maximale Fehler, der sich bei der Berechnung der Geschwindigkeit ergibt, wenn man davon ausgeht, dass die Zeit mit einer Genauigkeit von $\pm$ 0,1 s gestoppt wurde?

Bei den folgenden Aufgaben ist jeweils das vollständige Differenzial zu ermitteln!

913. a) $z = 2x^2 + 3y^2 + 4$ **b)** $z = \frac{5}{x^3} + \frac{6}{y^2} + 7$ **c)** $z = \sqrt[3]{3x^2} + 4\sqrt[4]{y^3} + 5$

914. a) $z = x^3y^2 + 2xy^3 - 3x^2y$ **b)** $z = \frac{x}{y^2} - \frac{y^2}{x} + 2$ **c)** $z = x\sqrt{y} + y\sqrt[3]{x} + 4$

915. a) $z = \ln^2 x^3 + \sin\sqrt{y}$ **b)** $z = \tan e^{\sin x^2} - \cos^3\sqrt{y}$ **c)** $z = \sin^2\sqrt{e^x} - \ln\cos\sqrt{y}$

916. a) $z = \ln y\sqrt{x} + e^{x^2 \sin y}$ **b)** $z = \cos^2 e^{x-\sqrt{y}} + \sqrt{\tan xy^3}$ **c)** $z = ye^{\sin^2 x^3}\cos\ln\frac{x}{y}$

917. Warum kann es sich bei $(3y^2 - 2xy)\,dx + (6xy - 2x^2)\,dy$ nicht um ein vollständiges Differenzial einer Funktion $z = f(x, y)$ handeln?

Anleitung: Bei einem Term $g(x, y)\,dx + h(x, y)\,dy$ müssten — wenn ein vollständiges Differenzial vorliegt — $g(x, y)$ und $h(x, y)$ die partiellen Ableitungen nach x und y von ein und derselben Funktion sein.

918. Bei welchen der folgenden Terme handelt es sich um vollständige Differenziale:

a) $y\,dx + x\,dy$ **b)** $y\,dx - x\,dy$ **c)** $x\,dx - 3y\,dy$ **d)** $\cos(x-y)\,dx + \cos(x-y)\,dy$

919. Eine Uhrenbatterie hat einen Durchmesser von 6,8 mm und eine Höhe von 2,1 mm. Mit den Mitteln der Differenzialrechnung ist der maximale Fehler zu bestimmen, der sich bei der Berechnung des Volumens dieser Batterie ergibt, wenn man davon ausgeht, dass der Durchmesser mit einer Genauigkeit von ± 0,2 mm und die Höhe mit einer Genauigkeit von ± 0,1 mm gemessen wurde.

920. Ein Rennfahrer behauptet: „Ich habe beim Training eine Runde des 5942,48 m langen Österreichrings in 1,47 Minuten zurückgelegt." Welcher maximale Fehler bei der Geschwindigkeit ergibt sich, wenn die Meterangabe mit einer Genauigkeit von ± 0,05 m erfolgte und die Zeit mit einer Genauigkeit von ± 0,02 Sekunden gestoppt wurde?

Bei den folgenden Aufgaben sind jeweils die Extremwerte der gegebenen Funktionen zu bestimmen.

921. a) $z = x^2 + 2y^2 - 3x - 4y + 4$ **b)** $z = 2x^2 - 3y^2 + 6x + 6y + 2$

922. a) $z = x^2 + 2y^2 + 4x - 3y + 6$ **b)** $z = -3x^2 - 4y^2 + 6x - 4y - 3$

923. a) $z = -x^2 + 2xy - 2y^2 + 3$ **b)** $z = 3x^2 + 4xy + 5y^2 + 1$

924. a) $z = -2x^2 + 2xy - y^2 + 2x - 1$ **b)** $z = 3x^2 + 3xy + y^2 - y - 2$

925. a) $z = -x^2 - xy - 2y^2 + 4x - 5y + 2$ **b)** $z = 3x^2 + 2xy + 2y^2 - 38x - 29y + 160$

926. a) $z = x^3 + y^3 - 3xy + 1$ **b)** $z = x^3 + y^3 + xy - 1$

927. a) $z = x^3 - y^3 - 3x + 12y + 10$ **b)** $z = x^3 + y^3 - 3x^2 + 6y^2 - 16$

928. a) $z = x^3 + x^2y + xy^2 - y^3 - 6x + 4$ **b)** $z = 4x^3 - 15x^2y + 12xy^2 - 5y^3 + 108y - 112$

929. a) $z = x^3 + 2x^2y - 7xy^2 + y^3 + 9y - 5$ **b)** $z = 156x^3 - 546x^2y + 624xy^2 - 235y^3 + 105y$

930. a) $z = x^3 + x^2y - xy^2 - y^3 + 17x + 19y$ **b)** $z = 4x^3 - 12x^2y + 18xy^2 - 9y^3 - 54x + 27y$

Bei den folgenden Aufgaben ist die umfassendste Definitionsmenge anzugeben und die Extremwerte sind zu bestimmen.

931. a) $z = \frac{1}{x} - \frac{2}{y} + 4x - 2y + 7$ **b)** $z = \frac{8}{x} + \frac{1}{y} + 2x + 9y + 10$

932. a) $z = \frac{2}{x+2} - \frac{1}{y-1} + 2x - y + 1$ **b)** $z = \frac{12}{3-x} + \frac{2}{1-y} - 3x - 8y + 16$

933. a) $z = \frac{3}{2x+1} - \frac{1}{y} + 6x - 4y^2$ **b)** $z = \frac{2}{x^2} - \frac{3}{2y} - 4x - 6y^2$

934. Aus einem rechteckigen Karton mit der Fläche $A = 81\,cm^2$ ist durch Ausschneiden von Quadraten der Seitenlänge x an den Ecken und anschließendem Aufbiegen der Seitenwände eine quaderförmige, oben offene Schachtel herzustellen. Welche Abmessungen muss der rechteckige Karton aufweisen, damit das Volumen der Schachtel möglichst groß wird? Wie groß ist x zu wählen?

935. Aus einem rechteckigen Karton ist durch Ausschneiden von Quadraten der Seitenlänge x an den Ecken und anschließendem Aufbiegen der Seitenwände eine quaderförmige, oben offene Schachtel mit dem Volumen $V = 128\,cm^3$ herzustellen. Welche Abmessungen muss der rechteckige Karton aufweisen, damit der Materialverbrauch möglichst klein wird?

936. Wie sind die Abmessungen einer quaderförmigen, oben offenen Schachtel mit dem Volumen $V = 125\,cm^3$ zu wählen, damit die Oberfläche ein Minimum wird?

937. Man berechne die Koordianten jenes Punktes P(x, y), für den die Summe der Quadrate der Abstände von drei gegebenen Punkten $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ und $P_3(x_3, y_3)$ ein Minimum wird.

938. Die Querschnittfläche eines trapezförmigen Wasserkanals soll $5\,m^2$ betragen. Für welchen Böschungswinkel α und welchen Wasserpegel h wird der benetzte Umfang des Kanalquerschnitts ein Minimum?

In Analogie zur Regressionsgeraden lassen sich auch andere Funktionsgraphen so bestimmen, dass die Summe der Quadrate aller vertikalen Abstände der gegebenen Punkte vom Funktionsgraphen möglichst klein wird.

939. Es ist zu zeigen, dass die Koeffizienten a, b und c der **quadratischen Regressionsfunktion** $y = ax^2 + bx + c$ durch Lösen des folgenden Gleichungssystems bestimmt werden können:

(1) $a \cdot \sum x_i^4 + b \cdot \sum x_i^3 + c \cdot \sum x_i^2 = \sum x_i^2 y_i$

(2) $a \cdot \sum x_i^3 + b \cdot \sum x_i^2 + c \cdot \sum x_i = \sum x_i y_i$

(3) $a \cdot \sum x_i^2 + b \cdot \sum x_i + c \cdot n = \sum y_i$

940. Es ist zu zeigen, dass die Koeffizienten a, b, c und d der **kubischen Regressionsfunktion** $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ durch Lösen des folgenden Gleichungssystems bestimmt werden können:

(1) $a \cdot \sum x_i^6 + b \cdot \sum x_i^5 + c \cdot \sum x_i^4 + d \cdot \sum x_i^3 = \sum x_i^3 y_i$

(2) $a \cdot \sum x_i^5 + b \cdot \sum x_i^4 + c \cdot \sum x_i^3 + d \cdot \sum x_i^2 = \sum x_i^2 y_i$

(3) $a \cdot \sum x_i^4 + b \cdot \sum x_i^3 + c \cdot \sum x_i^2 + d \cdot \sum x_i = \sum x_i y_i$

(4) $a \cdot \sum x_i^3 + b \cdot \sum x_i^2 + c \cdot \sum x_i + d \cdot n = \sum y_i$

KOSTEN- UND PREISTHEORIE

Sowohl in den Wirtschaftswissenschaften als auch in der Wirtschaftspraxis gewinnt der Einsatz mathematischer Verfahren immer mehr an Bedeutung.

Wir haben bereits in anderen Abschnitten (z. B. „Lineare Optimierung") auf den Einsatz von mathematischen Modellen und Methoden für wirtschaftliche Fragestellungen hingewiesen.

Wie im Zusammenhang mit der Realisierung wirtschaftlicher Zielsetzungen die Infinitesimalrechnung sinnvoll eingesetzt werden kann, soll uns dieses Kapitel zeigen.

Um den Modellcharakter zu betonen, wollen wir in diesem Kapitel folgende allgemeinen Bezeichnungen verwenden:

ME ..... Mengeneinheit (z. B. 1 Stück, 1 Karton, 1 Palette, 10 Stück, 100 kg, 1 t usw.)

GE ..... Geldeinheit (z. B. 1 Euro, 10 US-Dollar, 100 japanische Yen usw.)

1. Kosten und Kostenfunktion

Der Begriff **„Kosten"** wird im allgemeinen Sprachgebrauch — ähnlich wie der Begriff **„Menge"** — in verschiedenen Zusammenhängen verwendet. In den Wirtschaftswissenschaften sind jedoch exakte Definitionen notwendig.

Unter **Ausgaben** versteht man die Summe aller Zahlungsmittelabgänge in einer Abrechnungsperiode (z. B. in einem Jahr).

Aufwendungen sind der in Geld ausgedrückte Wert aller verbrauchten Güter und in Anspruch genommenen Dienstleistungen im Lauf einer Abrechnungsperiode, **unabhängig vom Zeitpunkt der Zahlung.**

Kosten umfassen nur die **zur betrieblichen Leistung erforderlichen** verbrauchten Güter und in Anspruch genommenen Dienstleistungen. Zu den Kosten zählen jedoch auch Werte, die auf Grund steuerlicher Vorschriften **nicht** zu den Aufwendungen gezählt werden dürfen, z. B. der sogenannte **Unternehmerlohn**.

Betrachten wir das nebenstehende Mengendiagramm: A ist die Menge der Ausgaben, V die Menge der Aufwendungen und K die Menge der Kosten. Die Menge M_1 können wir mit den Symbolen der Mengenlehre wie folgt beschreiben: $M_1 = A \setminus (V \cup K)$. Es handelt sich um Ausgaben, die weder Aufwendungen noch Kosten darstellen, z. B. Darlehensrückzahlungen.[1]

Wir wollen uns in erster Linie mit den Kosten befassen.

Kosten, deren Höhe von der erzeugten Menge unabhängig sind, werden **Fixkosten** genannt.

Hat die Anzahl der produzierten Mengeneinheiten Einfluss auf die Kosten, spricht man von **variablen Kosten**.

Beispiele für Fixkosten: Miete für das Geschäftslokal, Gehalt des Geschäftsführers

Beispiele für variable Kosten: Materialverbrauch, Fertigungslöhne

Beispiele für Kosten, die zum Teil fix, zum Teil variabel sind: Fernsprechgebühr, Gas- und Stromverrechnung. (Diese Kosten setzen sich aus einer fixen Grundgebühr und einem variablen, verbrauchsabhängigen Arbeitspreis zusammen.)

Definition:

Der funktionale Zusammenhang zwischen der erzeugten Menge und den dadurch entstehenden Kosten heißt **Kostenfunktion**.

[1]) Für die Mengen M_2 bis M_7 vgl. Aufgabe **941**.

Beispiel:

Für die Miete einer Maschine fallen monatliche Kosten von 3000,— GE an. Für jede damit produzierte ME betragen die Kosten 100,— GE (Material- und Energieverbrauch, Fertigungslohn). Es können maximal 800 ME im Monat erzeugt werden.[1)]

a) Man stelle die Kosten als Funktion von der erzeugten Menge x dar.

b) Welche Menge wird man sinnvollerweise als Definitionsmenge wählen?

c) Die Kostenfunktion ist in einem geeigneten Maßstab grafisch darzustellen!

Lösung:

a) Die Miete ist von der erzeugten Menge unabhängig. Es liegen also monatliche Fixkosten von 3000,— GE vor. Die variablen Kosten betragen 100,— GE je Stück, für x Stück also $100 \cdot x$ GE. Die Gesamtkosten sind die Summe aus fixen und variablen Kosten: $\mathbf{K(x) = 3000 + 100\,x}$

b) Da keine negativen Produktionsmengen möglich sind und maximal 800 ME erzeugt werden können, gilt $0 \leqslant x \leqslant 800$ bzw. $D = [0,\ 800]$.

Bemerkung: Genau genommen muss $x \in \mathbb{N}$ sein, da z. B. 12,437 ME im Allgemeinen nicht erzeugt werden können. Wir wollen jedoch stets alle reellen Zahlen in einem bestimmten Intervall zulassen und — falls eine errechnete Menge nicht ganzzahlig ist — die nächstgelegene ganze Zahl als „Lösung" betrachten. Ob im Einzelfall auf- oder abzurunden ist, hängt von der Fragestellung ab.

c) $K(0) = 3000$, $K(800) = 83\,000$. Wir wählen z. B. folgenden Maßstab (vgl. nebenstehende Figur):
$1\,\text{cm} \mathrel{\hat=} 200$ ME, $1\,\text{cm} \mathrel{\hat=} 20\,000$,— GE.

Im obigen Beispiel wurde der fixe Kostenanteil blau und der variable Kostenanteil rosa unterlegt.

Wir erkennen: Die variablen Kosten wachsen bei zunehmender Produktionsmenge im gleichen Ausmaß wie die erzeugte Menge. Sie sind der Anzahl der erzeugten Stücke **direkt proportional** und werden durch eine **lineare Kostenfunktion** dargestellt.

Es sind aber auch unterproportionale (degressive) oder überproportionale (progressive) Kostenverläufe möglich.

Lineare Kosten	Degressive Kosten	Progressive Kosten

1) Anders formuliert: Die Produktionskapazität beträgt 800 ME im Monat.

Beispiel:

Für die Erzeugung eines Produkts gilt der nachstehende Zusammenhang zwischen der Anzahl x der erzeugten ME und den Gesamtkosten K in GE: $K(x) = 0,1x^2 + 40x + 10000$. Es können maximal 500 ME in einer Zeiteinheit erzeugt werden.

Es ist **a)** grafisch **b)** mittels Infinitesimalrechnung zu untersuchen, ob die Gesamtkosten degressiv oder progressiv verlaufen.

Lösung:

a) Wertetabelle:

x	0	100	200	300	400	500
K(x)	10000	15000	22000	31000	42000	55000

Wir erkennen aus Wertetabelle und Grafik: **Die Kosten wachsen bei zunehmender Produktionsmenge progressiv.**

b) Wir bilden die erste Ableitung der Kostenfunktion: $K'(x) = 0,2x + 40$

Die Funktion K′(x) (die sogenannten **Grenzkosten**) bezeichnet den Kostenzuwachs für **eine** zusätzlich produzierte Mengeneinheit. Für $x > 0$ ist K′(x) durchwegs positiv.

Die Ableitung von K′(x) — also K″(x) — gibt an, welcher Veränderungstendenz die Grenzkosten K′(x) unterworfen sind: $K''(x) = 0,2$ — Die Grenzkosten steigen.

Aus $K'(x) > 0$ und $K''(x) > 0$ folgt, dass K(x) mit steigenden Zuwächsen überproportional steigt. **Die Gesamtkosten verlaufen daher progressiv.**

Man überlege, was für K′(x) und K″(x) gelten müsste, wenn die Gesamtkosten degressiv steigen.

In der Praxis haben Kostenfunktionen oft bei kleinen Produktionsmengen einen degressiven, bei größeren Produktionsmengen jedoch einen progressiven Verlauf. Der Grund ist darin zu suchen, dass bei geringer Kapazitätsausnutzung eine Erhöhung der Produktionsmenge eine bessere Nutzung der vorhandenen Ressourcen (z. B. Verringerung von Stillstandszeiten der Maschinen) oder die Erzielung eines günstigeren Beschaffungspreises (z. B. Mengenrabatt beim Einkauf von Rohstoffen) ermöglicht. Bei einer weiteren Erhöhung der Produktionsmenge können unter Umständen die Kosten (z. B. auf Grund von Überstunden) überproportional zunehmen. Der Übergang vom degressiven zum progressiven Kostenverlauf wird **Kostenkehre**[1] genannt. Derartige „s-förmige" Kostenverläufe können z. B. durch **Polynome dritten Grads** beschrieben werden.

Beispiel:

Ein Betrieb kann monatlich maximal 400 ME einer Ware produzieren. Die Gesamtkosten in GE werden durch die Funktion $K(x) = 0,001x^3 - 0,3x^2 + 35x + 10000$ beschrieben.

a) Es ist zu zeigen, dass die Kostenfunktion keine Extrema besitzt.

b) Bei welcher Produktionsmenge x liegt die Kostenkehre?

Lösung:

a) $K'(x) = 0,003x^2 - 0,6x + 35 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{0,6 \pm \sqrt{0,6^2 - 4 \cdot 0,003 \cdot 35}}{0,006}$$

Da die Diskriminante negativ ist, gibt es keine reelle Lösung.

b) $K''(x) = 0,006x - 0,6 = 0 \Leftrightarrow 0,006x = 0,6 \Leftrightarrow$ $\mathbf{x = 100}$

$K'''(x) = 0,006 \neq 0 \Rightarrow$ **Die Kostenfunktion hat bei $x = 100$ einen Wendepunkt.**

[1]) Es liegt ein Wendepunkt vor.

In der betrieblichen Praxis ist die Kostenfunktion im Allgemeinen nicht vorgegeben. Die innerbetriebliche Kostenrechnung liefert nur für einige bestimmte Produktionsmengen die zugehörigen Gesamtkosten. Man wird daher eine Funktion bestimmen, die den Kostenverlauf möglichst genau beschreibt. Dafür kann man sich z. B. der schon besprochenen **Methode der kleinsten Quadrate** bedienen.

Beispiel:
In einem Betrieb wurden folgende Gesamtkosten in Abhängigkeit von der Produktionsmenge festgestellt:

x (in Mengeneinheiten)	1	2	3	4	5
K(x) (in Geldeinheiten)	134,50	152,10	174,00	191,80	219,40

Man bestimme mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate eine **a)** lineare **b)** quadratische **c)** kubische Kostenfunktion (Koeffizienten auf drei Dezimalstellen genau).

Lösung:

a) Lineare Kostenfunktion $y = K(x) = ax + b$

$a = \dfrac{\sum x_i y_i - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2} \Rightarrow a = 20{,}95$ $\qquad b = \bar{y} - a \cdot \bar{x} \Rightarrow b = 111{,}51$

$\Rightarrow K(x) = 20{,}95x + 111{,}51$

b) Quadratische Kostenfunktion $y = K(x) = ax^2 + bx + c$
Die Koeffizienten a, b und c sind die Lösungen des folgenden Gleichungssystems:

$$
\begin{array}{llll}
(1) & a \cdot \sum x_i^4 + b \cdot \sum x_i^3 + c \cdot \sum x_i^2 = \sum x_i^2 y_i & \quad & 979a + 225b + 55c = 10\,862{,}7 \\
(2) & a \cdot \sum x_i^3 + b \cdot \sum x_i^2 + c \cdot \sum x_i = \sum x_i y_i & & 225a + 55b + 15c = 2824{,}9 \\
(3) & a \cdot \sum x_i^2 + b \cdot \sum x_i + c \cdot n = \sum y_i & & 55a + 15b + 5c = 871{,}8
\end{array}
$$

Das Gleichungssystem hat die Lösungen $a = 1{,}136$, $b = 14{,}136$ und $c = 119{,}46$
$\Rightarrow K(x) = 1{,}136x^2 + 14{,}136x + 119{,}46$

c) Kubische Kostenfunktion $y = K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
Die Koeffizienten a, b, c und d sind die Lösungen des folgenden Gleichungssystems:

$$
\begin{array}{llll}
(1) & a \cdot \sum x_i^6 + b \cdot \sum x_i^5 + c \cdot \sum x_i^4 + d \cdot \sum x_i^3 = \sum x_i^3 y_i & \quad & 20\,515a + 4425b + 979c + 225d = 45\,749{,}5 \\
(2) & a \cdot \sum x_i^5 + b \cdot \sum x_i^4 + c \cdot \sum x_i^3 + d \cdot \sum x_i^2 = \sum x_i^2 y_i & & 4425a + 979b + 225c + 55d = 10\,862{,}7 \\
(3) & a \cdot \sum x_i^4 + b \cdot \sum x_i^3 + c \cdot \sum x_i^2 + d \cdot \sum x_i = \sum x_i y_i & & 979a + 225b + 55c + 15d = 2824{,}9 \\
(4) & a \cdot \sum x_i^3 + b \cdot \sum x_i^2 + c \cdot \sum x_i + d \cdot n = \sum y_i & & 225a + 55b + 15c + 5d = 871{,}8
\end{array}
$$

Das Gleichungssystem hat die Lösungen $a = 0{,}458$, $b = -2{,}989$, $c = 24{,}952$ und $d = 111{,}76$
$\Rightarrow K(x) = 0{,}458x^3 - 2{,}989x^2 + 24{,}952x + 111{,}76$

Bemerkung: Um zu bestimmen, welche der obigen Funktionen den Zusammenhang zwischen Produktionsmenge und Gesamtkosten am genauesten beschreibt, kann man für alle drei Funktionen die wahren Kosten mit den sich aus der Funktionsgleichung ergebenden vergleichen und durch Berechnung der Fehlerquadratsummen eine Entscheidung treffen.

Eine Frage, die man sich vor Festlegung des Produktionsplans immer stellen soll, lautet: Wie viel kostet **eine Mengeneinheit** im Durchschnitt? Nun: Man dividiert die Gesamtkosten durch die Anzahl der erzeugten Mengeneinheiten.

Beispiel:

Die Gesamtkostenfunktion für die Herstellung eines Produkts lautet $K(x) = 20x + 350000$. Die Durchschnittskostenfunktion $\overline{K}(x) = \frac{K}{x}$ ist im Intervall [0, 7000] grafisch darzustellen.

Lösung:

$\overline{K}(x) = 20 + \frac{350\,000}{x}$, D =]0, 7000]

Wertetabelle:

x	1	250	500	1000	2000	3000	5000	7000
$\overline{K}(x)$	350 020	1420	720	370	195	136,67	90	70

K̄(x) in GE/ME; 1400, 1200, 1000, 800, 600, 400, 200; x in 1000 ME; 1 2 3 4 5 6 7

Beispiel:

Text wie obiges Beispiel für $K(x) = -0{,}01x^2 + 50x + 350\,000$.

Lösung:

$\overline{K}(x) = -0{,}01x + 50 + \frac{350\,000}{x}$, D =]0, 7000]

Wertetabelle:

x	1	250	500	1000	2000	3000	5000	7000
$\overline{K}(x)$	350 049,99	1447,50	745	390	205	136,67	70	30

K̄ (x) in GE/ME; 1400, 1200, 1000, 800, 600, 400, 200; x in 1000 ME; 1 2 3 4 5 6 7

Wir erkennen: Die Durchschnittskosten sind umso kleiner, je größer die Produktionsmenge ist. Diese Aussage gilt jedoch **nicht für progressive Kostenverläufe**, da die Gesamtkosten überproportional steigen.

Betrachten wir die nebenstehende Figur: Für jeden Punkt P(x, K(x)) der Gesamtkostenkurve gilt der Zusammenhang $\tan\alpha = \frac{K(x)}{x}$, d. h. $\tan\alpha = \overline{K}(x)$. Der Winkel α — und daher auch $\overline{K}(x)$ — nimmt genau dort den kleinsten Wert an, wo die Verbindungsgerade zwischen Kurve und Koordinatenursprung mit der Tangente an die Kurve identisch ist, wo also $K'(x) = \overline{K}(x)$ (in Worten: Grenzkosten = Durchschnittskosten) gilt. Diese Produktionsmenge x wollen wir als **Betriebsoptimum** bezeichnen.

K (x) in GE; P(x, K(x)); K(X); α; x; Betriebs- optimum; x in ME

Beispiel:

Bei welcher Produktionsmenge x sind die durchschnittlichen Stückkosten am kleinsten, wenn die Gesamtkostenfunktion $K(x) = 0{,}05x^2 + 20x + 312500$ lautet?

Lösung:

$\overline{K}(x) = 0{,}05x + 20 + \frac{312500}{x}$

$\overline{K}'(x) = 0{,}05 - \frac{312500}{x^2} = 0$

$0{,}05x^2 = 312500$

$x^2 = 6250000$

$\mathbf{x = 2500}$

Wir überprüfen, ob $\overline{K}(x)$ bei $x = 2500$ ein Minimum hat:

$\overline{K}''(x) = \frac{625000}{x^3}$

$\overline{K}''(2500) = \frac{625000}{2500^3} \Rightarrow \overline{K}''(2500) > 0 \Rightarrow$ Minimum

Bei einer Produktionsmenge von 2500 ME sind die durchschnittlichen Stückkosten am kleinsten.

Bemerkung: Die zugehörigen Stückkosten (in GE/ME) erhält man durch Berechnung von $\overline{K}(2500)$.

Beispiel:

Text wie obiges Beispiel für $K(x) = 0{,}005x^3 - 0{,}4x^2 + 12x + 64000$.

Lösung:

$\overline{K}(x) = 0{,}005x^2 - 0{,}4x + 12 + \frac{64000}{x}$

$\overline{K}'(x) = 0{,}01x - 0{,}4 - \frac{64000}{x^2} = 0$

$0{,}01x^3 - 0{,}4x^2 - 64000 = 0$

Wir fassen die linke Seite der Gleichung als Funktion f(x) auf und setzen für x einige Werte ein:

x	10	50	100	200
f(x)	−64030	−63750	−58000	0

Wir erhalten eine Lösung[1]: $\mathbf{x_1 = 200}$

$$(0{,}01x^3 - 0{,}4x^2 - 64000) : (x - 200) = 0{,}01x^2 + 1{,}6x + 320$$
$$\underline{-(0{,}01x^3 - 2x^2)}$$
$$1{,}6x^2$$
$$\underline{-(1{,}6x^2 - 320x)}$$
$$320x - 64000$$
$$\underline{-(320x - 64000)}$$
$$0 \text{ Rest}$$

Da die Diskriminante $D = 1{,}6^2 - 4 \cdot 0{,}01 \cdot 320$ negativ ist, gibt es keine weiteren reellen Lösungen.

Wir überprüfen, ob $\overline{K}(x)$ bei $x = 200$ ein Minimum hat:

$\overline{K}'' = (x) = 0{,}01 + \frac{128000}{x^3}$

$\overline{K}''(200) = 0{,}01 + \frac{128000}{200^3} \Rightarrow \overline{K}''(200) > 0 \Rightarrow$ Minimum

Bei einer Produktionsmenge von 200 ME sind die durchschnittlichen Stückkosten am kleinsten.

[1]) Sollte durch Einsetzen keine Lösung gefunden werden, kann z. B. das NEWTONsche Näherungsverfahren zur Lösung der Gleichung verwendet werden.

2. Erlös und Gewinn

Am Anfang dieses Kapitels war unter anderem von „wirtschaftlichen Zielsetzungen" die Rede.

Überlegen wir, welche für einen Wirtschaftserfolg maßgeblichen Faktoren bei unseren Berechnungen berücksichtigt wurden. Wir können jetzt ausrechnen, welche Produktionsmenge am kostengünstigsten produziert werden kann. Es wurde jedoch völlig außer Acht gelassen, dass die erzeugten Güter verkauft werden müssen, um einen **Gewinn** zu erzielen.

Nehmen wir an, ein Stück kann um p GE verkauft werden. Der erzielbare Erlös ist proportional der verkauften Menge und kann durch die Funktion $E(x) = p \cdot x$ dargestellt werden.

Ein Gewinn wird erzielt, wenn der Erlös größer ist als die Gesamtkosten. Wenn nur wenige ME verkauft werden, können nicht alle Kosten durch Erlöse gedeckt werden, so dass ein Verlust entsteht.

Jene Menge, bei der die Erlöse gerade so groß sind, dass kein Verlust mehr entsteht, heißt **Gewinnschwelle**. Man spricht in diesem Zusammenhang auch vom **Break-even-Punkt**[1].

Beispiel:
Für die monatlichen Kosten eines Betriebs lautet die lineare Kostenfunktion $K(x) = 10x + 20\,000$. Der Verkaufspreis für eine ME beträgt 50,— GE. Der Break-even-Punkt ist zu ermitteln.

Lösung:
Da $p = 50$, gilt: $E(x) = 50x$

Im Break-even-Punkt gilt:

$$\begin{aligned} E(x) &= K(x) \\ 50x &= 10x + 20\,000 \\ 40x &= 20\,000 \\ x &= 500 \end{aligned}$$

Der Break-even-Punkt liegt bei 500 ME.

Wir erkennen: Der Gewinn wächst mit zunehmender Menge. Gilt dies nur für lineare Kostenfunktionen?

Betrachten wir die nebenstehende Figur: Die s-förmige Gesamtkostenkurve wird von der linearen Erlösfunktion 2-mal geschnitten. Bei der sogenannten **Gewinngrenze** sind Erlöse und Kosten ebenfalls gleich hoch. Bei größeren Produktionsmengen wird ein Verlust erzielt.

Welche Menge führt zum maximalen Gewinn? Wir lösen dieses Problem mit Hilfe der Differenzialrechnung. Für den Gewinn gilt:

$G(x) = p \cdot x - K(x)$, $G(x)$ soll ein Maximum werden.

$G'(x) = p - K'(x) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{p = K'(x)}$ (in Worten: Preis = Grenzkosten).

Dieses Kriterium kann für s-förmige Kostenfunktionen 2-mal erfüllt sein.

Aus $G''(x) = -K''(x) < 0 \Leftrightarrow K''(x) > 0$ folgt, dass die optimale Produktionsmenge im progressiv verlaufenden Bereich der Gesamtkostenkurve liegen muss.

---

[1]) Die Bestimmung der Gewinnschwelle wird in der Literatur auch **„Break-Even-Analyse"** genannt.

Beispiel:

Die Kostenfunktion eines Betriebs lautet $K(x) = 0{,}0007x^3 - 0{,}63x^2 + 360x + 289\,000$. Der Verkaufspreis beträgt 1200,— GE/ME.

Man berechne **a)** den maximalen Gewinn **b)** die Grenzen des Gewinnbereichs.

Lösung:

a) $G(x) = p \cdot x - K(x) = 1200x - (0{,}0007x^3 - 0{,}63x^2 + 360x + 289\,000)$

$G(x) = -0{,}0007x^3 + 0{,}63x^2 + 840x - 289\,000$

$G'(x) = -0{,}0021x^2 + 1{,}26x + 840 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-1{,}26 \pm \sqrt{1{,}26^2 + 4 \cdot 0{,}0021 \cdot 840}}{-0{,}0042} = \ldots$$

$\mathbf{x_1 = 1000 \quad x_2 = -400}$ (Negative Produktionsmengen sind nicht definiert!)

$G''(x) = -0{,}0042x + 1{,}26$

$G''(1000) = -0{,}0042 \cdot 1000 + 1{,}26 = -2{,}94 \Rightarrow$ Es liegt für $x = 1000$ ein Maximum vor.

$G(1000) = -0{,}0007 \cdot 1000^3 + 0{,}63 \cdot 1000^2 + 840 \cdot 1000 - 289\,000 =$

$= \mathbf{481\,000}$

Der maximale Gewinn beträgt 481 000,— GE. Er wird bei einer Produktionsmenge von 1000 ME erzielt.

b) Es muss $G(x) = 0$ gelten. Wir setzen für x einige Werte ein:

x	0	100	200	300
G(x)	−289 000	−194 400	−101 400	800

Die Nullstelle der Gewinnfunktion liegt nahe bei 300. Wir wenden das NEWTONsche Näherungsverfahren an.

$x_0 = 300$

$x_1 = x_0 - \frac{G(x_0)}{G'(x_0)} = 300 - \frac{800}{1029} = 299{,}22255$

$x_2 = 299{,}22255 - \frac{0{,}00033}{1028{,}9987} = 299{,}22255$

Wir erhalten als Gewinnschwelle 299,22255.

$(-0{,}0007x^3 + 0{,}63x^2 + 840x - 289\,000) : (x - 299{,}22255) = -0{,}0007x^2 + 0{,}4205442x + 965{,}83631$

$-(-0{,}0007x^3 + 0{,}2094558x^2)$

$0{,}4205442x^2 + 840x$

$-(0{,}4205442x^2 - 125{,}83631x)$

$965{,}83631x - 289\,000$

$-(965{,}83631x - 289\,000{,}004)$

$0{,}004$ Rest

Die quadratische Gleichung $-0{,}0007x^2 + 0{,}4205442x + 965{,}83631 = 0$ hat die Lösungen $x_1 = 1512{,}8241$ und $x_2 = -912{,}04666$. **Die Gewinngrenze liegt daher bei 1512,8241 ME.**

Da als Produktionsmenge nur ganze Zahlen in Frage kommen, ergibt sich ein **Gewinnbereich von 300 bis einschließlich 1512 ME.**

Bemerkung: Die Gewinnschwelle ist immer **auf-**, die Gewinngrenze immer **abzurunden**.

Betrachten wir die nebenstehende Figur: Für die Erlösfunktion $E_1(x)$ existiert ein Gewinnbereich. Dieser ist umso kleiner, je kleiner der Preis p — und damit der Anstieg der Erlösgeraden — ist.

Für die Funktion $E_2(x)$ gibt es keinen Gewinnbereich mehr. Es gibt nur mehr einen Punkt, in dem die Gesamtkosten gerade gedeckt sind.

Diesen Punkt kennen wir bereits: das **Betriebsoptimum**. Der Preis ist genauso hoch wie das Durchschnittskostenminimum. Aus diesem Grund spricht man auch vom **kostendeckenden Preis**.

Vom Psychotechnischen Institut Wien erhielten wir den nachstehenden Kommentar:

„Die Überlegungen dieses Abschnitts zum Gewinn gehen davon aus, daß beliebige Mengen zu einem Fixpreis abgesetzt werden können (sog. ***extrem elastische Nachfrage****). In der Realität ist dies kaum jemals so und die abzusetzende Menge (Nachfrage) hängt vom Verkaufspreis ab. Dies kann bis zu einer Situation gehen, in der eine fast konstante Menge zu weit variierenden Preisen verkauft werden kann (etwa Grundnahrungsmittel), solange keine Kräfte außerhalb des Marktes (etwa amtliche Preisregelungen) eingreifen. Wir sprechen dann von einer* ***extrem unelastischen Nachfrage****.*

Die Abhängigkeit zwischen Preis und Nachfrage ist im wesentlichen nur empirisch (durch Marktforschung, Marktbeobachtung etc.) zu bestimmen und läßt sich nicht so analysieren, wie wir es für die Kosten durchführten — vor allem im modernen Konsumsektor.

Einige Gründe dafür:

- *Fast alle Konsumgüter sehen sich heute einem Konkurrenzumfeld gegenüber — man denke an das Waschmittelregal in einem Supermarkt. Der Käufer hat daher fast immer die Wahl zwischen untereinander* ***substituierbaren (austauschbaren) Produkten****. Die Entscheidung für ein bestimmtes Produkt wird von vielen Faktoren (Werbung, Packungsgestaltung etc.) beeinflußt, von denen der Preis nur einer ist. Der Preis eines Konkurrenzproduktes kann sich natürlich auch entscheidend auf den Absatz auswirken.*
- *Die Kaufentscheidung erfolgt oft aus unbewußten Motiven heraus und keineswegs rational. Zwei Beispiele dazu:*
  - *Oft werden Schuhe um öS 899,— angeboten, also knapp unterhalb einer* ***Preisschwelle*** *— und nicht um öS 901,—. Um diesen Preis würde wesentlich weniger verkauft werden, auch wenn die beiden Preise rational gesprochen kaum unterschiedlich sind. Mathematisch ausgedrückt, hat die Nachfragekurve bei öS 900,— eine* ***Unstetigkeitsstelle****.*
  - *Auch wenn man rational erwarten würde, daß die Nachfragekurve* ***monoton fällt*** *(einem höheren Preis eine geringere Nachfrage entspricht), ist dies nicht immer so. Bei typischen Luxus- und Prestigegütern kann ein hoher Preis ein wesentlicher Bestandteil des „Glamours" eines Produkts sein, wodurch bei hohen Preisen („teures, exklusives Produkt, nicht jeder kann sich das leisten") sogar mehr gekauft wird als bei niedrigen („billiger Schund, Massenware").*

    Die Nachfragekurve kann also Maxima und Minima aufweisen, allerdings nur in Sonderfällen.

In der modernen Marktforschung sind Testmethoden entwickelt worden, mit denen die Abhängigkeit der Nachfrage nach einem bestimmten Produkt vom eigenen Preis und vom Preis der Konkurrenzprodukte untersucht werden kann. Eine so ermittelte Nachfragekurve ist im nebenstehenden Diagramm enthalten."

Extrem elastische Nachfrage:

Extrem unelastische Nachfrage:

Durch die Umrechnung von Schilling auf Euro gingen die im nebenstehenden Kommentar genannten „Schwellenpreise" zunächst verloren. Mit der Zeit haben sich jedoch neue Schwellenpreise gebildet.

Warum eigentlich verkauft ein Unternehmer seine Ware zu einem **ganz bestimmten** Preis? Er richtet sich nach der Konkurrenz: Setzt er seinen Preis hinauf, besteht die Gefahr, dass er alle Kunden an jene Unternehmer verliert, die den gleichen Artikel billiger verkaufen. Umgekehrt wird er seinen Preis senken, wenn die Konkurrenz den Preis senkt. Er nimmt also den jeweiligen Marktpreis als gegeben an und bestimmt jene Menge, die er unter diesen Umständen gewinnmaximierend produzieren und verkaufen kann. Man sagt auch: **Der Unternehmer verhält sich als Mengenanpasser.**

Angenommen Computer kosten morgen nur noch halb so viel wie heute. Die Nachfrage wird um mehr als 50% steigen. Die Preissenkung hätte also eine größere relative Nachfrageerhöhung zur Folge. Man spricht in einem solchen Fall von einer **elastischen Nachfrage**.

Anders verhält es sich, wenn z. B. der Zuckerpreis von heute auf morgen um 50% fällt. Kaum jemand wird deswegen seinen Kaffee gleich um 50% stärker süßen. Die Preissenkung hätte in diesem Fall eine geringere Nachfrageerhöhung zur Folge. Es liegt eine **unelastische Nachfrage** vor.

Ein Monopolist braucht hingegen keine Konkurrenz zu fürchten. Er kann seinen Preis als Aktionsparameter einsetzen. Doch auch hier gibt es Grenzen, da die Kunden nicht bereit sein werden, zu jedem Preis zu kaufen.

Wie schon erwähnt, gibt es zwischen Preis und nachgefragter Menge Zusammenhänge, die durch die sogenannte **Nachfragefunktion** dargestellt werden. In diesem Zusammenhang interessiert uns das Verhältnis zwischen **relativer Nachfrageänderung** und **relativer Preisänderung**, die sogenannte **Preiselastizität der Nachfrage**, die wir mit η bezeichnen wollen.

Die Preiselastizität der Nachfrage gibt

— die relative Erhöhung der nachgefragten Menge bezogen auf eine relative Preissenkung bzw.

— die relative Verringerung der nachgefragten Menge bezogen auf eine relative Preiserhöhung an.

Unter der **Preiselastizität der Nachfrage** (kurz **Elastizität** genannt) versteht man das Verhältnis zwischen relativer Nachfrageänderung und relativer Preisänderung. Rechnerisch bestimmt man die Elastizität, indem man — ausgehend von der Nachfragefunktion $p(x)$[1] — in folgende Formel einsetzt:

$$\eta = -\frac{p(x)}{x} : p'(x)$$

Der für η errechnete Wert ist wie folgt zu interpretieren:

$\eta < 1$: unelastische Nachfrage (Eine Preisänderung bewirkt eine relativ geringere Nachfrageänderung.)

$\eta = 1$: weder elastisch noch unelastisch bzw. Übergang zwischen unelastischer und elastischer Nachfrage

$\eta > 1$: elastische Nachfrage (Eine Preisänderung bewirkt eine relativ größere Nachfrageänderung.)

Beispiel:

Durch Marktbeobachtung wurde für ein Produkt die Nachfragefunktion $p(x) = 350 - 0{,}5x$ bestimmt. Man berechne die Elastizität für **a)** $x = 280$ **b)** $x = 350$ **c)** $x = 420$ und interpretiere die Ergebnisse.

Lösung:

$$\eta = -\frac{350 - 0{,}5x}{x} : (-0{,}5) = \frac{700}{x} - 1$$

a) $x = 280 \Rightarrow \eta = 1{,}5 \Rightarrow$ elastische Nachfrage

b) $x = 350 \Rightarrow \eta = 1 \Rightarrow$ Übergang zwischen elastischer und unelastischer Nachfrage

c) $x = 420 \Rightarrow \eta = 0{,}67 \Rightarrow$ unelastische Nachfrage

---

[1]) Genau genommen liegt eine Funktion $x(p)$ vor, da die nachgefragte Menge vom Preis abhängig ist. Es ist jedoch üblich, Mengeneinheiten auf der Abszisse und Geldeinheiten auf der Ordinate einzuzeichnen und mit der Umkehrfunktion $p(x)$ zu rechnen.

Wie bestimmt man den maximalen Gewinn bzw. die Grenzen des Gewinnbereichs, wenn der Preis nicht konstant ist, sondern in Form einer Nachfragefunktion gegeben ist?

Nun: Wir erhalten die Erlösfunktion $E(x) = p(x) \cdot x$ und setzen diese – wie gewohnt – in den Zusammenhang $G(x) = E(x) - K(x)$ ein und können die weiteren Berechnungen analog zu den bisher dargestellten Beispielen durchführen.

Es folgt nun ein Beispiel zur Bestimmung der Kosten- und Nachfragefunktion.

Beispiel:

Ein Monopolist erzielt bei einem Verkaufspreis von 132,96 GE/ME und einer Produktionsmenge von 173 ME den maximalen Gewinn von 13612,5 GE. Bei einem Verkaufspreis von 53,4 GE/ME würde der Betrieb bei einer Produktionsmenge von 260 ME zum Grenzbetrieb.

Man bestimme für diesen Betrieb eine quadratische Kostenfunktion und eine lineare Nachfragefunktion.

Lösung:

Zunächst werden die in der Angabe angesprochenen Funktionen angeschrieben:

$K(x) = ax^2 + bx + c$ $\overline{K}(x) = ax + b + \frac{c}{x}$ $\overline{K}'(x) = a - \frac{c}{x^2}$

$p(x) = \alpha x + \beta$ $G(x) = \alpha x^2 + \beta x - ax^2 - bx - c$ $G'(x) = 2\alpha x + \beta - 2ax - b$

Dann werden die gegebenen Bedingungen analysiert und in die „Sprache der Mathematik" übertragen.

Gegebene Bedingung	Übertragung in die „Sprache der Mathematik"	
Bei einer Produktionsmenge x = 173 beträgt der Verkaufspreis p = 132,96:	$p(173) = 132{,}96$:	$132{,}96 = 173\alpha + \beta$
Bei einer Produktionsmenge x = 173 beträgt der Gewinn G = 13612,5:	$G(173) = 13612{,}5$:	$13612{,}5 = 29929\alpha + 173\beta - 29929a - 173b - c$
Bei einer Produktionsmenge x = 173 wird der maximale Gewinn erzielt:	$G'(173) = 0$:	$0 = 346\alpha + \beta - 346a - b$
Bei einer Produktionsmenge x = 260 betragen die Stückkosten $\overline{K} = 53{,}4$:	$\overline{K}(260) = 53{,}4$:	$53{,}4 = 260a + b + \frac{c}{260}$
Bei einer Produktionsmenge x = 260 liegt das Minimum der Stückkosten:	$\overline{K}'(260) = 0$:	$0 = a - \frac{c}{67600}$

Das Gleichungssystem hat die Lösungen $\alpha = -0{,}48$, $\beta = 216$, $a = 0{,}02$, $b = 43$ und $c = 1352$.

Wir erhalten daher die quadratische Kostenfunktion $K(x) = 0{,}02x^2 + 43x + 1352$ und die lineare Nachfragefunktion $p(x) = -0{,}48x + 216$.

AUFGABEN

941. Im nachstehenden Mengendiagramm ist A die Menge der Ausgaben, V die Menge der Aufwendungen und K die Menge der Kosten. Die folgende Tabelle ist zu vervollständigen:

Menge	ausgedrückt durch A, V und K	verbale Beschreibung
a) M_1	$A \setminus (V \cup K)$	Ausgaben, die weder Aufwand noch Kosten darstellen
b) M_2		
c) M_3		
d) M_4		
e) M_5		
f) M_6		
g) M_7		

942. Ein Betrieb hat für die Erzeugung seiner Ware folgende Kosten: Für Material, Lohn und Energieverbrauch fallen 35,— GE/ME an. Die Herstellung erfolgt mit Hilfe einer gemieteten Maschine. Die monatliche Miete beträgt 8000,— GE. Die monatliche Produktionskapazität beträgt 1500 ME.

a) Die Kostenfunktion ist in Abhängigkeit von der erzeugten Menge x aufzustellen.

b) Es ist eine Definitionsmenge anzugeben.

c) Man wähle einen geeigneten Maßstab und stelle die Kostenfunktion in einem rechtwinkeligen Koordinatensystem dar.

943. Quadratische Kostenfunktionen der Form $K(x) = ax^2 + bx + c$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$ können sowohl zur Darstellung degressiver als auch progressiver Kostenverläufe verwendet werden. Woran kann man anhand einer **konkreten** quadratischen Kostenfunktion erkennen, welcher Kostenverlauf beschrieben wird?

Anleitung: Man überlege, wie die erste bzw. zweite Ableitung der Kostenfunktion verläuft.

944. Der „s-förmige" Kostenverlauf wird durch Polynomfunktionen dritten Grads der Form $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ gut beschrieben.

a) Die Kostenkehre ist allgemein (d. h. durch die Koeffizienten a, b, c, d) auszudrücken.

b) Die Kostenkurve darf keine Extrema aufweisen. Welcher Zusammenhang zwischen den Koeffizienten a, b, und c muss gelten?

Anleitung: $K'(x) = 0$ führt auf eine quadratische Gleichung, die keine reellen Lösungen haben darf.

c) Der Koeffizient c ist immer positiv. Welche Vorzeichen haben a und b?

945. In einem Betrieb wurden folgende Gesamtkosten in Abhängigkeit von der Produktionsmenge festgestellt:

x (in Mengeneinheiten)	4	8	12	16	20
K(x) (in Geldeinheiten)	690	900	1100	1310	1530

a) Man bestimme mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate eine **(1)** lineare **(2)** quadratische **(3)** kubische Kostenfunktion (Koeffizienten auf drei Dezimalstellen genau).

b) Man vergleiche für alle drei in **a)** erhaltenen Funktionen die wahren Kosten mit den berechneten (auf zwei Dezimalstellen genau) und entscheide durch Berechnung der Fehlerquadratsummen, welche dieser Funktionen die gegebenen Kosten am genauesten beschreibt.

946. Für die nachstehende Gesamtkostenfunktion K(x) ist das Betriebsoptimum sowie die zugehörigen minimalen Durchschnittskosten je Stück zu berechnen. Die rechte Spalte ist — entsprechend der Arbeitsanweisung und in Analogie zur linken Spalte — auf einem separaten Blatt zu vervollständigen:

$K(x) = 0{,}005x^3 - 0{,}07x^2 + 40x + 15000$	$K(x) = 0{,}01x^3 - 0{,}2x^2 + 40x + 140000$

Wir bestimmen die Durchschnittskostenfunktion $\overline{K}(x) = \frac{K(x)}{x}$.

$\overline{K}(x) = 0{,}005x^2 - 0{,}07x + 40 + \frac{15000}{x}$	$\overline{K}(x) = \ldots$

Da $\overline{K}(x)$ beim Betriebsoptimum den kleinsten Wert annimmt, setzen wir $\overline{K}'(x) = 0$ und berechnen x:

$\overline{K}'(x) = 0{,}01x - 0{,}07 - \frac{15000}{x^2} = 0 \quad \vert \cdot x^2$	$\overline{K}'(x) = \ldots = 0$
$0{,}01x^3 - 0{,}07x^2 - 15000 = 0$	

Die Berechnung führt auf eine Gleichung dritten Grads, die wir mit Hilfe des NEWTONschen Näherungsverfahrens lösen. Wir fassen die linke Seite der Gleichung als Funktion f(x) auf und berechnen f′(x):

$f(x) = 0{,}01x^3 - 0{,}07x^2 - 15000$	$f(x) = \ldots$
$f'(x) = 0{,}03x^2 - 0{,}14x$	$f'(x) = \ldots$

Zur Bestimmung des Startwerts ermitteln wir einige Funktionswerte, wobei bewusst „größere x-Schritte" gewählt werden:

x	0	100	200
f(x)	−15000	−5700	62000

x	0	100	200
f(x)	…	…	…

Wir erkennen: Der gesuchte Wert liegt zwischen 100 und 200. Wir wählen jenen x-Wert als Startwert, dessen Funktionswert näher bei Null ist und führen einige Iterationen nach der Formel

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

durch:

$x_0 = 100$	$x_0 = \ldots$
$x_1 = 100 - \frac{-5700}{286}$	
⋮	
$\mathbf{x_1 = 119{,}93007}$	
$x_2 = 119{,}93007 - \frac{1242{,}9823}{414{,}70644}$	
⋮	
$\mathbf{x_2 = 116{,}93281}$	
$x_3 = 116{,}93281 - \frac{31{,}423851}{393{,}82788}$	
⋮	
$\mathbf{x_3 = 116{,}85302}$	

Die Anzahl der erzeugten ME ist im Allgemeinen ganzzahlig. Wir können das Verfahren jetzt abbrechen und überprüfen, ob tatsächlich ein Minimum vorliegt:

$\overline{K}''(x) = 0{,}01 + \frac{2 \cdot 15000}{x^3}$

$K''(116{,}85302) = 0{,}01 + \frac{2 \cdot 15000}{116{,}85302^3} = \ldots$

$\overline{K}''(x) > 0$. Es liegt ein Minimum vor.

946. (Fortsetzung)

Da jedoch nur ganzzahlige Werte für x sinnvoll sind, setzen wir die vorangehende und die nachfolgende ganze Zahl in $\overline{K}(x)$ ein:

$\overline{K}(116) = 0{,}005 \cdot 116^2 - 0{,}07 \cdot 116 + 40 + \frac{15\,000}{116}$

$\vdots$

$\overline{K}(116) = 228{,}47$

$\overline{K}(117) = 0{,}005 \cdot 117^2 - 0{,}07 \cdot 117 + 40 + \frac{15\,000}{117}$

$\vdots$

$\overline{K}(117) = 228{,}46$

Das Betriebsoptimum liegt bei einer Produktionsmenge von 117 ME. Die minimalen Durchschnittskosten betragen 228,46 GE/ME[1].

Bemerkung: Es gibt hier keine weiteren reellen Lösungen der Gleichung dritten Grads. Auf die Darstellung des entsprechenden Nachweises (Division durch $(x - x_1)\ldots$) wollen wir hier verzichten. Wie der nachstehende Graph zeigt, hat $\overline{K}(x)$ nur an einer Stelle einen Extremwert.

Bei den folgenden Aufgaben ist das Durchschnittskostenminimum für die gegebenen Kostenfunktionen zu berechnen:

947. a) $K(x) = 0{,}01x^3 - 0{,}75x^2 + 50x + 300$ **b)** $K(x) = 0{,}05x^3 - x^2 + 10x + 8000$

948. a) $K(x) = 0{,}002x^3 - 0{,}3x^2 + 28x + 3700$ **b)** $K(x) = 0{,}001x^3 - 1{,}2x^2 + 500x + 10\,000$

949. a) $K(x) = 0{,}001x^3 - 1{,}5x^2 + 800x + 11\,500$ **b)** $K(x) = 0{,}003x^3 - 2x^2 + 450x + 20\,000$

950. a) $K(x) = 0{,}004x^3 - 2x^2 + 340x + 240\,000$ **b)** $K(x) = 0{,}006x^3 - 2{,}5x^2 + 360x + 330\,000$

951. Für das Durchschnittskostenminimum gilt: $K'(x) = \overline{K}(x)$. Dieser Zusammenhang ist mit Hilfe der Differenzialrechnung herzuleiten.

Anleitung: Man setze $\overline{K}(x) = \frac{K(x)}{x}$ und differenziere nach der Quotienten- und Kettenregel.

952. Es ist zu zeigen, dass für eine lineare Kostenfunktion $K(x) = ax + b$ kein Betriebsoptimum errechnet werden kann.

Bei den folgenden Aufgaben ist für die lineare Kostenfunktion K(x) und den Verkaufspreis p in GE/ME zu berechnen, bei welcher Menge die Gewinnschwelle liegt und wie hoch in diesem Fall Erlös bzw. Kosten sind.

953. a) $K(x) = 45x + 3000,\ p = 60$ **b)** $K(x) = 23x + 1521,\ p = 36$

954. a) $K(x) = 25x + 1000,\ p = 30$ **b)** $K(x) = 11x + 3800,\ p = 30$

955. a) $K(x) = 18x + 1120,\ p = 25$ **b)** $K(x) = 5x + 10\,000,\ p = 21$

956. a) $K(x) = 40x + 4500,\ p = 70$ **b)** $K(x) = 27x + 32\,000,\ p = 35$

957. a) $K(x) = 10x + 28\,000,\ p = 24$ **b)** $K(x) = 12x + 18\,000,\ p = 48$

---

[1] In dieser Aufgabe ergeben sich bei einer geringfügigen Abweichung vom Betriebsoptimum nur sehr kleine Kostenzuwächse. Man überprüfe dies unter der Annahme, dass aus produktionstechnischen Gründen nur Vielfache von 10 als Mengeneinheit in Frage kommen.

Bei den folgenden Aufgaben ist **(1)** der kostendeckende Preis **(2)** der Gewinnbereich **(3)** der maximale Gewinn **(4)** die Kostenkehre (nur bei Kostenfunktionen dritten Grads) zu berechnen:

958. a) $K(x) = 0{,}15x^2 + 25x + 54\,000$, $p = 250$ **b)** $K(x) = 0{,}001x^2 + 53x + 810$, $p = 56$

959. a) $K(x) = 0{,}02x^2 + 120x + 12\,800$, $p = 160$ **b)** $K(x) = 0{,}01x^2 + 26x + 90\,000$, $p = 135$

960. a) $K(x) = 0{,}1x^2 + 50x + 490$, $p = 100$ **b)** $K(x) = 0{,}02x^2 + 44x + 5000$, $p = 145$

961. a) $K(x) = 0{,}005x^2 + 48x + 5000$, $p = 74$ **b)** $K(x) = 0{,}5x^2 + 40x + 6050$, $p = 650$

962. a) $K(x) = 0{,}02x^2 + 66x + 11250$, $p = 100$ **b)** $K(x) = 0{,}05x^2 + 11x + 18\,000$, $p = 120$

963. a) $K(x) = 0{,}001x^3 - 0{,}2x^2 + 180x + 36\,000$, $p = 500$ **b)** $K(x) = 0{,}005x^3 - 0{,}75x^2 + 54x + 1805$, $p = 112{,}50$

964. a) $K(x) = 0{,}0005x^3 - 0{,}15x^2 + 115x + 6250$, $p = 160$ **b)** $K(x) = 0{,}01x^3 - 1{,}5x^2 + 77x + 640$, $p = 110$

965. a) $K(x) = 0{,}002x^3 - 0{,}6x^2 + 65x + 8000$, $p = 140$ **b)** $K(x) = 0{,}01x^3 - 0{,}9x^2 + 130x + 5780$, $p = 250$

966. a) $K(x) = 0{,}001x^3 - 0{,}09x^2 + 21x + 1100$, $p = 48{,}30$ **b)** $K(x) = 0{,}006x^3 - 0{,}9x^2 + 50{,}8x + 7776$, $p = 310$

967. Durch Marktbeobachtung wurde für einen Monopolartikel folgende Nachfragefunktion bestimmt: $p(x) = 100 - 2x$.

a) Man berechne die Elastizität für **(1)** $x = 5$ **(2)** $x = 25$ **(3)** $x = 45$ **(4)** $x = 50$ und interpretiere die Ergebnisse.

b) Bei welchem Preis besteht nach diesem Produkt keine Nachfrage mehr?
Anleitung: Man berechne $p(0)$. Dieser Preis wird auch **Maximalpreis** genannt.

c) Welche Menge kann maximal abgesetzt werden?

Anleitung: Man berechne die Nachfrage bei $p(x) = 0$. Diese Menge wird **Sättigungsmenge** genannt. Wie es zu diesem Phänomen kommt, stelle man sich am Beispiel **Salz** vor. Selbst wenn man Salz verschenkt, kann nicht eine unendlich große Menge davon konsumiert werden. Nach einer bestimmten Menge ist die Nachfrage nach Salz gesättigt und niemand hat das Bedürfnis, noch mehr Salz zu erhalten.

968. Durch Marktbeobachtung ergibt sich für einen Monopolartikel: Bei einem Preis von 72 GE/ME lässt sich erwarten, dass der Absatz 40 ME beträgt und dass bei einer relativen Preissenkung die relative Absatzsteigerung gleich groß sein wird.

a) Welchen Wert hat die Absatzelastizität bei einem Preis von 72 GE/ME?

b) Wie lautet die lineare Nachfragefunktion $p(x) = ax + b$?

c) Wie lautet die quadratische Nachfragefunktion $p(x) = ax^2 + bx + c$, wenn zusätzlich bekannt ist, dass bei einem Preis von 135 GE/ME ein Absatz von 10 ME zu erwarten ist?

d) Wie lautet die Nachfragefunktion der Form $p(x) = \frac{a}{x+b} + c$, wenn zusätzlich bekannt ist, dass bei einem Preis von 135 GE/ME ein Absatz von 10 ME zu erwarten ist?

e) Man berechne für die in **b)**, **c)** und **d)** ermittelten Nachfragefunktionen den Maximalpreis und die Sättigungsmenge.

969. a) Die Preiselastizität der Nachfrage wurde als Verhältnis zwischen relativer Mengen- und relativer Preisänderung definiert. Man stelle diesen Sachverhalt unter Verwendung der Variablen x = nachgefragte Menge, Δx = absolute Mengenänderung, p = Preis, Δp = absolute Preisänderung dar.

b) Was kann man über die Vorzeichen der in **a)** verwendeten Variablen aussagen?

c) In Aufgabe **a)** wurde die sogenannte **Bogenelastizität** bestimmt. Mathematisch liegt ein **Differenzenquotient** vor. Durch geeigneten **Grenzübergang** ist die Elastizität für eine infinitesimale absolute Preisänderung dp zu bestimmen.

Bemerkung: Der so ermittelte Wert wird **Punktelastizität** genannt.

d) In die in **c)** ermittelte Formel ist für p die Nachfragefunktion $p(x)$ einzusetzen.

970. Die Nachfragefunktion für einen Monopolartikel lautet: $p(x) = 0{,}01x^2 - 2{,}6x + 160$

a) Wie groß sind der Maximalpreis und die Sättigungsmenge? Der Definitionsbereich für diese Nachfragefunktion ist in der Form $a \leqslant x \leqslant b$ anzugeben.

b) Wie groß ist der Preis anzusetzen, wenn der Absatz 20 ME betragen soll?

c) Welcher Absatz lässt sich erwarten, wenn ein Preis von 72 GE/ME festgesetzt wird?

d) Man berechne die Absatzelastizität bei einem Preis von 135 GE/ME und gebe an, ob der Absatz elastisch oder unelastisch ist.

e) Wie lauten die Funktionen für den Erlös $E(x)$ und für den Grenzerlös $E'(x)$? Der Definitionsbereich dieser Funktionen ist in der Form $a \leqslant x \leqslant b$ anzugeben.

f) Nullstellen der Erlösfunktion?

g) Bei welchem Absatz und bei welchem Preis ergibt sich der maximale Erlös und wie groß ist er?

h) Man stelle die Funktionen $p(x)$, $E(x)$ und $E'(x)$ grafisch in **einem** Koordinatensystem dar.

Bemerkung: Auf der Ordinatenachse sind verschiedene Maßstäbe für die beiden verschiedenen Größen GE und GE/ME zu verwenden.

971. Die Nachfragefunktion für einen Monopolartikel lautet $p = \frac{43200}{x + 50} - 24$.

a) Man berechne den Maximalpreis und die Sättigungsmenge.

b) Die zugehörige Erlösfunktion $E(x)$ und ihr Definitionsbereich sind anzugeben.

c) Bei welchem Preis und bei welchem Absatz ergibt sich der maximale Erlös und wie groß ist er?

Bei den folgenden Aufgaben sind für einen Monopolbetrieb die Kostenfunktion $K(x)$ und die Nachfragefunktion $p(x)$ gegeben. Man ermittle **(1)** die gewinnmaximierende Menge und den zugehörigen Preis (**COURNOTscher Punkt**[1]) **(2)** den maximalen Gewinn **(3)** die erlösmaximierende Menge und den zugehörigen Preis **(4)** den maximalen Erlös **(5)** die Elastizität im COURNOTschen Punkt **(6)** die Sättigungsmenge **(7)** die Grenzen des Gewinnbereichs.

972. a) $K(x) = 28x + 900$, $p(x) = 480 - 0{,}5x$ **b)** $K(x) = 48x + 600$, $p(x) = 192 - 1{,}2x$

973. a) $K(x) = 12x + 76\,050$, $p(x) = 800 - 2x$ **b)** $K(x) = 63x + 31\,104$, $p(x) = 720 - 1{,}5x$

974. a) $K(x) = 16x + 5760$, $p(x) = 608 - 1{,}6x$ **b)** $K(x) = 10x + 7744$, $p(x) = 147 - 0{,}25x$

975. a) $K(x) = 6x + 7840$, $p(x) = 400 - 0{,}1x$ **b)** $K(x) = 9x + 6050$, $p(x) = 70 - 0{,}005x$

976. a) $K(x) = 5x + 1690$, $p(x) = 90 - 0{,}025x$ **b)** $K(x) = 118x + 405$, $p(x) = 200 - 0{,}2x$

977. $K(x) = -0{,}005x^2 + 84x + 115\,200$, $p(x) = 520 - 0{,}13x$

978. $K(x) = -0{,}01x^2 + 141x + 21\,870$, $p(x) = 510 - 0{,}085x$

979. $K(x) = 0{,}02x^2 + 43x + 1352$, $p(x) = 216 - 0{,}48x$

---

[1]) Benannt nach **Antoine August COURNOT** (1801—1877), französischer Philosoph, Mathematiker und Nationalökonom.

Vermischte Aufgaben

980. Für die Gesamtkosten eines Artikels in einer Produktionsperiode gilt die folgende Kostenfunktion: $K(x) = 0{,}1x^3 - 1{,}8x^2 + 14x + 15$.

Die Kapazitätsgrenze liegt bei 16 Mengeneinheiten.

a) Wie groß sind die Fixkosten F?

b) Wie lauten die Funktionen der variablen Kosten $K_v(x)$, der Durchschnittskosten $\overline{K}(x)$, der variablen Durchschnittskosten $\overline{K}_v(x)$ und der Grenzkosten $K'(x)$?

Bemerkung: Die variablen Kosten werden auch **Teilkosten** genannt.

c) Welche Bedeutung hat die Steigung der Verbindungsgeraden vom Koordinatenursprung zum jeweiligen Punkt der **(1)** Gesamtkurve $K(x)$ **(2)** Teilkostenkurve $K_v(x)$?

d) Bei welcher Produktionsmenge ist die Kostenkehre?

e) Das Betriebsoptimum ist auf 3 Dezimalstellen zu berechnen.

f) Man berechne jene Produktionsmenge x_{min}, bei der die variablen Durchschnittskosten am kleinsten sind.

Bemerkung: Diese Menge wird **Betriebsminimum** genannt.

g) Man zeichne die Funktionskurven der Vollkosten $K(x)$ und der Teilkosten $K_v(x)$ in **einem** Koordinatensystem und ermittle grafisch das Betriebsoptimum und das Betriebsminimum.

h) Die Funktionskurven für die Durchschnittskosten $\overline{K}(x)$, die variablen Durchschnittskosten $\overline{K}_v(x)$ und die Grenzkosten $K'(x)$ sind in **einem** Koordinatensystem einzuzeichnen. Welche besondere Produktionsmengen sind die Abszissen der Schnittpunkte $S_1 = \overline{K}(x) \cap K'(x)$ und $S_2 = \overline{K}_v(x) \cap K'(x)$?

981. Von den Produktionskosten, die sich in einer Produktionsperiode bei der Erzeugung eines Artikels ergeben, ist bekannt: Der Fixkostenanteil ist 300 GE. Werden 10 ME produziert, so haben die Gesamtkosten $K(x)$ den Wert 800 GE. Die Grenzkosten haben bei 10 ME ihren Minimalwert 40 GE/ME.

Wie lautet die Gesamtkostenfunktion dritten Grads für diesen Artikel?

982. Die Funktion für die Gesamtkosten, die sich bei der Herstellung eines Artikels pro Produktionsperiode ergeben, lautet $K(x) = ax^2 + 20x + 100$, wobei die Kapazitätsgrenze bei 9 ME liegt.

Man berechne den Wert des Koeffizienten a, wenn die Grenzkosten $K'(x)$ die konstante Steigung **a)** $k = -2$ **b)** $k = 0$ **c)** $k = 2$ haben und gebe die Kostenfunktion für $K(x)$ an. Außerdem sind die Maximalkosten und die Produktionsmenge, bei der sie entstehen, grafisch und rechnerisch zu ermitteln.

983. Die Abhängigkeit der Grenzkosten von der Erzeugungsmenge der Produktionsperiode lautet: $K'(x) = 4x + 5$.

Das Betriebsoptimum ergibt sich bei 10 ME.

Die Funktionsgleichungen für die Gesamtkosten $K(x)$, die Teilkosten $K_v(x)$, die Durchschnittskosten $\overline{K}(x)$ und die Durchschnittsteilkosten $\overline{K}_v(x)$ sind anzugeben.

984. Die Kostenfunktion eines Unternehmens lautet: $K(x) = 0{,}1x^3 - 1{,}8x^2 + 14x + 15$. Die Kapazitätsgrenze liegt bei 16 ME. Der Preis beträgt 10,50 GE/ME.

a) Man berechne auf 3 Dezimalstellen den Absatz, der zum maximalen Gewinn führt sowie den maximalen Gewinn.

b) Die Grenzen des Gewinnbereichs sind zu berechnen.

c) Man berechne auf 3 Dezimalstellen den Absatz, der zum maximalen Deckungsbeitrag führt sowie den maximalen Deckungsbeitrag.

Anleitung: Der sogenannte **Deckungsbeitrag** ist die Differenz zwischen Erlös und variablen Kosten.

d) Die Deckungsbeitragsschwelle und die Deckungsbeitragsgrenze sind auf 3 Dezimalstellen zu berechnen.

e) Die Funktionskurven für die Gesamtkosten $K(x)$, die Teilkosten $K_v(x)$, den Erlös $E(x)$, den Gewinn $G(x)$ und den Deckungsbeitrag $D(x)$ sind in **einem** Koordinatensystem einzuzeichnen. Man bezeichne die Menge, bei der sich der maximale Gewinn (x_{Gmax}) und der maximale Deckungsbeitrag (x_{Dmax}) ergibt.

985. Ein Betrieb stellt ein Spezialprodukt her, dessen Produktion (Ausbringung) von der Laufzeit des Produktionsprozesses abhängt. Nach einer bestimmten Zeit wird die Produktion abgebrochen und die Anlage neu mit Rohstoffen beschickt. Diese Neubeschickung ist mit Umrüstkosten von 75500,— Euro verbunden und benötigt 16 Stunden Zeit, in der die Produktion ruht. Die Gesamtausbringung bis zum Zeitpunkt x nach dem Neustart des Produktionsprozesses lässt sich durch die Funktion $M(x) = 2500x - 1{,}9x^2$ beschreiben. Pro Stunde Laufzeit entstehen variable Kosten in der Höhe von 300,— Euro (Energiekosten, Wartungskosten, etc.). Die zusätzlichen Fixkosten (unabhängig von der Laufzeit) betragen 14500,— Euro. Jede Produktionseinheit erfährt beim Herstellungsprozess einen Wertzuwachs von 1,90 Euro (Differenz aus Einkaufspreis des Rohmaterials und Verkaufspreis des Endprodukts).

a) Welche Laufzeit ermöglicht die mengenmäßig maximale durchschnittliche Produktion (Ausbringung)?

b) Für welche Laufzeit ergeben sich minimale Durchschnittskosten?

c) Welche Laufzeit bringt den maximalen Gewinn pro Zeiteinheit?

d) Welche Laufzeit bringt den maximalen Gewinn pro Mengeneinheit?

986. Eine Firma erzeugt Behälter in Form von Doppelkegeln. Diese sollen einen Inhalt von einem Liter haben.

a) Wie sind die Maße zu wählen, damit der Materialaufwand möglichst gering wird?

b) Die Behälter werden aus 1 mm dickem Eisenblech hergestellt. Die Dichte beträgt 7,8 kg/dm^3, der Preis pro kg 0,23 Euro. Die Verarbeitungskosten pro Behälter betragen 0,02 Euro, die Fixkosten des Betriebes 2000,— Euro. Wie lautet die lineare Kostenfunktion?

c) Wie groß sind Gesamt- und Stückkosten bei 140000 Stück?

d) Wie hoch ist der Preis anzusetzen, wenn bei 140000 Stück ein Gewinn von 4500,— Euro erreicht werden soll?

e) Wie lautet die Gewinnfunktion, wenn der Verkaufspreis $p = 0{,}50$ Euro beträgt?

f) Wie groß ist bei diesem Preis der Gewinn bei 140000 Stück?

987. Es wurden folgende Gesamtkosten in Abhängigkeit von der Produktionsmenge festgestellt:

x [ME]	1	2	3	4	5
K [GE]	134,5	152,1	174	191,8	219,4

a) Man bestimme die Gleichung der Kostenfunktion durch lineare und quadratische Regression (Koeffizienten auf Tausendstel).

b) Man vergleiche für beide Funktionen die wahren Kosten mit den berechneten (auf Zehntel gerundet) und entscheide durch Berechnung der Fehlerquadratsumme, welche dieser Funktionen die gegebenen Kosten genauer beschreibt.

c) Man berechne mit der genaueren Funktion den maximalen Gewinn, wenn der Verkaufspreis für dieses Produkt 38,2 GE beträgt.

988. Ein Monopolist arbeitet nach folgenden Angaben:
Grenzerlös $E'(x) = 200 - 8x$
Grenzkosten $K'(x) = 0{,}3x^2 - 4x + 25$
Gewinnschwelle $x_{G_1} = 10$ ME

a) $E(x) = ?$, $p(x) = ?$

b) $K(x) = ?$, Fixkosten $F = ?$

c) COURNOTscher Punkt und maximaler Gewinn = ?

d) Kostenkehre = ?

e) Gewinngrenze $x_{G_2} = ?$

f) Betriebsoptimum $x_0 = ?$ (auf 2 Dezimalen genau)

g) Man stelle die Erlös- und Kostenfunktion grafisch dar. (10 ME ≙ 5 cm, 1000 GE ≙ 5 cm)

989. Für einen Monopolartikel ergab die Marktbeobachtung folgende Nachfragefunktion:
$p(x) = 160 - 2{,}6x + 0{,}01x^2$.
Für die Erzeugung dieses Artikels gilt die folgende Kostenfunktion:
$K(x) = 0{,}2x^2 + 19x + 1300$.

a) Man berechne die Koordinaten des COURNOTschen Punkts (x_C, p_C) und den maximalen Gewinn.

b) Man berechne die Gewinnschwelle und die Gewinngrenze.

c) Man berechne jenen Preis, für den der Betrieb zu einem Grenzbetrieb wird.

990. Bei einem Marktpreis von 1,1 GE/ME liegt die Gewinngrenze bei einer Absatzmenge von 5 ME. Der maximale Gewinn wird bei einer Absatzmenge von 3,5 ME erzielt. Bei einer Produktionsmenge von 9 ME belaufen sich die Gesamtkosten auf 12,7 GE.

a) Wie lautet die quadratische Kostenfunktion für diesen Betrieb?

b) Man berechne das Betriebsoptimum und die minimalen Stückkosten.

991. Ein Betrieb würde bei einem Marktpreis von 270 GE/ME bei einer Produktionsmenge von 100 ME zum Grenzbetrieb. Bei einer Produktionsmenge von 200 ME betragen die Grenzkosten 470 GE/ME.

a) Wie lautet die quadratische Kostenfunktion für diesen Betrieb?

b) Man berechne für einen Marktpreis von 320 GE/ME die Grenzen des Gewinnbereichs.

992. Bei einem Monopolbetrieb entstehen die minimalen Stückkosten von 110 GE/ME bei einer Produktionsmenge von 2000 ME. Die Gewinngrenze wird bei 4000 ME erreicht. Der maximale Umsatz von 490000 GE wird bei einer Absatzmenge von 3500 ME erzielt.

a) Man bestimme für diesen Betrieb eine quadratische Kostenfunktion und eine lineare Nachfragefunktion.

b) Wie groß ist die Absatzelastizität im COURNOTschen Punkt?

993. Bei einem Monopolbetrieb beträgt die Absatzelastizität im COURNOTschen Punkt (400, 100) bei einem Maximalgewinn von 10400 GE 5. Das Betriebsoptimum wird bei einer Produktionsmenge von 200 ME erreicht.

a) Man bestimme für diesen Betrieb eine quadratische Kostenfunktion und eine lineare Nachfragefunktion.

b) Bei welchen Absatzmengen liegen die Grenzen des Gewinnbereichs?

994. Bei einem Monopolbetrieb liegt die Grenze zwischen unelastischer und elastischer Nachfrage bei einer Absatzmenge von 1125 ME. Bei einer Produktionsmenge von 500 ME sind die Grenzkosten von 250 GE/ME gleich dem Grenzerlös. Bei einer Produktionsmenge von 400 ME sind die Grenzkosten von 236 GE/ME gleich den Stückkosten.

a) Man bestimme für diesen Betrieb eine quadratische Kostenfunktion und eine lineare Nachfragefunktion.

b) Wie groß ist der maximale Gewinn?

995. Bei einem Betrieb werden die minimalen Grenzkosten von 142 GE/ME bei einer Produktionsmenge von 10 ME erreicht. Bei einem Marktpreis von 334 GE/ME wird bei einer Absatzmenge von 18 ME der Grenzerlös gleich den Grenzkosten, wobei ein Stückgewinn von 58 GE/ME erzielt wird.

a) Man bestimme eine Polynomfunktion dritten Grads, die den Zusammenhang zwischen Produktionsmenge und Gesamtkosten beschreibt.

b) Bei welchem Marktpreis würde der Betrieb zu einem Grenzbetrieb werden?

996. Für einen Monopolbetrieb gilt für die Gesamtkostenfunktion $K(x) = 0{,}005x^2 + 80x + 80000$, wobei x die Produktionsmenge bedeutet.

a) Man ermittle eine lineare Nachfragefunktion, wenn bei einem Preis von 150 GE/ME die Elastizität 7,5 beträgt und die Grenze zwischen unelastischer und elastischer Nachfrage bei einer Absatzmenge von 17000 ME liegt.

b) Wie lauten die Koordinaten des COURNOTschen Punkts?

997. Ein Fertigungsbetrieb erzielt bei der Produktionsmenge von 150 ME den maximalen Gewinn von 412 GE. Der Gewinnbereich beginnt bei 80 ME. Die proportionalen Kosten betragen 0,86 GE/ME.

a) Man stelle für diesen Betrieb eine lineare Kostenfunktion und eine lineare Nachfragefunktion auf.

b) Man berechne die obere Grenze des Gewinnbereichs.

998. Ein Betrieb erzielt bei einer Produktionsmenge von 50 ME den maximalen Erlös von 25000 GE und bei einer Produktionsmenge von 49 ME den maximalen Gewinn von 23610 GE.

a) Man stelle für diesen Betrieb eine lineare Kostenfunktion und eine lineare Nachfragefunktion auf.

b) Man berechne die Grenzen des Gewinnbereichs.

c) Wie groß ist die Absatzelastizität im COURNOTschen Punkt?

999. In einem Monopolbetrieb ist bei einer Absatzmenge von 90 ME die Elastizität 6. Bei einer Absatzmenge von 40 ME kann ein Preis von 59 GE/ME erzielt werden. Die Stückkosten bei einer Produktionsmenge von 30 ME betragen 51 GE/ME. Die Fixkosten betragen 720 GE. Bei einer Absatzmenge von 100 ME wird ein Gewinn von 480 GE erzielt.

a) Man bestimme für diesen Betrieb eine quadratische Kostenfunktion und eine lineare Nachfragefunktion.

b) Man berechne das Betriebsoptimum und das Minimum der Stückkosten?

c) Wie lauten die Koordinaten des COURNOTschen Punkts und wie groß ist der maximale Gewinn?

d) Man berechne die Grenzen des Gewinnbereichs.

e) Bei welcher Menge und welchem Preis entsteht der größte Erlös und wie groß ist dieser?

f) Wie groß ist die Elastizität im COURNOTschen Punkt?

1000. In einem Monopolbetrieb ist bei einer Absatzmenge von 16000 ME die Elastizität 1,125. Der Höchstpreis beträgt 170 GE/ME. Die COURNOTsche Menge ist 4500 ME. Bei einer Produktionsmenge von 10000 ME betragen die Grenzkosten 180 GE/ME. Bei einer Produktionsmenge von 5000 ME betragen die Gesamtkosten 605000 GE.

a) Man bestimme für diesen Betrieb eine quadratische Kostenfunktion und eine lineare Nachfragefunktion.

b) Man berechne das Betriebsoptimum und das Minimum der Stückkosten.

c) Bei welchem Preis wird der maximale Gewinn erzielt? Wie groß ist dieser?

d) Man berechne die Grenzen des Gewinnbereichs.

e) Bei welcher Menge und welchem Preis entsteht der größte Erlös? Wie groß ist dieser?

f) Wie groß ist die Absatzelastizität im COURNOTschen Punkt?

1001. Die Grenzkosten eines Betriebs betragen bei Betriebsstillstand 20 GE/ME, bei einer Produktionsmenge von 3 ME betragen sie 17 GE/ME. Bei einem Verkaufspreis von 28 GE/ME wird beim Absatz von 4 ME der maximale Gewinn von 18 GE erzielt.

a) Man bestimme eine Polynomfunktion dritten Grads, die den Zusammenhang zwischen Produktionsmenge und Gesamtkosten beschreibt.

b) Bei welcher Produktionsmenge liegt die Kostenkehre?

c) Wie groß sind die kleinsten Grenzkosten?

MODERNE HILFSMITTEL IN DER MATHEMATIK: DER TI-92

In diesem Abschnitt soll der Gebrauch der in der Praxis üblichen Rechenhilfen geübt werden. Das rechnerunterstützte Arbeiten in der Mathematik wird anhand des TI-92 (kurz: TR) vorgeführt. Arbeiten Sie bitte die folgenden Kapitel mit Ihrem TR durch!

1. Zahlenfolgen und Grenzwerte

Beispiel:

Die ersten 5 Glieder und das 100. Glied der nachstehenden Folgen sind zu ermitteln:

a) $a_n = 5 - 3(n-2)$ **b)** $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ **c)** $c_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Lösung:

Wir könnten mit jedem gewöhnlichen Taschenrechner die Werte n = 1, 2, 3, 4 und 5 in die gegebenen Ausdrücke einsetzen. Um das 100. Glied zu erhalten, ist einfach n = 100 im jeweiligen Term zu substituieren. Eleganter ist es freilich, die speziellen Befehle Ihres TR zu nutzen!

a)

Tastenfolge: 2nd MATH 3 1 5 − 3 (N − 2) , N , 1 , 5) ENTER
seq(

Anfangswert

seq (5 − 3(n − 2), n, 1, 5)

Folge

Variable

Endwert

seq(ist auffindbar durch 2nd MATH 3 1[1].

Um das 100. Glied zu ermitteln, ist die obige Eingabe nur geringfügig zu ändern:

seq(5 − 3(n − 2), n, 100, 100)

◆ ENTER wandelt Brüche in Dezimalzahlen um!

Bezüglich der Eingabe für das 100. Glied vgl. Außenspalte:
$a_{100} = -289$

b) $seq((1/2)^\wedge n, n, 1, 5) = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$

$seq((1/2)^\wedge n, n, 100, 100) = \frac{1}{1267650600228229401496703205376}$

c) $seq((1+1/n)^\wedge n, n, 1, 5) = 2, \frac{9}{4}, \frac{64}{27}, \frac{625}{256}, \frac{7776}{3125}$

$seq((1+1/n)^\wedge n, n, 100, 100) = 2{,}70481382942$

[1]) Sie erhalten die Anzeige **seq(** und müssen daher die Eingabe mit einer schließenden runden Klammer beenden.

Bildschirmeingabe, nachdem Sie F3 drücken:

Bewegen Sie nun den Cursor mittels Cursortaste zu 3 und drücken Sie ENTER oder drücken Sie einfach 3:[1]

Das ∞-Zeichen findet sich am TR als Zweitfunktion der Taste J.

Beispiel:

Es ist zu bestimmen, welchen Wert die nachstehenden Folgen annehmen, wenn n gegen ∞ strebt.

a) $a_n = 5 - 3(n-2)$ **b)** $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ **c)** $c_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Lösung:

Das Streben der Folge nach ∞ wird mit dem Limes-Befehl (englisch „limit") angezeigt:

a) Tastenfolge:

F3 3 5 − 3 (N − 2) , N , 2nd ∞) ENTER

limit (

Wir erhalten den Wert $-\infty$.

b) limit((1/2)^n, n, ∞) = 0

c) limit((1+1/n)^n, n, ∞) = e

$e \approx 2{,}718281828459045...$

Summenzeichen Σ

Mathematiker verwenden das Summenzeichen Σ um die Summe einer Folge in kompakter Form anzuschreiben. Diese oft verwendete Schreibweise ist leicht verständlich, wenn Sie das folgende Beispiel durchdenken:

$5^2+6^2+7^2+8^2+\ldots+100^2$

Schreibweise mittels Summenzeichen:

$$\sum_{n=5}^{n=100} n^2$$

letztes Glied (n=100); Summe der Quadratzahlen (n^2); erstes Glied (n=5)

Das Summenzeichen Σ findet sich am TR als Zweitfunktion der Taste 4.[1]

[1]) Sie erhalten die Anzeige **limit(** bzw. **Σ(** und müssen daher die Eingabe jeweils mit einer schließenden runden Klammer beenden.

Beispiel:

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$ ist mittels Summenzeichen anzuschreiben.

b) Die Summe des in **a)** gegebenen Terms ist mit dem TR zu berechnen.

Lösung:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

b)

TEXAS INSTRUMENTS TI-92

F1 Algebra Calc Other PrgmIO Clear a–z…

$\sum_{n=1}^{\infty}\left((1/2)^n\right)$ 1

Σ((1/2)^n,n,1,∞)

MAIN DEG AUTO FUNC 1/30

Tastenfolge mit dem Σ-Zeichen:

2nd Σ (1 ÷ 2) ^ N , N , 1 , 2nd ∞) ENTER

Σ(

Summe der ersten 10 Glieder der Folge:

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{1024}=\frac{1023}{1024}$

F1 Algebra Calc Other PrgmIO Clear a–z…

$\sum_{n=1}^{10}\left((1/2)^n\right)$ $\frac{1023}{1024}$

Σ((1/2)^n,n,1,10)

MAIN DEG AUTO FUNC 1/30

oder

F1 Algebra Calc Other PrgmIO Clear a–z…

sum(seq((1/2)^n, n, 1, 10, 1)) $\frac{1023}{1024}$

sum(seq((1/2)^n,n,1,10,1))

Folge

Variable

Anfangswert

Endwert

Wertzuwachs[1]

Selbstverständlich kann man auch die Summe einer **endlichen Folge** mit dem TR berechnen. Hierbei kann entweder **sum(seq(** oder Σ verwendet werden. Versuchen Sie die folgenden Eingaben auf Ihrem TR nachzuvollziehen:

$\sum_{n=1}^{100} n$ 5050

Σ(n,n,1,100)

MAIN DEG AUTO FUNC 1/30

sum(seq(n, n, 1, 100)) 5050

sum(seq(n,n,1,100))

MAIN DEG AUTO FUNC 1/30

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(3^{-n}\right)$ 1/2

Σ(3^-n,n,1,∞)

MAIN DEG AUTO FUNC 1/30

sum(seq(ist eine andere Variante, um die Summe einer endlichen Folge zu berechnen, wenn Sie das Summenzeichen Σ nicht verwenden wollen:

2nd MATH 3 6 2nd MATH 3 1 [2]

sum(seq(

Manchmal ist es vorteilhaft, die Berechnung auf zwei verschiedene Arten durchzuführen, um das Ergebnis zu überprüfen.

[1]) Wenn der Wertzuwachs „1" ist, kann die Eingabe der Ziffer 1 ersatzlos entfallen: sum(seq((1/2)^n, n, 1, 10)).

[2]) In diesem Fall müssen Sie die Eingabe mit zwei schließenden runden Klammern beenden.

2. Differenzialrechnung

Bildschirmanzeige, nachdem Sie F3 drücken:

Da sich der Cursor bei 1 befindet, drücken Sie ENTER – oder drücken Sie einfach 1:

Sie erhalten die Anzeige **d(** und müssen daher die Eingabe – Funktionsterm, Variable – mit einer schließenden runden Klammer beenden.

Symbolisches Ergebnis:

Gibt es noch eine andere Möglichkeit als F3 1 um die Anzeige **d(** zu erzielen? Ja, Sie können auch 2nd 8 drücken:

Die Eingaben F3 1 und 2nd 8 sind vollkommen gleichwertig.

Beispiel:

Gegeben ist $y = 3x^2 - 4x + 7$. Gesucht ist $f'(3)$.

Lösung:

Tastenfolge: F3 1 3 X ^ 2 − 4 X + 7 , X) 2nd | X = 3 ENTER

d(

Resultat: **14**

Variable, nach der zu differenzieren ist

Sie sehen: Differenzieren ist mit dem TR sehr einfach. Im obigen Beispiel erhielten Sie ein numerisches Ergebnis, d. h. die Ableitung der Funktion in einem bestimmten Punkt. Mit dem TR können Sie sogar symbolische Ergebnisse erhalten – vgl. Sie in diesem Zusammenhang die Bildschirmdarstellung in der Außenspalte. Und es ist auch nicht schwierig, höhere Ableitungen von irgendwelchen komplizierten Funktionen zu finden. Das nächste Beispiel zeigt Ihnen, wie man vorzugehen hat.

Beispiel:

$y = x^x$; $y'' = ?$

Lösung:

Tastenfolge:

F3 1 X ^ X , X) ENTER ← liefert die erste Ableitung

F3 1 ⌃ ENTER , X) ENTER ← liefert die zweite Ableitung

Beispiel:
Das Minimum einer durch ihre Gleichung gegebenen Funktion $y = x^2 - 5x + 4$ ist mittels TR zu bestimmen!

Lösung:
Extremwerte (Minimum, Maximum) können mit dem TR einfach berechnet werden. Im Hinblick auf das gegebene Beispiel ist wie folgt vorzugehen:

(1) Die Funktion mit der Gleichung $y = x^2 - 5x + 4$ ist für die grafische Darstellung zu definieren. Die geschieht indem Sie [◆] [Y=] drücken und den Term $x^2 - 5x + 4$ eingeben. (vgl. Außenspalte)

(2) Im Grafikbildschirm ist [F5] zu drücken und „3: Minimum" zu wählen.

(3) Die untere Grenze ist zu wählen: Mittels [◀] ist der Cursor zur unteren Grenze, also zu einem Punkt der links von dem zu bestimmenden Minimum liegt, zu bewegen und [ENTER] zu drücken.

(4) Die obere Grenze ist zu wählen: Mittels [▶] ist der Cursor zur oberen Grenze, also zu einem Punkt der rechts von dem zu bestimmenden Minimum liegt, zu bewegen und [ENTER] zu drücken.

(5) Der Cursor ist auf der Lösung zu finden (in unserem Fall ist der Cursor direkt am Minimum) und die Cursor-Koordinaten, also die Koordinaten des Minimums, werden angezeigt.

Zugegeben: Die Anweisungen **(1)** bis **(5)** sind leicht hingeschrieben, aber schwer verständlich, wenn sie jemand zum ersten Mal liest. Aus diesem Grund geben wir die exakte Tastenfolge an:

[◆] [Y=] [X] [^] [2] [−] [5] [X] [+] [4] [ENTER] [◆] [GRAPH]

[F5] [3] [◀] [ENTER] [▶] [▶] [▶] … [▶] [ENTER]

Resultat: $x = 2{,}5$; $y = -2{,}25$ (Vgl. Sie die Bildschirmanzeige in der Außenspalte!)

[F5]

[◆] [Y=]

Um in den Grafikbildschirm zu gelangen, ist [◆] [GRAPH] zu drücken!

Minimum
xc:2.5 yc:-2.25

Wenn Sie nach dem letzten Beispiel die Tasten [◆] [Y=] drücken, erhalten Sie folgende Anzeige:

y1=x^2-5·x+4

Um das Maximum einer Funktion zu bestimmen, ist ähnlich wie im vorigen Beispiel vorzugehen. Einzig in **(2)** ist statt „3: Minimum" der Befehl „4: Maximum" zu wählen. Und um eine oder mehrere Nullstelle(n) zu berechnen, ist in **(2)** der Befehl „2: Zero" zu drücken. (Selbstverständlich könnten Sie für die Nullstellenbestimmung auch den **solve**-Befehl verwenden!) Versuchen Sie jetzt die folgenden Bildschirmanzeigen für die Funktion mit der Gleichung $y = x^3 - 3x^2 + 1$ nachzuvollziehen:

Maximum

Maximum
xc:0. yc:1.

Nullstelle(n)

Zero
xc:.65270364 yc:0.

Sie können mittels der Taste [▲] $x^2 - 5x + 4$ unterlegen und danach diesen Ausdruck mit [CLEAR] löschen.

Danach kann $x^3 - 3x^2 + 1$ eingegeben werden!

Weitere Tastenfolge:

[◆] [GRAPH] [F5] usw.

Zitat aus der Bedienungsanleitung Ihres TRs, wie ein Wendepunkt in einem Intervall ermittelt wird:

1. Drücken Sie im Grafikbildschirm F5, und wählen Sie „8: Inflection".
2. Verwenden Sie nötigenfalls ⌄ und ⌃, um die gewünschte Funktion zu wählen.
3. Definieren Sie die untere Grenze für x. Setzen Sie den Cursor anhand von ‹ und › an die untere Grenze, oder geben Sie deren x-Wert ein.
4. Drücken Sie ENTER. Die Marke ▶ am oberen Bildschirmrand kennzeichnet die untere Grenze.
5. Definieren Sie die obere Grenze und drücken Sie ENTER.

Der Cursor wird auf den Wendepunkt (falls vorhanden) im Intervall gesetzt und dessen Koordinaten werden angezeigt.

Bildschirmanzeige, nachdem Sie F3 drücken:

```
F1 | F2 Algebra | F3 Calc | F4 Other | F5 PrgmIO | F6 Clear a-z...
1:d( differentiate
2:∫( integrate
3:limit(
4:Σ( sum
5:Π( product
6:fMin(
7:fMax(
8:arcLen(
9:taylor(
A:nDeriv(
B:nInt(
TYPE OR USE ←→↑↓ + [ENTER]=OK AND [ESC]=CANCEL
```

Bewegen Sie nun den Cursor mittels Cursortaste ⌄ zu 2 und drücken Sie ENTER – oder drücken Sie einfach 2:[1]

```
F1 | F2 Algebra | F3 Calc | F4 Other | F5 PrgmIO | F6 Clear a-z...
1:d( differentiate
2:∫( integrate
3:limit(
4:Σ( sum
5:Π( product
6:fMin(
7:fMax(
8:arcLen(
9:taylor(
A:nDeriv(
B:nInt(
∫(
MAIN   DEG AUTO   FUNC 0/30
```

```
F1 | F2 Algebra | F3 Calc | F4 Other | F5 PrgmIO | F6 Clear a-z...
■∫(x²)dx          x³/3
∫(x^2,x)
MAIN   DEG AUTO   FUNC 1/30
```

Der TR gibt das Resultat ohne Integrationskonstante C an.

In ähnlicher Form erfolgt die Wendepunktbestimmung: Nachdem Sie F5 gedrückt haben ist der Befehl „8: Inflection" („inflection point" ist der englische Begriff für Wendepunkt!) zu wählen. Die folgenden zwei Bildschirmdarstellungen veranschaulichen die Anzeige für die Funktion mit der Gleichung $y = x^3 - 3x^2 + 1$:

```
F1 | F2 Zoom | F3 Trace | F4 ReGraph | F5 Math | F6 Draw | F7
1:Value
2:Zero
3:Minimum
4:Maximum
5:Intersection
6:Derivatives▸
7:∫f(x)dx
8:Inflection
9:Distance
A:Tangent
B:Arc
C:Shade
MAIN   DEG AUTO   FUNC
```

```
F1 | F2 Zoom | F3 Trace | F4 ReGraph | F5 Math | F6 Draw | F7
Inflection
xc:1.        yc:-1.
MAIN   DEG AUTO   FUNC
```

3. Integralrechnung

Beispiel:

$$\int_0^2 x^2\,dx = ?$$

Lösung:

Tastenfolge:

F3 2 X ^ 2 , X , 0 , 2) ENTER

∫(— x^2 — Variable, nach der zu integrieren ist — untere Grenze — obere Grenze

Resultat: $\frac{8}{3}$

Das Integrieren ist mit dem TR einfacher als die manuelle Integration. Was passiert übrigens, wenn Sie keine Integrationsgrenzen eingeben?

Angenommen die Eingabe lautet: ∫(x^2, x)

Wenn Sie jetzt die ENTER-Taste drücken, berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int x^2 dx$. In der Außenspalte findet sich die zugehörige Bildschirmausgabe.

[1] Sie erhalten die Anzeige ∫(und müssen daher die Eingabe jeweils mit einer schließenden runden Klammer beenden.

Sie sehen: Bestimmte und unbestimmte Integrale lassen sich mit dem TR blitzschnell berechnen. Und der TR lässt Sie auch nicht im Stich, wenn es um kompliziertere Integrale geht:

- Integral durch Substitution
- Partialbruchzerlegung
- Partielle Integration
- Uneigentliche Integrale

} Das alles ist mit dem TR möglich!

Versuchen Sie nun, die nachstehenden Bildschirmanzeigen nachzuvollziehen:

$\int\left((3+4\cdot x)^{1/3}\right)dx \qquad \frac{3\cdot(4\cdot x+3)^{4/3}}{16}$

∫((3+4x)^(1/3),x)

(Integration durch Substitution)

$\int\left(\frac{3}{x^2+3\cdot x+2}\right)dx \qquad -3\cdot\ln\left(\frac{|x+2|}{|x+1|}\right)$

∫(3/(x^2+3x+2),x)

(Partialbruchzerlegung)

$\int\left(\frac{\ln(x)}{x^2}\right)dx \qquad \frac{-\ln(x)}{x}-\frac{1}{x}$

∫(ln(x)/x^2,x)

(Partielle Integration)

$\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{x^2}\right)dx \qquad \infty$

∫(1/x^2,x,-1,1)

(Uneigentliche Integrale)

Gibt es noch einen andere Möglichkeit als F3 2 um die Anzeige ∫(zu erzielen?

Ja, Sie können auch 2nd 7 drücken. Die Eingaben F3 2 und 2nd 7 sind vollkommen gleichwertig.

Das ∫-Zeichen findet sich am TR als Zweitfunktion der Taste 7.

Beispiel:

Man berechne den Inhalt der von den Kurven $y_1=\frac{x^2}{2}+2$ und $y_2=x+6$ begrenzten Fläche A mittels TR.

Lösung:

(1) Die Funktionen y_1 und y_2 sind für die grafische Darstellung zu definieren. Dies geschieht indem Sie ◆ Y= drücken und die Terme $\frac{x^2}{2}+2$ und $x+6$ eingeben. Sie sollten die erste Bildschirmanzeige in der Außenspalte erhalten.

(2) Nun ist der Grafikbildschirm mittels ◆ GRAPH aufzurufen – vgl. Außenspalte!

(3) Anschließend ist F5 5 zu drücken.

Der Cursor „sitzt" auf der Parabel $y_1=\frac{x^2}{2}+2$. Mittels ENTER bestätigen Sie, dass $y_1=\frac{x^2}{2}+2$ die „1st Curve" (erste Kurve) ist, die Sie wählen. Nun blinkt der Cursor auf der Geraden und in der linken unteren Ecke des Bildschirms fragt Sie der TR, ob das die zweite Kurve ist, die Sie wählen: „2nd Curve?" Bestätigung mittels ENTER.

(4) Der TR fragt „Lower Bound?"? Es ist also die untere Grenze zu wählen: Mittels ◀ ist der Cursor zur unteren Grenze, also zu einem Punkt der links von dem ersten zu bestimmenden Schnittpunkt liegt, zu bewegen und ENTER zu drücken.

(5) Der TR fragt „Upper Bound?". Es ist also die obere Grenze zu wählen: Mittels ▶ ist der Cursor zur oberen Grenze, also zu einem Punkt der rechts von dem ersten und links vom zweiten zu bestimmenden Schnittpunkt liegt, zu bewegen und ENTER zu drücken.

(1)
F1 F2 Zoom F3 Edit F4 ✓ F5 All F6 Style
PLOTS
✓y1=$\frac{x^2}{2}+2$
✓y2=x+6
y3=
y4=
y5=
y6=
y7=
y8=
y3(x)=
MAIN DEG AUTO FUNC

(2)
F1 F2 Zoom F3 Trace F4 ReGraph F5 Math F6 Draw F7
MAIN DEG AUTO FUNC

(3)
F1 F2 Zoom F3 Trace F4 ReGraph F5 Math F6 Draw F7
1
1st Curve?
xc: 0. yc:2.
MAIN DEG AUTO FUNC

(4)
F1 F2 Zoom F3 Trace F4 ReGraph F5 Math F6 Draw F7
2
Lower Bound?
xc: -3.5 yc:2.5
MAIN DEG AUTO FUNC

(5)
F1 F2 Zoom F3 Trace F4 ReGraph F5 Math F6 Draw F7
2
Upper Bound?
xc:1.5 yc:7.5
MAIN DEG AUTO FUNC

(6)

Schnittpunkte

(7)

Vom Grafikbildschirm gelangt man mittels [◆] [HOME] zum Home-Bildschirm. Im Home-Bildschirm ist Folgendes einzugeben:

Die Punkte 1. bis 6. in der Bedienungsanleitung folgen übrigens nicht den Erklärungen **(1)** bis **(6)** des Beispiels!

Es ist notwendig, dass Sie das Bogenmaß am TR eingestellt haben, wenn Sie im Rahmen der Infinitesimalrechnung mit trigonometrischen Funktionen arbeiten. Letzteres geschieht mittels

[MODE] ⊙ ⊙ ⊙ ⊙ [1] [ENTER].

(6) Der Cursor befindet sich nun auf dem ersten Schnittpunkt (vgl. Außenspalte) und die Cursor-Koordinaten, also die Koordinaten des Schnittpunktes werden angezeigt: **(–2, 4)**

(7) Nun gilt es den zweiten Schnittpunkt zu ermitteln. Hier ist die entsprechende Tastenfolge:

[F5] [5] [ENTER] [ENTER] ⊙ ⊙ [ENTER] ⊙ ⊙ ⊙ … ⊙ [ENTER]

Koordinaten des zweiten Schnittpunktes: **(4, 10)**

Die zu bestimmende Fläche wurde in der Außenspalte rosa unterlegt.

(8) Die Integrationsgrenzen lauten mithin: $x_1 = -2,\ x_2 = 4$

(9) Zuletzt erfolgt die Flächenberechnung durch Integration:

$$A = \int_{-2}^{4} \left(x + 6 - \frac{x^2}{2} - 2 \right) dx = \ldots \text{TR-Eingabe vgl. Außenspalte!}$$

Resultat: **A = 18**

Sie haben recht: Die Berechnung mit dem TR erscheint aufwendiger als die „manuelle" Berechnung ohne TR. Die Schnittpunkte lassen sich für diese Funktionen händisch leichter bestimmen als mit dem TR. Freilich ist zu bedenken, dass es viel kompliziertere Funktionen gibt – und der TR-Aufwand bleibt der selbe.

Ein Großteil der obigen Erklärungen bezieht sich auf die Ermittlung des Schnittpunkts zweier Funktionen: Punkt **(1)** bis **(7)**. Schauen wir uns doch einfach einmal an, wie dieser Sachverhalt in der Bedienungsanleitung erklärt wird:

Den Schnitt zweier Funktionen in einem Intervall ermitteln:

1. Drücken Sie im Grafikbildschirm [F5] und wählen Sie **„5 : Intersection"**.
2. Wählen Sie, nötigenfalls anhand von ⊙ oder ⊙, die erste Funktion und drücken Sie [ENTER]. Der Cursor geht zur nächsten grafisch dargestellten Funktion über.
3. Wählen Sie die zweite Funktion und wählen Sie [ENTER].
4. Definieren Sie die untere Grenze für x. Setzen Sie den Cursor anhand von ⊙ und ⊙ an die untere Grenze oder geben Sie deren x-Wert ein.
5. Drücken Sie [ENTER]. Die Marke ▶ am oberen Bildschirmrand kennzeichnet die untere Grenze.
6. Definieren Sie die obere Grenze und drücken Sie [ENTER].

   Der Cursor wird auf den Schnittpunkt gesetzt und seine Koordinaten werden angezeigt.

Versuchen Sie die obige Erklärung an Ihrem TR nachzuvollziehen! Anders formuliert: Bestimmen Sie den „weiter links" liegenden Schnittpunkt der Kurven $y_1(x) = 1{,}25x \cdot \cos(x)$ und $y_2(x) = 2x - 7$.

4. Numerische Mathematik und der TI-92

Wir haben bisher unser Augenmerk auf die Berechnung von Gleichungen, Termen, Ableitungen, Integralen usw. gelenkt. Dabei stand die exakte Lösung des Problems im Vordergrund. Nun ist nicht jedes Problem exakt lösbar. Daher muss man sich mit einer **Näherungslösung** begnügen. Beim NEWTONschen Näherungsverfahren (vgl. Seite 83ff) und bei der SIMPSONschen Regel (vgl. Seite 178ff.) haben wir Verfahren kennengelernt, um die Nullstelle bzw. das Integral einer Funktion zu berechnen.

Wir haben das gemacht, ohne uns um die Genauigkeit dieser Methoden den Kopf zu zerbrechen. Da diese Methoden aber nicht immer und auch nicht beliebig genau funktionieren, werden wir uns mit den Möglichkeiten der genaueren **Abschätzung der Fehler**, die bei Berechnung mit diesen Näherungsverfahren passieren, beschäftigen.

4.1 Fehlerabschätzung und Fehlerfortpflanzung

Zuerst wollen wir uns mit der Angabe des Messfehlers bei einer Zahl beschäftigen. Danach soll die Fehlerfortpflanzung untersucht werden.

Beispiel:
Geben Sie den **a)** absoluten **b)** relativen **c)** prozentualen Fehler bei Annäherung der Erdbeschleunigung 9,81 durch 10 an.

Lösung:

a) Der absolute Fehler ergibt sich aus der absoluten Differenz:

$\Delta x = |9{,}81 - 10| = \mathbf{0{,}19}$

b) Der relative Fehler ist dann: $\left|\frac{\Delta x}{x}\right| = \left|\frac{0{,}19}{9{,}81}\right| \approx \mathbf{0{,}02}$

c) Der prozentuale Fehler ist: $0{,}02 \cdot 100\% = \mathbf{2\%}$

Der **absolute Fehler** ist der Absolutbetrag der Differenz von Zahl x und Näherungswert x_N:

$\Delta x = |x - x_N|$

Der **relative Fehler** ist der absolute Fehler geteilt durch die Ausgangszahl (absolut genommen):

$\left|\frac{\Delta x}{x}\right|$

Der **prozentuale Fehler** ist der relative Fehler mal 100 %:

$\left|\frac{\Delta x}{x}\right| \cdot 100\,\%$ **(0,01 = 1 %)**

Beispiel:
Die Messung der Geschwindigkeit eines Autos im Ortsgebiet ergab: $v = 50{,}3 \pm 0{,}5\ \text{km/h}$.

Kann man behaupten, dass der Autofahrer zu schnell gefahren ist?

Dazu berechne man die untere Schranke der angegebenen Geschwindigkeit. Liegt sie unter der 50 km/h-Marke?

Lösung:

Die Antwort ist einfach: $x_u = x - \Delta x = 50{,}3 - 0{,}5 = 49{,}8$

$x_u < 50$.

Man kann nicht sicher behaupten, dass der Autofahrer zu schnell gefahren ist, da die untere Schranke der Geschwindigkeit unter 50 km/h liegt.

Reale Daten werden oft mit der Messungenauigkeit Δx angegeben: $x \pm \Delta x$.

Der minimal mögliche Wert der gegebenen Größe heißt **untere Schranke**: $x_u = x - \Delta x$

Der maximal mögliche Wert der gegebenen Größe heißt **obere Schranke**: $x_o = x + \Delta x$

Die **Relativfehlerdarstellung** mit dem relativen Fehler f ist:

$z = x \cdot (1 \pm f)$

z. B.: $z = 12 \cdot (1 \pm 0{,}05)$

$z = 12 \cdot (1 \pm 5\,\%)$

Beispiel:

Die Angabe der Dicke eines Baums erfolgt mit $d = 65 \pm 2$ cm. Geben Sie den relativen Messfehler an und schreiben Sie die Dicke des Baums in Relativfehlerdarstellung an.

Lösung:

Der relative Fehler ergibt sich aus der Division: $\left|\frac{\Delta d}{d}\right| = \frac{2}{65} \approx 0{,}03$.

Die Gleichung für die Dicke des Baums lautet: $d = 65 \pm 2$.

Dividiert man sie durch 65, so erhält man: $\frac{d}{65} = \frac{65}{65} \pm \frac{2}{65} \approx 1 \pm 0{,}03$.

Multipliziert man diese Gleichung wieder mit 65 kann man die Dicke des Baums mit dem relativen Fehler angeben: $\mathbf{d = 65 \cdot (1 \pm 0{,}03)}$ **cm**

Beispiel:

Der prozentuale Fehler der Temperaturanzeige wird mit 5 % angegeben. Die aktuell angezeigte Temperatur ist 23°. Wie groß sind die obere und die untere Schranke der Temperaturangabe?

Lösung:

Man kann die Temperatur mit dem relativen Fehler $\frac{5}{100}$ anschreiben:

$t = 23 \cdot \left(1 \pm \frac{5}{100}\right)^{\circ} = 23 \pm 1{,}15^{\circ} \approx \mathbf{23 \pm 1^{\circ}}$

Daraus ergeben sich die Schranken zu:

$t_u = 23° - 1° = \mathbf{22°}$ und $t_o = 23° + 1° = \mathbf{24°}$

Bemerkung: Die Angabe des relativen Fehlers genügt meist in einstelliger Form, also hier nur 1° statt 1,15°!

Das **arithmetische Mittel** (bzw. der Mittelwert) m zweier Zahlen a und b ist: $m = \frac{a+b}{2}$

Beispiel:

Aus einer Schätzung des Heizenergiebedarfs geht hervor: Die obere Schranke der Energiemenge beträgt 2500 kWh, die untere Schranke ist 2000 kWh. Geben Sie dies in der Form $x \pm \Delta x$ an!

Lösung:

Der Wert für x ergibt sich aus dem arithmetischen Mittel der beiden Zahlen:

$x = \frac{2000+2500}{2} = 2250$

Der absolute Fehler ergibt sich aus der Differenz zwischen Mittelwert und einem Zahlenwert: $\Delta x = |2250 - 2000| = 250$.

Damit kann man den Heizenergieverbrauch anschreiben:

2250 ± 250 kWh

Wie pflanzen sich nun Fehler in einer längeren Rechnung fort?

Wie zu erwarten ist, werden die absoluten Fehler bei einer Addition addiert. Wie sieht es aber bei den anderen Grundrechnungsarten aus?

Beispiel:

Wie wirken sich die absoluten Fehler bei der **a)** Addition **b)** Subtraktion der Zahlen $x = 40 \pm 5$ und $y = 30 \pm 2$ aus?

Dazu addiere und subtrahiere man die oberen und unteren Schranken der beiden Zahlen auf sinnvolle Art und ermittle daraus die absoluten Fehler!

Lösung:

a) Die Addition der oberen Schranken ergibt:

$x_o + y_o = (40 + 5) + (30 + 2) = 70 + 7 = 77$

Die Addition der unteren Schranken ergibt:

$x_u + y_u = (40 - 5) + (30 - 2) = 70 - 7 = 63$

Zur Angabe der Summe müssen wir nun das arithmetische Mittel dieser Größen und die Differenz vom arithmetischen Mittel und x berechnen (siehe voriges Beispiel):

$z = \frac{77+63}{2} = 70$ und $\Delta z = |70 - 63| = 7$

Daraus ergibt sich für die Summe: $\mathbf{z = x + y = 70 \pm 7}$

b) Die Subtraktion muss nun in der Art erfolgen, dass die obere Schranke des ersten Werts und die untere Schranke des zweiten Werts subtrahiert werden, da dann der größte Wert des Ergebnisses erzielt wird, wie man unschwer überlegen kann:

$x_o - y_u = (40 + 5) - (30 - 2) = 45 - 28 = 17$

Ebenso erhält man die untere Schranke des Ergebnisses:

$x_u - y_o = (40 - 5) - (30 + 2) = 35 - 32 = 3$

Das arithmetische Mittel dieser Größen ergibt: $z = \frac{17+3}{2} = 10$

Der absolute Fehler ist: $\Delta z = |10 - 3| = 7$

Damit ist die Differenz: $\mathbf{z = x - y = 10 \pm 7}$

Schrankendarstellung der Summe von 40 ± 5 und 30 ± 2

Schrankendarstellung der Differenz von 40 ± 5 und 30 ± 2

Absolutfehlerdarstellung der Summe von 40 ± 5 und 30 ± 2

Die Ergebnisse des vorigen Beispiels erhält man auf viel einfachere Weise durch einfache Addition und Subtraktion der Zahlen in folgender Form:

$x + y = (40 \pm 5) + (30 \pm 2) = (40 + 30) \pm (5 + 2) = 70 \pm 7$

Hier werden einfach die Zahlen und die absoluten Fehler für sich addiert.

Bei der Subtraktion werden die Zahlen subtrahiert aber die absoluten Fehler addiert:

$x - y = (40 \pm 5) - (30 \pm 2) = (40 - 30) \pm (5 + 2) = 10 \pm 7$

Daraus lässt sich folgender Satz für die Fehlerfortpflanzung bei Addition und Subtraktion gewinnen:

Lineares Fehlerfortpflanzungsgesetz der Addition und Subtraktion:

Der absolute Fehler Δz der Summe (und der Differenz) zweier Zahlen x und y wird durch Addition der absoluten Fehler Δx und Δy der Ausgangszahlen gewonnen:

$$\Delta z = \Delta x + \Delta y$$

Die Zahlen selber werden addiert (bzw. subtrahiert).

Additions-/Subtraktionsregel:

Beim Addieren und Subtrahieren werden die absoluten Fehler addiert:

$\Delta z = \Delta x + \Delta y$

z. B.: $(5 \pm 1) + (8 \pm 2) = 13 \pm 3$

$(12 \pm 1) - (10 \pm 2) = 2 \pm 3$

50 ± 1
75 ± 2
90 ± 3

Beispiel:

Aus den Angaben für die Länge der Seiten eines Dreiecks soll der Umfang inklusive absolutem Fehler mit Hilfe des linearen Fehlerfortpflanzungsgesetzes ermittelt werden:

$a = 75 \pm 2$ mm, $b = 50 \pm 1$ mm und $c = 90 \pm 3$ mm

Lösung:

Auf Grund des linearen Fehlerfortpflanzungsgesetzes dürfen wir die Seiten einfach addieren und ebenso die absoluten Fehler:

$u = 75 + 50 + 90 = 215$

$u = 2 + 1 + 3 = 6$

$\mathbf{u = 215 \pm 6}$ **mm**

Beispiel:

Berechnen Sie mit Hilfe der Absolutfehlerdarstellung das Volumen von 10 Flaschen Mineralwasser, wenn eine Flasche $1 \pm 0{,}05$ l beinhaltet.

Lösung:

Das Gesamtvolumen ist :

$$V = (1 \pm 0{,}05) + (1 \pm 0{,}05) + \ldots + (1 \pm 0{,}05) =$$
$$= 1 + 1 + \ldots + 1 \pm (0{,}05 + 0{,}05 + \ldots 0{,}05) =$$
$$= 10 \cdot 1 \pm 10 \cdot 0{,}05 = \mathbf{10 \pm 0{,}5\ l}$$

Beispiel:

Zwei Mitschülerinnen werden gemessen: Corina ist $173 \pm 0{,}5$ cm groß, Petra ist $168 \pm 0{,}5$ cm groß.

Wie viel cm überragt Corina Petra?

Lösung:

Gesucht ist die Differenz der Zahlen:

$d = (173 \pm 0{,}5) - (168 \pm 0{,}5) = (173 - 168) \pm (0{,}5 + 0{,}5) = \mathbf{5 \pm 1}$ **cm**

Beispiel:

Von einem kleinen Dorf aus erblickt man zwei Hügel: Der eine liegt 150 ± 2 m, der andere $120 \pm 1{,}5$ m höher als das Dorf.

Um wie viele m ist der erste Hügel höher als der zweite?

Lösung:

$d = (150 \pm 2) - (120 \pm 1{,}5) = (150 - 120) \pm (2 + 1{,}5) = \mathbf{30 \pm 3{,}5}$ **m**

Wir wollen nun Überlegungen bezüglich der Fehlerfortpflanzung bei der Multiplikation anstellen:

Beispiel:

Wie wirken sich die Fehler bei der Multiplikation der Zahlen $x = 50 \pm 5$ m und $y = 100 \pm 5$ m am Beispiel der Flächenberechnung aus?

a) Man multipliziere die oberen und unteren Schranken der beiden Zahlen auf sinnvolle Art und ermittle daraus die absoluten Fehler.

b) Sodann verwandle man die Ausgangszahlen in die Relativfehlerdarstellung, multipliziere sie und bestimme den relativen Fehler.

Lösung:

a) Die Multiplikation der oberen Schranken ergibt:

$$x_o \cdot y_o = (50+5) \cdot (100+5) = 50 \cdot 100 + 5 \cdot 100 + 50 \cdot 5 + 5 \cdot 5 =$$
$$= 5000 + 500 + 250 + 25 = 5775$$

Die Multiplikation der unteren Schranken ergibt:

$$x_u \cdot y_u = (50-5) \cdot (100-5) = 50 \cdot 100 - 5 \cdot 100 - 50 \cdot 5 + 5 \cdot 5 =$$
$$= 5000 - 500 - 250 + 25 = 4275$$

Zur Angabe des Produkts müssen wir nun das arithmetische Mittel dieser Größen und die Differenz vom arithmetischen Mittel und x berechnen:

$$z = \frac{5775+4275}{2} = 5025 \quad \text{und} \quad \Delta z = |5025 - 4275| = 750$$

Daraus ergibt sich für das Produkt: $\mathbf{z = x \cdot y = 5025 \pm 750\ m^2}$

(Statt dem arithmetischen Mittel der Schranken kann man auch das Produkt der Ausgangszahlen 50 und 100 nehmen: $50 \cdot 100 = 5000$)

b) Um den relativen Fehler zu erhalten, müssen wir den absoluten Fehler nur durch die Ergebniszahl dividieren: $750 : 5025 \approx \mathbf{0{,}15} \approx \mathbf{15\,\%}$.

Dies können wir auch mit der Relativfehlerdarstellung der Ausgangszahlen machen:

$$x = 50 \pm 5 = 50 \cdot \left(1 \pm \tfrac{5}{50}\right) = 50 \cdot (1 \pm 0{,}10)$$

$$y = 100 \pm 5 = 100 \cdot \left(1 \pm \tfrac{5}{100}\right) = 100 \cdot (1 \pm 0{,}05)$$

$$x \cdot y = 50 \cdot (1 \pm 0{,}10) \cdot 100 \cdot (1 \pm 0{,}05) = 50 \cdot 100 \cdot (1 \pm 0{,}10) \cdot (1 \pm 0{,}05) =$$
$$= 5000 \cdot (1 \cdot 1 \pm 1 \cdot 0{,}05 \pm 1 \cdot 0{,}10 \pm 0{,}05 \cdot 0{,}10) =$$
$$= 5000 \cdot (1 \pm 0{,}05 \pm 0{,}10 \pm 0{,}005)$$

Wenn man den kleinsten Term in der Klammer weglässt, so erhält man in der Relativ-Fehlerdarstellung:

$$\approx \mathbf{5000 \cdot (1 \pm 0{,}15)\ m^2}$$

Daraus erkennt man, dass die relativen Fehler der Ausgangszahlen addiert werden $(0{,}05 + 0{,}10 = 0{,}15)$

Dieses Beispiel zeigt, dass bei Multiplikation die relativen Fehler (und nicht die absoluten Fehler) addiert werden. Dies gilt auch bei Division.

Multiplikations-/Divisionsregel:
Beim Multiplizieren und Dividieren werden die relativen Fehler addiert:
z. B.:
$10 \cdot (1 \pm \mathbf{0{,}1}) \cdot 30 \cdot (1 \pm \mathbf{0{,}2}) =$
$= 300 \cdot (1 \pm \mathbf{0{,}3})$

Lineares Fehlerfortpflanzungsgesetz der Multiplikation und Division:
Der relative Fehler des Produkts (und des Quotienten) zweier Zahlen x und y wird durch Addition der relativen Fehler $\left|\frac{\Delta x}{x}\right|$ und $\left|\frac{\Delta y}{y}\right|$ der Ausgangszahlen gewonnen: $\left|\frac{\Delta z}{z}\right| = \left|\frac{\Delta x}{x}\right| + \left|\frac{\Delta y}{y}\right|$
Die Zahlen selbst werden multipliziert (bzw. dividiert).

Beispiel:

„Arbeit ist Kraft mal Weg" – so heißt ein Satz der Physik. Wie viel Arbeit verrichtet ein Mensch, der mit 200 N Kraftanwendung einen Weg von 500 m zurücklegt? Die Zahlenangaben sind auf 5 % genau.
Geben Sie die Arbeit in der Relativ- und Absolutfehlerdarstellung an!

Arbeit = Kraft mal Weg
$W = F \cdot s$
(Einheit: Joule)

Lösung:
Der Arbeitssatz wird in der Physik mit Variablen wie Folgt beschrieben: $W = F \cdot s$.
Wir haben gegeben:
$F = 200 \cdot (1 \pm 5\,\%) = 200 \cdot (1 \pm 0{,}05)$ und
$s = 500 \cdot (1 \pm 5\,\%) = 500 \cdot (1 \pm 0{,}05)$.
Daraus ergibt sich mit der Multiplikations-/Divisionsregel:
$W = F \cdot s = 200 \cdot (1 \pm 0{,}05) \cdot 500 \cdot (1 \pm 0{,}05) = 200 \cdot 500 \cdot (1 \pm 0{,}05 \pm 0{,}05) =$
$= 100\,000 \cdot (1 \pm 0{,}10) = 100\,000 \pm 10\,000$
Die Arbeit ist in Relativfehlerdarstellung: $\mathbf{W = 100\,000 \cdot (1 \pm 0{,}10)\ J}$
und in Absolutfehlerdarstellung: $\mathbf{W = 100\,000 \pm 10\,000\ J = 100 \pm 10\ kJ}$

h
M
a
a

Beispiel:

Die Höhe und die Basislänge einer geraden quadratischen Pyramide werden mit $h = 15 \cdot (1 \pm 2\,\%)$ m und $a = 10 \cdot (1 \pm 1\,\%)$ m angegeben.
Wie groß ist das Volumen V der Pyramide in der Relativ- und Absolutfehlerdarstellung?

Lösung:

Die Formel zur Berechnung des Volumens ist: $V = \frac{a^2 \cdot h}{3}$

Die Einsetzung der Zahlen ergibt:

$$V = \frac{10^2(1 \pm 1\%)^2 \cdot 15(1 \pm 2\%)}{3} = \frac{100 \cdot 15}{3} \cdot (1 \pm 1\%) \cdot (1 \pm 1\%) \cdot (1 \pm 2\%) =$$
$$= 500 \cdot (1 \pm 1\% \pm 1\% \pm 2\%) =$$
$= \mathbf{500 \cdot (1 \pm 4\,\%)\ m^3}$ **(prozentuelle Fehlerdarstellung)**
$= \mathbf{500 \cdot (1 \pm 0{,}04)\ m^3}$ **(Relativfehlerdarstellung)**
$= \mathbf{500 \pm 20\ m^3}$ **(Absolutfehlerdarstellung)**

Beispiel:

Der Widerstand wird mit Hilfe des OHMschen Gesetzes berechnet: $R = \frac{U}{I}$. Bei einer Glühlampe fließen $I = 0{,}1$ A Strom bei einer Spannung von $U = 230$ V.

Wie groß ist der Widerstand in der Relativ- und Absolutfehlerdarstellung, wenn die Werte von U und I auf 2 % genau angegeben sind?

Lösung:

Die Berechnung von R ergibt:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{230\cdot(1\pm 0{,}02)}{0{,}1\cdot(1\pm 0{,}02)} = \frac{230}{0{,}1}\cdot(1\pm 0{,}04) = 2300\cdot(1\pm 0{,}04)\,\Omega$$

Das ergibt:

$$\mathbf{R = 2300\cdot(1\pm 4\,\%)\,\Omega = 2300\cdot(1\pm 0{,}04)\,\Omega \approx 2300 \pm 100\,\Omega}$$

Georg Simon OHM
(1759–1854)

Beispiel:

An zwei aufeinander folgenden Tagen wird zwischen 8 und 9 Uhr der Zählerstand des „Stromzählers" (eigentlich Energiezählers) abgelesen.

Die Werte sind $E_1 = 410 \pm 0{,}5$ kWh und $E_2 = 458 \pm 0{,}5$ kWh.

Berechnen Sie daraus die abgegebene Leistung.

Lösung:

Die Leistung P ergibt sich aus der Gleichung $P = \frac{A}{t} = \frac{E}{t}$ (Leistung = Arbeit pro Zeit = Energie pro Zeit). Zuerst berechnen wir die Energie als Differenz der angegebenen Werte, wobei die absoluten Fehler addiert werden (Additions- / Subtraktionsregel):

$$E = E_2 - E_1 = (458 \pm 0{,}5) - (410 \pm 0{,}5) =$$

$$= (458 - 410) \pm (0{,}5 + 0{,}5) = 48 \pm 1$$

Die verstrichene Zeit ist aus der Differenz der Zeiten zu berechnen, wobei man nicht vergessen darf, bei t_2 noch 24 Stunden für den verstrichenen Tag dazuzurechnen (wieder mit der Additions-/Subtraktionsregel):

$t_1 = 8{,}5 \pm 0{,}5$ und $t_2 = 24 + 8{,}5 \pm 0{,}5$.

$$t = (24 + 8{,}5 \pm 0{,}5) - (8{,}5 \pm 0{,}5) = (24 + 8{,}5 - 8{,}5) \pm (0{,}5 + 0{,}5) = 24 \pm 1$$

Daraus berechnen wir den Quotienten – diesmal mit der Multiplikations- / Divisionsregel. Dazu müssen wir beide Zahlen in die Relativ-Fehlerdarstellung umformen:

$$E = 48 \pm 1 = 48\cdot\left(1 \pm \frac{1}{48}\right) \approx 48\cdot(1 \pm 0{,}02)$$

$$t = 24 \pm 1 = 24\cdot\left(1 \pm \frac{1}{24}\right) \approx 24\cdot(1 \pm 0{,}04)$$

$$P = \frac{E}{t} = \frac{48\cdot(1\pm 0{,}02)}{24\cdot(1\pm 0{,}04)} = \frac{48}{24}\cdot(1 \pm 0{,}02 \pm 0{,}04) \approx 2\cdot(1 + 0{,}06) = 2 \pm 0{,}12\text{ kW}$$

Die abgegebene Leistung beträgt also **2 ± 0,12 kW = 2000 ± 120 W**. Das ist die Maximalleistung einer 10A-Sicherung.

4.2 Konditionszahlen und Kondition

Gegeben sei die Funktion $y = f(x)$

z. B.: $y = x^2 + 2x$

x wird Eingangsgröße, y wird Ausgangsgröße genannt.

$$K_x = \left|\frac{\text{rel. Ausgangsänderung}}{\text{rel. Eingangsänderung}}\right| = \left|\frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}}\right|$$

Die **Konditionszahl** K_x ist der Quotient aus relativer Ausgangsänderung durch relative Eingangsänderung:

Ist $K_x > 1$ so ist die Kondition **schlecht**.

Ist $K_x < 1$, so ist die Kondition **gut**.

Bei $K_x = 1$ ist die Kondition **neutral**.

Bei der Berechnung von Termen entstehen Fehler, die sich aus den Eingangsfehlern der Variablen ergeben.

Gehören zu kleinen Eingangsfehlern auch kleine Ausgangsfehler, so spricht man von **„guter Kondition“** des Terms.

Genügt aber eine kleine Änderung der Eingangsvariablen und das Ergebnis ändert sich stark, so spricht man von **„schlechter Kondition“** des Terms.

Der Faktor, mit dem die relative Eingangsänderung multipliziert werden muss, um die relative Ausgangsänderung zu erhalten, nennt man **„Konditionszahl“** des Terms.

Ist die Konditionszahl größer 1, so ist der Term „schlecht konditioniert“, ist sie kleiner als 1, so ist er „gut konditioniert“.

Beispiel:

Berechnen Sie die Konditionszahl K_{50} und die Kondition der dritten Potenz $y = x^3$ für $x = 50 \pm 1$ unter Anwendung des linearen Fehlerfortpflanzungsgesetzes und stellen Sie das Ergebnis in der Absolutfehlerdarstellung $y \pm \Delta y$ dar!

Lösung:

Der relative Eingangsfehler ist: $\left|\frac{\Delta x}{x}\right| = \frac{1}{50} = 0{,}02$

Die dritte Potenz x^3 lässt sich als dreifaches Produkt schreiben: $y = x \cdot x \cdot x$.

Daher müssen wir hier das lineare Fehlerfortpflanzungsgesetz für die Multiplikation anwenden und die relativen Fehler von x dreimal addieren:

$\left|\frac{\Delta y}{y}\right| = 3 \cdot \left|\frac{\Delta x}{x}\right| = 3 \cdot 0{,}02 = 0{,}06$

0,07
0,06
0,05
0,04
0,03
0,02
0,01
0
0,02
0,06
$\left|\frac{\Delta x}{x}\right| \xrightarrow{*3} \left|\frac{\Delta y}{y}\right|$

Damit wird die Konditionszahl: $K_{50} = \left|\frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}}\right| = \frac{0{,}06}{0{,}02} = \mathbf{3}$

Das ist eine **schlechte Kondition**, da die Konditionszahl größer als 1 ist.

Nun berechnen wir das Ergebnis der Funktion:

$y = f(x)$ — $y = x^3 = 50^3 = 125\,000$

$\Delta y = \left|\frac{\Delta y}{y}\right| \cdot y$ — $\Delta y = \left|\frac{\Delta y}{y}\right| \cdot y = 0{,}06 \cdot 125\,000 = 7500$

$y = y \pm \Delta y$ — $\mathbf{y = 125\,000 \pm 7500}$

Beispiel:

Berechnen Sie die Konditionszahl K_{50} und die Kondition der Quadratumfangsberechnung $u = 4 \cdot a$ für $a = 50 \pm 1$ unter Anwendung des linearen Fehlerfortpflanzungsgesetzes. Stellen Sie das Ergebnis in der Form $u \pm \Delta u$ dar!

Lösung:

Der relative Eingangsfehler ist: $\left|\frac{\Delta a}{a}\right| = \frac{1}{50} = 0{,}02$

Der Umfang lässt sich als Summe schreiben: $u = a + a + a + a$

Daher müssen wir hier das lineare Fehlerfortpflanzungsgesetz für die Addition anwenden und die absoluten Fehler von a viermal addieren:

$u = \Delta a + \Delta a + \Delta a + \Delta a = 4 \cdot \Delta a = 4 \cdot 1 = 4$

$u = 4 \cdot a = 4 \cdot 50 = 200$

Der relative Ausgangsfehler ist: $\left|\frac{\Delta u}{u}\right| = \frac{4}{200} = 0{,}02$

Damit wird die Konditionszahl: $K_{50} = \left|\frac{\frac{\Delta u}{u}}{\frac{\Delta a}{a}}\right| = \frac{0{,}02}{0{,}02} = \mathbf{1}$

Das ist eine **neutrale Kondition**, da die Konditionszahl 1 ist.

Das Ergebnis ist: $\mathbf{u = 200 \pm 4}$

0,03 | 0,02 | 0,01 | 0

0,02 0,02

$\left|\frac{\Delta x}{x}\right| \overset{*1}{\rightarrow} \left|\frac{\Delta y}{y}\right|$

Mit der Absolut- und Relativfehlerdarstellung erhält man den relativen Ausgangsfehler so:

$u = 4 \cdot a = 4 \cdot (50 \pm 1) = 200 \pm 4 =$

$= 200 \cdot (1 \pm \mathbf{0{,}02})$

$\left|\frac{\Delta u}{u}\right| = 0{,}02$

Beispiel:

Berechnen Sie die Konditionszahl K_{100} und die Kondition der Wurzelfunktion $y = \sqrt{x}$ für $x = 100 \pm 19$ unter Verwendung der Fehlerschranken y_o und y_u.

Lösung:

Wir berechnen die obere Fehlerschranke unter Verwendung von:

$x_o = x + \Delta x = 100 + 19 = 119$

$y_o = f(x_o) = \sqrt{x + \Delta x} = \sqrt{119} \approx 10{,}9$

Genauso verfahren wir mit der unteren Fehlerschranke:

$x_u = x - \Delta x = 100 - 19 = 81$

$y_u = f(x_u) = \sqrt{x - \Delta x} = \sqrt{81} = 9$

Daraus ergibt sich der relative Fehler der Funktion:

$y = \frac{y_u + y_o}{2} = \frac{9 + 10{,}9}{2} = 9{,}95$

$y = 9{,}95 - 9 = 0{,}95$

Die relativen Fehler sind:

$\left|\frac{\Delta x}{x}\right| = \frac{19}{100} = 0{,}19 \qquad \left|\frac{\Delta y}{y}\right| = \frac{0{,}95}{9{,}95} \approx 0{,}095$

Damit ist die Konditionszahl: $K_{100} = \left|\frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}}\right| = \frac{0{,}095}{0{,}19} = \mathbf{0{,}5}$

Da diese Zahl kleiner als 1 ist, ist das eine **gute Kondition.**

Fehlerschranken der Funktion:

Die untere Fehlerschranke der Funktion ist $y_u = f(x_u)$

Die obere Fehlerschranke der Funktion ist $y_o = f(x_o)$

wobei gilt: $x_u = x - \Delta x$

$x_o = x + \Delta x$

Die Berechnung des relativen Fehler erfolgt mit den Formeln:

$y = \frac{y_u + y_o}{2}$

$\Delta y = y - y_u$

0,2 | 0,18 | 0,16 | 0,14 | 0,12 | 0,1 | 0,08 | 0,06 | 0,04 | 0,02 | 0

0,190 0,095

$\left|\frac{\Delta x}{x}\right| \overset{*0{,}5}{\rightarrow} \left|\frac{\Delta y}{y}\right|$

Beispiel:

Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^2 + 4$

a) Man berechne die Kondition der Funktionsberechnung bei $x = 1$ bezüglich einer Änderung von x um $\Delta x = 0{,}1$

b) Man berechne die Kondition der Funktionsberechnung bei $x = 10$ bezüglich einer Änderung von x um $\Delta x = 1$

Lösung:

a) Wir berechnen die Konditionszahl der Funktion mit den Fehlerschranken:

$x_o = x + \Delta x = 1 + 0{,}1 = 1{,}1$

$y_o = f(x_o) = x_o^2 + 4 = 1{,}1^2 + 4 = 1{,}21 + 4 = 5{,}21$

Genauso verfahren wir mit der unteren Fehlerschranke:

$x_u = x - \Delta x = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$

$y_u = f(x_u) = x_u^2 + 4 = 0{,}9^2 + 4 = 0{,}81 + 4 = 4{,}81$

Daraus ergibt sich der relative Fehler der Funktion:

$y = \frac{y_u + y_o}{2} = \frac{4{,}81 + 5{,}21}{2} = \frac{10{,}02}{2} = 5{,}01$

$\Delta y = 5{,}01 - 4{,}81 = 0{,}20$

Die relativen Fehler sind:

$\left|\frac{\Delta x}{x}\right| = \frac{0{,}1}{1} = 0{,}1 \qquad \left|\frac{\Delta y}{y}\right| = \frac{0{,}20}{5{,}01} \approx 0{,}04$

Damit ist die Konditionszahl: $K_{100} = \left|\frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}}\right| = \frac{0{,}04}{0{,}10} = \mathbf{0{,}4}$

Die Konditionszahl ist kleiner als 1 und daher ist das **gute Kondition**.

$\left|\frac{\Delta x}{x}\right| \xrightarrow{*0{,}4} \left|\frac{\Delta y}{y}\right|$

Verkleinerung der relativen Fehler ⇒ **gute Kondition**

b) Die Fehlerschranken sind hier:

$x_o = x + \Delta x = 10 + 1 = 11$

$y_o = f(x_o) = x_o^2 + 4 = 11^2 + 4 = 121 + 4 = 125$

Genauso geht es mit der unteren Fehlerschranke:

$x_u = x - \Delta x = 10 - 1 = 9$

$y_u = f(x_u) = x_u^2 + 4 = 9^2 + 4 = 81 + 4 = 85$

Daraus ergibt sich der relative Fehler der Funktion:

$y = \frac{y_u + y_o}{2} = \frac{85 + 125}{2} = \frac{210}{2} = 105$

$\Delta y = 105 - 85 = 20$

Die relativen Fehler sind:

$\left|\frac{\Delta x}{x}\right| = \frac{1}{10} = 0{,}1 \qquad \left|\frac{\Delta y}{y}\right| = \frac{20}{105} \approx 0{,}19$

Damit ist die Konditionszahl: $K_{100} = \left|\frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}}\right| = \frac{0{,}19}{0{,}1} = \mathbf{1{,}9}$

Dies ist größer als 1 und daher ist das eine **schlechte Kondition**.

$\left|\frac{\Delta x}{x}\right| \xrightarrow{*1{,}9} \left|\frac{\Delta y}{y}\right|$

Vergrößerung der relativen Fehler ⇒ **schlechte Kondition**

Wir wollen die Ergebnisse der obigen Beispiele nun verallgemeinern:

Wenn $n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist, gilt für Potenzen $y = x^n$: $K_x = |n|$

Für $n = 1$ handelt es sich um eine **neutrale Kondition**.

Für $n < 1$ handelt es sich um eine **gute Kondition**.

Für $n > 1$ handelt es sich um eine **schlechte Kondition**.

Wenn $y = a \cdot x$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, gilt $K_x = |a|$

Für andere Funktionen gilt: Die Kondition ist nicht konstant und muss für jeden x-Wert extra berechnet werden!

Beispiel:

Es ist zu zeigen, dass die Konditionszahl K_x mit der Differenzialrechnung wie Folgt angenähert werden kann:

$$K_x = \left|\frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}}\right| \approx \left|\frac{dy}{dx}\right| \cdot \left|\frac{x}{y}\right| = |y'| \cdot \left|\frac{x}{y}\right|$$

Lösung:

Die Konditionszahl ist $K_x = \left|\frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}}\right| = \left|\frac{\Delta y \cdot x}{\Delta x \cdot y}\right| = \left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right| \cdot \left|\frac{x}{y}\right|$

Der Grenzwert von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ist die Ableitung: $y' = \frac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

somit gilt: $K_x = \left|\frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}}\right| = \left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right| \cdot \left|\frac{x}{y}\right| \approx \left|\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}}\right| \cdot \left|\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}}\right|$

Die Berechnung der Kondition einer Funktion oder eines Rechenverfahrens ist recht mühsam, wenn man alle möglichen Eingabewerte durchprobieren will. Eine schnellere Möglichkeit der Berechnung bietet die Differenzialrechnung. Im Kapitel „Funktionen in mehreren Variablen: 4. Fehlerabschätzung und -fortpflanzung" (vgl. Seite 197ff.) wurde der Weg schon gewiesen. Man muss nur die Ableitung der Funktion $y = f(x)$ bilden und mit $\frac{x}{y}$ multiplizieren und schon erhält man die Konditionszahl.

Beispiel:

Berechnen Sie die Konditionszahl K_x der zweiten Potenz: $y = x^2$ unter Anwendung der Differenzialrechnung und berechnen Sie damit $y \pm \Delta y$ für $x = 10 \pm 1$.

Lösung:

Die Ableitung der Funktion ergibt: $y' = 2x$ und damit wird die Konditionszahl:

$$K_x \approx \left|\frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y}\right| = \left|y' \cdot \frac{x}{y}\right| = \left|2x \cdot \frac{x}{y}\right| = \left|2x \cdot \frac{x}{x^2}\right| = \left|\frac{2x^2}{x^2}\right| = 2$$

für $\mathbf{x = 10 \pm 1} = 10 \cdot (1 \pm 0{,}1)$ gilt dann, dass der relative Fehler von y doppelt so groß wie der relative Fehler von x (=0,1) ist:

$y = 10^2 \cdot (1 \pm \mathbf{2} \cdot 0{,}1) = 100 \cdot (1 \pm 0{,}2) = \mathbf{100 \pm 20}$

Vergrößerung der relativen Fehler
⇒ schlechte Kondition

Beispiel:

Berechnen Sie die Konditionszahl K_x der Funktion: $y = \frac{1}{x}$ unter Anwendung der Differenzialrechnung und berechnen Sie damit $y \pm \Delta y$ für $x = 10 \pm 1$.

Lösung:

Die Funktion lässt sich als negative Potenz darstellen: $y = x^{-1}$

Die Ableitung ist dann: $y' = (-1) \cdot x^{-2}$ und damit wird die Konditionszahl:

$$K_x \approx \left|\frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y}\right| = \left|y' \cdot \frac{x}{y}\right| = \left|(-1) \cdot x^{-2} \cdot \frac{x}{y}\right| = \left|\frac{-1}{x^2} \cdot \frac{x}{x^{-1}}\right| = \left|\frac{-x}{x^1}\right| = \mathbf{1}$$

für $\mathbf{x = 10 \pm 1} = 10 \cdot (1 \pm 0{,}1)$ gilt dann, dass der relative Fehler von y genau so groß wie der relative Fehler von x (=0,1) ist:

$y = 10^{-1} \cdot (1 \pm 0{,}1) = 0{,}1 \cdot (1 \pm 0{,}1) = \mathbf{0{,}1 \pm 0{,}01}$

$\left|\frac{\Delta x}{x}\right| \xrightarrow{*1} \left|\frac{\Delta y}{y}\right|$

Gleichbleiben der relativen Fehler
$\Rightarrow$ neutrale Kondition

Beispiel:

Berechnen Sie die Konditionszahl K_x der Funktion: $y = x^2 + 4$ unter Anwendung der Differenzialrechnung

a) Man berechne die Kondition der Funktionsberechnung bei x = 1.

b) Man berechne die Kondition der Funktionsberechnung bei x = 10.

c) In welchem Bereich der x-Werte ist die Kondition dieser Funktion kleiner als 1?

Lösung:

Die Ableitung der Funktion ist: $y' = 2x$

Damit wird $K_x \approx \left|\frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y}\right| = \left|y' \cdot \frac{x}{y}\right| = \left|2x \cdot \frac{x}{y}\right| = \left|2x \cdot \frac{x}{x^2+4}\right| = \left|\frac{2x^2}{x^2+4}\right|$

a) Für x = 1 gilt: $K_x = \frac{2 \cdot 1^2}{1^2+4} = \frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \mathbf{0{,}4} \Rightarrow$ **gute Kondition**

b) Für x = 10 gilt: $K_x = \frac{2 \cdot 10^2}{10^2+4} = \frac{200}{104} \approx \mathbf{1{,}9} \Rightarrow$ **schlechte Kondition**

c) Für die Untersuchung des x-Bereichs, wo K_x kleiner als 1 ist benutzen wir den TI-92. Er erspart uns eine Kurvendiskussion:

Zuerst geben wir die Konditionszahl als Funktion ein:

abs(2x^2/(x^2+4)) STO▸ y1(x) ENTER

Als nächstes geben wir die Schranke y = 1 ein:

◆ Y= ▼ ENTER 1 ENTER ▲

Dann färben wir den Bereich unter 1 ein:

F6 8 <Below>

Dann rufen wir den Graphen auf:

F2 4 <ZoomDec>

Wir sehen, wenn wir den Trace-Modus mit F3 –2 ENTER einschalten, dass im Bereich **von x = – 2 bis x = 2** die Konditionsfunktion kleiner als 1 ist.

Konditionszahlen:

x	K_x
1.	.4
4.	1.6
7.	1.8491
10.	1.9231

Konditionszahlfunktion:

Bemerkung: Die Berechnung der Konditionszahl mit Hilfe der Differenzialrechnung lässt sich auch auf mehrdimensionale Funktionen (bzw. Formeln) übertragen. Dann muss man partielle Ableitungen berechnen. Siehe auch das Kapitel „Funktionen in mehreren Variablen: 4. Fehlerabschätzung und -fortpflanzung“. (Seite 197ff.)

4.3 Fehler beim Arbeiten mit dem Taschenrechner

4.3.1 Gleitkommadarstellung

Der TI-92 kennt zwei unterschiedliche Arten der Ausgabe von Zahlen: Im **EXACT-Mode** werden die Zahlen in Form von **natürlichen Zahlen** (0, 1, 2, 3,..), **rationalen Zahlen** (..., 1/2, ..., 3/5,...), **irrationalen Zahlen** (...$\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, e^x, ln(x), π,...) und aus Kombinationen dieser Zahlen angezeigt. Die zweite Art der Darstellung im **APPROX-Mode** ist die **Gleitkommadarstellung** (hier mit 14 signifikanten Ziffern der Vorzahl – Mantisse genannt – und drei Stellen des Exponenten). Zahlen, die nicht zu groß oder klein sind, werden als **Kommazahlen** angezeigt. In folgendem Beispiel wird das genauer gezeigt:

Beispiel:
Geben Sie die Zahlen 123 und 12000000: **a)** als ganze Zahl mit [ENTER] (EXACT-Mode) **b)** als Kommazahl mit [◆] [ENTER] **c)** als Kommazahl mit „Kommapunkt“ **d)** in Gleitkommadarstellung mit „Kommapunkt und Exponent“ ein und schreiben Sie das Ergebnis in mathematischer Schreibweise auf ($1 \cdot 5_E 2$ wird ersetzt durch $1{,}5 \cdot 10^2$).

Lösung:

a) Wir geben ein:
123 [ENTER] und 12000000 [ENTER]
Ergebnis: 123 und 12000000

b) Wir geben ein:
123 [◆] [ENTER] und 12000000 [◆] [ENTER]
Ergebnis: 123,0 und $1{,}2 \cdot 10^7$

c) Wir geben ein:
123. [ENTER] und 12000000. [ENTER]
(**Bemerkung:** Der Punkt steht für das Komma – das ist die angloamerikanische Zahlendarstellung!)
Ergebnis: 123,0 und $1{,}2 \cdot 10^7$

d) Wir geben ein:
1.23 [2nd] [EE] 2 [ENTER] und
1.2 [2nd] [EE] 7 [ENTER]
Ergebnis: 123,0 und $1{,}2 \cdot 10^7$

Der TI-92 zeigt die Darstellung im (Gleit-)kommaformat durch einen **„Kommapunkt“** an. Wenn die Zahl einen größeren Exponenten hat als im Gleitkommaformat angegeben ist (hier „FLOAT6“) so wird die Zahl mit **Exponenten** ausgegeben (Hier $1.2_E 7$ statt 12000000.).
In der AUTO-Einstellung wird die Zahl immer dann als **Kommazahl / Gleitkommazahl** dargestellt, wenn in der Eingabe ein Kommapunkt vorkommt oder wenn [◆] [ENTER] gedrückt wird, wobei bei der Eingabe entweder auf 14 Stellen gerundet oder abgeschnitten wird – wie im folgenden Kapitel gezeigt wird.

Die **Gleitkommadarstellung** einer Zahl besteht aus einer **Mantisse** mit n Ziffern, wobei die erste Ziffer ungleich Null ist und vor dem Komma steht. Danach kommt die **Zahlenbasis** (meist 10) mit der **Hochzahl**, die aus m Ziffern besteht.

Beispiel:
$1{,}2345678901234 \cdot 10^2$
Mantisse (14-stellig) • Basis ^ Hochzahl

Diese Zahl wird meist auch als **Kommazahl** (mit „Kommapunkt“) angezeigt:
123.45678901234

Für die folgenden Beispiele wird mit folgender Standard-MODE Einstellung gearbeitet:

[EE] findet sich am TR als Zweitfunktion der Taste [1].

4.3.2 Eingabefehler durch Runden oder Abschneiden

> Der **Eingabefehler** beim TI-92 entsteht durch die falsche interne Speicherung einer mindestens 14-stelligen Zahl (durch das Abschneiden oder Runden der Zahl nach 14 eingegebenen Ziffern).

Da die Eingabegenauigkeit reeller Zahlen beim TI-92 auf 14 Ziffern beschränkt ist, kommt es schon bei der Eingabe von Zahlen mit mehr als 14 Ziffern zu einem **Eingabefehler**, wobei entweder abgeschnitten oder gerundet wird, je nachdem ob die Eingabe als Kommazahl oder mit ◆ ENTER erfolgt.

> Die Anzeige der **intern gespeicherten Zahl** erfolgt durch:
>
> ▲ ENTER

Beispiel:

Man zeige, dass der TI-92

a) bei der Eingabe von 123456789012345. ENTER abschneidet und

b) bei Eingabe von 123456789012345 ◆ ENTER rundet.

Geben Sie jeweils die intern gespeicherte Zahl an!

Lösung:

a) Wir geben ein:

123456789012345. ENTER

```
■ 1.2345678901234E14          1.23457E14
123456789012345.
MAIN          RAD AUTO          FUNC 1/30
```

und erhalten die intern gespeicherte Zahl durch:

▲ ENTER

```
■ 1.2345678901234E14          1.23457E14
1.2345678901234E14
MAIN          RAD AUTO          FUNC 1/30
```

Dies ist: $1.2345678901234_E 14$

– also wurde die 15. Ziffer „5" abgeschnitten

b) Wir geben ein:

123456789012345 ◆ ENTER

```
■ 123456789012345             1.23457E14
123456789012345
MAIN          RAD AUTO          FUNC 1/30
```

und erhalten die intern gespeicherte Zahl durch:

▲ ENTER

```
■ 123456789012345             1.23457E14
1.2345678901235E14
MAIN          RAD AUTO          FUNC 1/30
```

Dies ist: $1.2345678901235_E 14$

– also wurde auf 14 Ziffern gerundet.

> Das **Zahlensystem** $(4_{10}1)$ hat eine 4-stellige Mantisse, Basis 10 und einen 1-stelligen Exponenten. Das ergibt folgende Zahlen: $x.xxx \cdot 10^x$
>
> z. B: $1{,}234 \cdot 10^5$ (= 123 400)
>
> oder $4{,}003 \cdot 10^{-2}$ (= 0,04003)

Um im folgenden die Darstellung zu vereinfachen, wollen wir ein Zahlensystem mit einer Mantissenlänge von **4** Ziffern, der Basis **10** und einem **1**-stelligen Exponenten verwenden.

Das nennen wir das **Zahlensystem** $(4_{10}1)$.

Beispiel:

Bestimmen Sie im Zahlensystem $(4_{10}1)$

a) den absoluten und relativen Eingabefehler durch Abschneiden bei Eingabe der Zahlen 200380, 500,06 und 0,030065 und stellen Sie die intern gespeicherte Zahl im Gleitkommaformat dar!

b) die kleinste und größte darstellbare positive Zahl.

> Der **absolute Eingabefehler** Δx ist die Differenz aus Zahl (x) und Näherungszahl $(\tilde{x})$ (ohne Vorzeichen)
>
> $\Delta x = |x - \tilde{x}|$
>
> Der **relative Eingabefehler** $\left|\frac{\Delta x}{x}\right|$ ist der absolute Fehler (Δx) geteilt durch die Zahl (x) (ohne Vorzeichen)

Lösung:

a)

Originalzahl x	abgeschnittene Zahl $\tilde{x}$	Gleitkomma intern $(\tilde{x})$	abs. Fehler $\Delta x = \lvert x - \tilde{x} \rvert$	rel. Fehler $\left\lvert\frac{\Delta x}{x}\right\rvert$
200380	200300	$2{,}003 \cdot 10^5$	80	0,00040
500,06	500,0	$5{,}000 \cdot 10^2$	0,06	0,00012
0,030065	0,03006	$3{,}006 \cdot 10^{-2}$	0,000005	0,00017

b) Die kleinste darstellbare positive Zahl ist $1{,}000 \cdot 10^{-9}$
(= 0,000 000 001)
Die größte darstellbare positive Zahl ist $9{,}999 \cdot 10^{9}$
(= 9 999 000 000)

Ergebnis: Die absoluten Eingabefehler variieren sehr stark und sind um ungefähr 4 Zehnerpotenzen kleiner als die Zahlen selbst. Die relativen Eingabefehler liegen zwischen 0 und 0,00099 im Zahlensystem $(4_{10}1)$.

4.3.3 Rundungsfehler bei Berechnungen mit Gleitkommazahlen

Addition

Beim Addieren werden die absoluten Fehler ungefähr addiert, die relativen Fehler bleiben ungefähr gleich groß. Werden verschieden große Zahlen addiert, so gibt es einen Informationsverlust durch Weglassen der hinteren Stellen der kleineren Zahl, der bei weiteren Berechnungen das Ergebnis verfälscht.

ADDITION:
Die absoluten Fehler addieren sich ungefähr.
Die relativen Fehler liegen zwischen den Ausgangsfehlern.

Beispiel:
Wie verändern sich die absoluten und relativen Fehler bei Addition zweier Zahlen im Zahlensystem $(4_{10}1)$ (Eingangsfehler durch Abschneiden, Rechenfehler durch Runden) ?
Berechnen Sie dazu 100,09 + 21,118 und bestimmen Sie den absoluten und relativen Fehler der Beiden Summanden und der Summe.

Lösung:

Dazu betrachten wir die folgenden Tabelle:

exakte Zahl (x)	interne Darstellung ($\tilde{x}$)	absoluter Fehler $\Delta x = \lvert x - \tilde{x} \rvert$	relativer Fehler $\left\lvert \frac{\Delta x}{x} \right\rvert \approx$
100,090	100,0	**0,090**	**0,00090**
+ 21,118	+ **21,11**	0,008	0,00038
= 121,208	= **121,11 ≈ 121,1**	0,108	0,00089

Zahlen und absolute Fehler (*100)

Beispiel:
Berechnen Sie im System $(4_{10}1)$ die Summe der Zahlen 150000, 751 und −150 000 auf zwei Arten:

a) 150000 + 751 + (− 150000)

b) 150000 + (− 150000) + 751

Vergleichen Sie die Ergebnisse!

Lösung:

Alle drei Zahlen müssen nicht abgeschnitten werden, so dass man sie sofort addieren und runden kann:

a)

$$\begin{array}{r} 150000 \\ +\quad 750 \\ \hline =150750 \end{array}$$, gerundet auf 4 Ziffern: 150800

$$\begin{array}{r} 150800 \\ -\ 150000 \\ \hline =\quad \mathbf{800} \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r} 150000 \\ -\ 150000 \\ \hline =\qquad 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0 \\ +\ 751 \\ \hline =\ 751 \end{array}$$

Wie man sieht, ist die erste Rechnung falsch und der absolute Fehler ist 49, der relative Fehler ist $\frac{49}{751} \approx 0{,}065 = 6{,}5\,\%$, was sehr schlecht ist.
Hier sieht man, dass durch die Addition von unterschiedlich großen Zahlen ein Informationsverlust entsteht, der durch die Subtraktion danach aufgedeckt wird.

Es ist besser ungefähr gleich große Zahlen **zuerst** zu **subtrahieren**!

Subtraktion

Beim Subtrahieren werden die absoluten Fehler ungefähr subtrahiert, die relativen Fehler hingegen können bei Subtraktion fast gleich großer Zahlen riesig groß werden. Das nennt man die **„Subtraktionskatastrophe“**.

SUBTRAKTION
Die absoluten Fehler subtrahieren sich ungefähr.
Die relativen Fehler werden groß!
(Vorsicht: Subtraktionskatastrophe!)

Beispiel:

Wie verändern sich die absoluten und relativen Fehler bei der Subtraktion zweier Zahlen im Zahlensystem $(4_{10}1)$?
Berechnen Sie 10011 – 10009 und bestimmen den absoluten und relativen Fehler des Minuenden, des Subtrahenden und der Differenz.

Lösung:

Dazu betrachten wir die folgende Tabelle:

exakte Zahl x	interne Darstellung $(\tilde{x})$	absoluter Fehler $\Delta x = \lvert x - \tilde{x} \rvert$	relativer Fehler $\left\lvert \frac{\Delta x}{x} \right\rvert \approx$
10011	10010	1	0,0001
–10009	–10000	9	0,0009
= 2	= 10 ≈ 10	8	4

Der hier auftretende relative Fehler von **4** (= 400 %) bedeutet, dass das Ergebnis (10 statt 2) unbrauchbar ist!
Diese Situation kann man oft vermeiden, indem man den Term geschickt umformt.

Zahlen und absolute Fehler (*100)

10010
100
10000
900
10
800
1. Zahl
2. Zahl
Differenz

Multiplikation

Bei der Multiplikation zweier Zahlen werden deren absolute Fehler größer, die relativen Fehler addieren sich.

MULTIPLIKATION
Die absoluten Fehler werden größer.
Die relativen Fehler werden addiert.

Beispiel:
Wie verändern sich die absoluten und relativen Fehler bei der Multiplikation zweier Zahlen im Zahlensystem $(4_{10}1)$?
Multiplizieren Sie 2,0009 · 3,0009 und berechnen Sie den absoluten und relativen Fehler der beiden Faktoren und des Produkts.

Lösung:
Dazu betrachten wir die folgende Tabelle:

exakte Zahl x	interne Darstellung $(\tilde{x})$	absoluter Fehler $\Delta x = \lvert x - \tilde{x} \rvert$	relativer Fehler $\left\lvert \frac{\Delta x}{x} \right\rvert \approx$
2,000 9	2,000	0,000 9	0,000 45
*3,000 9	*3,000	0,000 9	0,000 30
=6,004 500 81	= 6,000	0,004 500 81	0,000 75

Division

Bei der Division bleiben die absoluten Fehler im Bereich der Eingangsfehler, die relativen Fehler subtrahieren sich.

DIVISION
Die absoluten Fehler liegen zwischen den Ausgangswerten.
Die relativen Fehler werden subtrahiert.

Beispiel:
Wie verändern sich die absoluten und relativen Fehler bei der Division zweier Zahlen im Zahlensystem $(4_{10}1)$?
Dividieren Sie 100,09 : 4,0009 und berechnen Sie den absoluten und relativen Fehler des Dividenden, des Divisors und des Quotienten.

Lösung:
Dazu betrachten wir die folgende Tabelle:

exakte Zahl x	interne Darstellung $(\tilde{x})$	absoluter Fehler $\Delta x = \lvert x - \tilde{x} \rvert$	relativer Fehler $\left\lvert \frac{\Delta x}{x} \right\rvert \approx$
100,09	100,0	0,09	0,000 90
: 4,000 9	: 4,000	0,000 9	0,000 23
= 25,016 871...	= 25,00	0,016 871...	0,000 67

4.3.4 Numerische Stabilität

> Ein Rechenverfahren ist **„numerisch stabil"** wenn die auftretenden Rundungsfehler nicht größer als der Konditionsfehler (der bei Änderung der Eingangswerte entsteht) ist.

Bei der Berechnung von Summen, Differenzen, usw. entstehen Rechenfehler, da die interne Stellenanzahl beschränkt ist und gerundet wird.

Um einen Term zu berechnen, muss man mehrere Operationen hintereinander ausführen. Da können sich die Fehler addieren und sehr groß werden.

Um die Fehler möglichst klein zu halten kann es sein, dass man den Term zuerst umformen muss.

Da die üblichen Rechengesetze im Taschenrechnerzahlensystem nicht gelten, kann es schon sein, dass zwei algebraisch identische Terme numerisch verschiedene Resultate liefern.

Derjenige Term, der das genauere Ergebnis liefert, heißt **„numerisch stabiler"**.

Beispiel:

Welches Rechenverfahren zur Berechnung von $a^2 - b^2$ ist numerisch stabiler, wenn a ungefähr so groß wie b ist $(a \sim b)$?

a) $a \cdot a - b \cdot b$

b) $(a - b) \cdot (a + b)$

Zur Beantwortung dieser Frage berechnen Sie beide Terme mit den Zahlen $a = 1{,}234$ und $b = 1{,}235$ im Zahlensystem $(4_{10}1)$ und vergleichen Sie diese mit dem exakten Ergebnis.

Lösung:

a) $a \cdot a = 1{,}234 \cdot 1{,}234 = 1{,}522756 \approx 1{,}523$

$b \cdot b = 1{,}235 \cdot 1{,}235 = 1{,}525225 \approx 1{,}525$

$a \cdot a - b \cdot b = 1{,}523 - 1{,}525 = \mathbf{-0{,}002}$

b) $a - b = 1{,}234 - 1{,}235 = -0{,}001$

$a + b = 1{,}234 + 1{,}235 = 2{,}469$

$(a - b) \cdot (a + b) = -0{,}001 \cdot 2{,}469 = \mathbf{-0{,}002469}$

Exakte Berechnung: $a^2 - b^2 = 1{,}234 - 1{,}235 = \mathbf{-0{,}002469}$

```
F1  F2▾     F3▾  F4▾   F5     F6
    Algebra Calc Other PrgmIO Clear a-z...
■(1.234)²                      1.522756
■(1.235)²                      1.525225
■1.523 - 1.525                    -.002
■1.234 - 1.235                    -.001
■1.234 + 1.235                    2.469
■-.001·2.469                   -.002469
-.001*2.469
MAIN        RAD AUTO       FUNC 6/30
```

Durch **frühzeitige Subtraktion** entstehen weniger Rundungsfehler!

Das Ergebnis von **a)** ist überraschend schlechter als das Ergebnis von **b)**, obwohl bei beiden Termen eine Subtraktion auftritt.

Verfahren **b)** ist numerisch stabiler als Verfahren **a)**.

Im Fall **a)** entsteht die Subtraktionskatastrophe durch Auslöschung der führenden Ziffern. Dadurch bleibt nur mehr eine Zahl mit einer Ziffer Genauigkeit übrig.

Im Fall **b)** ist die Auslöschung zwar auch erfolgt, nur ist das Resultat nicht gerundet worden, da es exakt ist (bezogen auf die Eingabezahlen!).

Im Fall **a)** wurde zweimal gerundet, im Fall **b)** hingegen gar nicht!

Bei Berechnung von Termen sollte man darauf achten, dass man möglichst frühzeitig subtrahiert. Nur ist das manchmal nicht möglich, wie folgendes Beispiel zeigt:

Beispiel:

Folgende Terme sind im Zahlensystem $(4_{10}1)$ zu berechnen, wobei die Teilterme exakt zu berechnen und auf 4 Stellen zu runden sind. Danach soll mit dem TI-92-Ergebnis verglichen werden!

a) $\frac{a}{b-\frac{c}{d}}$ **b)** $\frac{a \cdot d}{b \cdot d - c}$

mit den Zahlen $a = 380$, $b = 121$, $c = 724$ und $d = 6$

Man zeige auch, dass beide Terme algebraisch identisch sind.

Lösung:

Beide Terme sind algebraisch identisch. Term b) entsteht aus a) durch Erweiterung mit d.

a) Zuerst wird 724 durch 6 geteilt: $\frac{724}{6} \approx 120{,}7$

Dann wird subtrahiert: $121 - 120{,}7 = 0{,}3$

Die letzte Division ergibt: $\frac{380}{0{,}3} \approx \mathbf{1267}$

b) Zuerst wird multipliziert: $380 \cdot 6 = 2280$

$121 \cdot 6 = 726$

Dann wird subtrahiert: $726 - 724 = 2$

Die Division ergibt: $\frac{2280}{2} = \mathbf{1140}$

Mit dem TI-92 ergibt sich

bei **a)** mit Eingabe [ENTER]: 1140 (exakt)

und mit Eingabe [◆] [ENTER] [↑] [ENTER]: **1140.000 000 0114** (approx)

Bei **b)** ergibt sich auf beide Arten: **1140.** (exakt = approx)

Da bei der **zweiten Methode** nicht gerundet werden muss, ist sie hier **numerisch stabiler**!

Methode a) mit TI-92

Methode b) mit TI-92

Beim vorigen Beispiel kann man die Grenzen des TI-92 schon gut erkennen.

Die beiden Ausdrücke **a)** und **b)** sind algebraisch identisch und doch rechnet der TI-92 nur im EXAKT-MODE das richtige Ergebnis, während im APPROX-MODE beim ersten Term ein ungenaues Ergebnis herauskommt.

Man sieht, dass man sich jedes Mal die Frage stellen muss: Welches Ergebnis ist richtig und wie genau ist es?

Diese Fragestellung soll auch bei den Aufgaben bearbeitet werden.

Nun wird gezeigt, dass der TI-92 beim **solve**-Befehl nicht immer numerisch stabil ist:

Die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ sind:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Es muss gelten: $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geqslant 0$

Satz von VIÈTA: $x_1 \cdot x_2 = q$,
$x_1 + x_2 = -p$

Beispiel:

Berechnen Sie die 1. Lösung einer quadratischen Gleichung auf folgende 3 verschiedene Arten (Voraussetzung: p ist positiv):

a) $x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ **b)** $x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$, $x_1 = \frac{q}{x_2}$

c) mit dem Befehl solve $(x\text{^}2 + p \cdot x + q = 0, x)$

für die Werte p = 123 456 und q = 1,2

Lösung:

a) Eingabe:

(-) p/2 + 2nd √ (p/2)^2 − q) 2nd | p = 123456 and q = 1.2 ENTER ▲ ENTER

ergibt die Lösung: **−9,72** · 10^{-6}

```
F1 F2 Algebra F3 Calc F4 Other F5 PrgmIO F6 Clear a-z...
■ -p/2 + √((p/2)^2 - q) | p = 123456 and q = 1.2
                                          -.00001
-9.72E-6
MAIN          RAD AUTO          FUNC 1/30
```

b) Eingabe:

(-) p/2 − 2nd √ (p/2)^2 − q) 2nd | p = 123456 and q = 1.2 ENTER 1.2/ 2nd ANS ENTER

▲ ENTER

ergibt als Lösung: **−9,7200622091634** · 10^{-6}

```
F1 F2 Algebra F3 Calc F4 Other F5 PrgmIO F6 Clear a-z...
■ -p/2 - √((p/2)^2 - q) | p = 123456 and q = 1.2
                                          -123456.
■ 1.2 / -123455.99999028                  -.00001
-9.7200622091634E-6
MAIN          RAD AUTO          FUNC 2/30
```

c) Eingabe:

solve(x^2 + 123456 x + 1.2 = 0,x) ENTER

▲ ENTER

ergibt als eine Lösung: **−9.72** · 10^{-6}, das entspricht der ungenauen ersten Lösung

```
F1 F2 Algebra F3 Calc F4 Other F5 PrgmIO F6 Clear a-z...
■ solve(x^2 + 123456·x + 1.2 = 0, x)
                    x = -.00001 or x = -123456.
x=-9.72E-6 or x=-123455.99999...
MAIN          RAD AUTO          FUNC 1/30
```

Dieses Beispiel zeigt, wie ungenau der TI-92 in extremen Situationen rechnet. Trotz seiner 14 Stellen Genauigkeit ist das normal berechnete Ergebnis mit der üblichen Formel nur auf 5 Stellen genau!

Welche der verwendeten Berechnungsmethoden ist nun „richtig"?

Wie wir gesehen haben sind nur die Subtraktionen von annähernd gleich großen Zahlen gefährlich. Bei Methode **a)** und **c)** kommt es bei Berechnung der Summe von $-\frac{p}{2}$ und der Wurzel zu so einer Auslöschungssituation, da die Wurzel etwa gleich groß wie $\frac{p}{2}$ ist. Bei Methode **b)** umgeht man dies durch Berechnung der zweiten Lösung und durch Verwendung des Satzes von VIÈTA. Daher ist Methode **b)** zuverlässiger.

4.4 Interpolation

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der Ermittlung von Funktionstermen. Gegeben sind $n+1$ verschiedene Punkte einer Funktion. Gesucht ist der Funktionsterm. Typ der Funktion soll ein Polynom n-ten Grades sein. Diese Aufgabe haben wir schon bei der „umgekehrten Kurvendiskussion" kennen gelernt. Im Unterschied dazu sollen nur Kurvenpunkte aber keine Ableitungen gegeben sein. Bei Angabe vieler Punkte kann diese Aufgabe mühsam werden, da dann n Gleichungen mit n Variablen aufzustellen und einzugeben sind. Daher wird ein günstiges Verfahren gesucht, das uns die Arbeit erleichtern soll.

Zuerst die lineare Interpolation:

Interpolation nennt man die Bestimmung einer Funktion bzw. die Bestimmung von Zwischenwerten einer Funktion auf Grund vorliegender Wertepaare der Funktion.

Die Interpolation ist ein Näherungsverfahren. Die interpolierten Werte sind grundsätzlich ungenau.

Beispiel:

Der Wasserstand der Donau betrug in Passau am 1. März eines Jahres 552 cm und am 17. März des selben Jahres 431 cm. Dazwischen fiel das Wasser nahezu linear. Zur Ermittlung des Wasserstandes am 10. und 13. März soll linear interpoliert werden.

Lösung:

Zuerst verwandeln wir die Angabe in zwei Wertepaare: (1, 552) und (17, 431). Dann verwenden wir den Ansatz:

$y = y_1 + (x - x_1)\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ mit $x_1 = 1$, $y_1 = 552$ und $x_2 = 17$, $y_2 = 431$

und setzen 10 für x ein.

Eingabe: („Define" erzeugt man mit F4 ENTER)

Define y(x) = 552 + (x–1) · (431– 552) / (17–1) ENTER

y(10.) ENTER ergibt als Lösung den interpolierten Wasserstand am 10. März: ≈ **484 cm**

y(13.) ENTER ergibt als Lösung den interpolierten Wasserstand am 13. März: ≈ **461 cm**

```
■ Define y(x)=552 + (x - 1)·(431 - 552) / (17 - 1)
                                        Done
■ y(10.)                             483.938
■ y(13.)                              461.25
y(13.)
MAIN          RAD AUTO        FUNC 3/30
```

600, 500, 400, 300 — 552, 484, 461, 431 — 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17

Von **linearer Interpolation** spricht man, falls Zwischenwerte zwischen zwei Punkten gesucht werden, die mit einer linearen Funktion verbunden werden.

Herleitung der linearen Interpolationsformel:

```
F1 F2▾Zoom F3 Trace F4 ReGraph F5▾Math F6▾Draw F7
y2, y, y1, y2-y1, y-y1
<----x-x1---->
<-----------x2-x1---->
x1   x   x2
MAIN    RAD AUTO    FUNC
```

Wie im obigen Graphen zu sehen ist, gilt die Proportion:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$ oder

$$y = y_1 + (x - x_1)\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Formt man weiter um, so ergibt sich:

$$y = x\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + y_1 - x_1\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Setzt man nun

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ und } d = y_1 - x_1 \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

so wird daraus die lineare Funktion: $y = kx + d$

Lineare Interpolation wendet man dort an, wo Tabellenwerte für Funktionen gegeben sind, die Zwischenwerte aber fehlen. Dies passiert oft in der Technik, aber auch bei der Wahrscheinlichkeitsrechnung bei Angabe der Normalverteilungsfunktion F(x), die wir in Band 4 näher besprechen wollen. Vorerst beschränken wir uns auf die Bestimmung interpolierter Werte.

Beispiel:

Die Normalverteilung ist in der folgenden Tabelle gegeben.

a) Gesucht ist der linear interpolierte Wert von F(x) für $x = 2{,}52$

b) Berechnen Sie mittels linearer Interpolation den Wert von x für $F(x) = 0{,}9949$ (verkehrter Ansatz!)

x	F(x)
2,5	0,9938
2,6	0,9953

Lösung:

a) Wir setzen an: $\frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1} = \frac{F(x_2)-F(x_1)}{x_2-x_1}$

Dann setzen wir ein: $\frac{F(x)-0{,}9938}{2{,}52-2{,}5} = \frac{0{,}9953-0{,}9938}{2{,}6-2{,}5}$

Das ergibt dann: $\frac{F(x)-0{,}9938}{0{,}02} = \frac{0{,}0015}{0{,}1}$ $\quad |\cdot 0{,}02$

$F(x) - 0{,}9938 = 0{,}015 \cdot 0{,}02$ $\quad |+0{,}9938$

$F(x) = 0{,}9938 + 0{,}0003 = \mathbf{0{,}9941}$

b) Wir setzen an: $\frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1} = \frac{F(x_2)-F(x_1)}{x_2-x_1}$

Dann setzen wir ein: $\frac{0{,}9949-0{,}9938}{x-2{,}5} = \frac{0{,}9953-0{,}9938}{2{,}6-2{,}5}$

Das ergibt dann: $\frac{0{,}9949-0{,}9938}{x-2{,}5} = \frac{0{,}0015}{0{,}1}$ $\quad |\cdot(x-2{,}5)$

$0{,}0011 = 0{,}015 \cdot (x-2{,}5)$ $\quad |:0{,}015$

$0{,}0733 = x - 2{,}5$ $\quad |+2{,}5$

$x = \mathbf{2{,}5733}$

Beispiel:

Programmieren Sie die lineare Interpolation als Funktion und testen Sie diese mit den Angaben des vorigen Beispiels

Lösung:

Dazu geben wir folgende Funktion im Programm-Editor ein:

APPS 7 3 ▶ 2 ▼ ▼ linint ENTER ENTER

▲ ▲ xa, ya, xb, yb, x <Eingangsvariablen definieren>

▼ ▼ ya + (x − xa) ∗ (yb − ya) / (xb − xa)

◆ HOME

Programmaufruf für das vorige Beispiel:

linint (2.5, 0.9938, 2.6, 0.9953, 2.52) ENTER

```
:linint(xa,ya,xb,yb,x)
:Func
:ya+(x-xa)*(yb-ya)/(xb-xa)
:EndFunc
```

```
■ linint(2.5,.9938,2.6,.9953,2.52)
                                .9941
...(2.5,0.9938,2.6,0.9953,2.52)
MAIN        RAD AUTO        FUNC 1/30
```

Beispiel:

Die Temperaturwerte von Salzburg um 12 Uhr mittags betragen an den folgenden Tagen:

1.Juli	2.Juli	3.Juli	4.Juli	5.Juli	6.Juli
22°	18°	25°	?	28°	23°

Der fehlende Wert am 4.Juli soll durch **Polynominterpolation** ermittelt werden.

Polynominterpolation besteht in der Erstellung einer n-dimensionalen Polynomfunktion für n + 1 angegebene Punktepaare und der Auswertung dieser Funktion an einer Zwischenstelle.

Lösung:

Dies ist eine Aufgabe der „umgekehrten Kurvendiskussion", die wir durch unbestimmten Ansatz lösen können. Wir haben 5 Angaben, daher setzen wir ein Polynom 4.Ordnung an:

$f(x) = y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$.

Wenn wir die 5 Wertepaare einsetzen, erhalten wir 5 Gleichungen in a, b, c, d, e, die wir mit der Funktion **simult** lösen wollen:

Eingabe:

[F6] [ENTER] <löscht eventuelle Belegungen der Variablen>

a ∗ x^4 + b ∗ x^3 + c ∗ x^2 + d ∗ x + e [STO▸] f(x) [ENTER]

f(1) = 22 [ENTER]

f(2) = 18 [ENTER]

f(3) = 25 [ENTER]

f(5) = 28 [ENTER]

f(6) = 23 [ENTER]

```
▪ a·x^4 + b·x^3 + c·x^2 + d·x + e → f(x)        Done
▪ f(1) = 22                      a + b + c + d + e = 22
▪ f(2) = 18             16·a + 8·b + 4·c + 2·d + e = 18
▪ f(3) = 25            81·a + 27·b + 9·c + 3·d + e = 25
▪ f(5) = 28
                     625·a + 125·b + 25·c + 5·d + e = 28
▪ f(6) = 23
                    1296·a + 216·b + 36·c + 6·d + e = 23
f(6)=23
MAIN          RAD AUTO          FUNC 6/30
```

simult ist eine Funktion, die Gleichungssysteme löst.

Das Gleichungssystem:

$2x + 3y = 8$

$4x - y = 2$

wird mit der Eingabe:

simult ([2, 3; 4, -1],[8; 2]) [ENTER]

gelöst:

```
▪ simult([2 3; 4 -1],[8; 2])                    [1; 2]
simult([2,3;4,-1],[8;2])
MAIN          DEG AUTO          FUNC 1/30
```

Die sich ergebenden Koeffizienten der Gleichungen müssen in **simult** eingegeben werden. (Eventuell holt man sich die Informationen aus dem History-Bereich mittels Cursor- und [ESC]-Taste: (▲) (▲) ... (▲) [ESC])

simult ([1, 1, 1, 1, 1; 16, 8, 4, 2, 1; 81,27, 9, 3, 1; 625, 125, 25, 5, 1; 1296, 216, 36, 6, 1] , [22; 18; 25; 28; 23]) [◆] [ENTER]

```
      [625   125  25  5  1]  [28]
      [1296  216  36  6  1]  [23]
                                  [.35     ]
                                  [-5.68333]
                                  [30.85   ]
                                  [-62.0167]
                                  [58.5    ]
simult ([1,1,1,1,1;16,8,4,2,1…
MAIN          DEG AUTO          FUNC 4/30
```

Das ergibt die Koeffizienten a, b, c, d, e in der letzten Spalte der Matrix und damit das gesuchte Polynom (auf 3 Kommastellen genau), das auf y1(x) gespeichert wird, um es grafisch betrachten zu können:

f(x) [ENTER] [2nd] [ANS] [2nd] [|] a = .35 and b = [(-)] 5.68333 and c = 30.85 and d = [(-)] 62.0167 and e = 58.5 [ENTER]

[STO▸] y1(x) [ENTER]

```
▪ f(x) | a = .35 and b = -5.68333 and c = 30.▸
  .35·x^4 - 5.68333·x^3 + 30.85·x^2 - 62.0167▸
▪ .35·x^4 - 5.68333·x^3 + 30.85·x^2 - 62.0167▸
                                           Done
ans(1)→y1(x)
MAIN          DEG AUTO          FUNC 7/30
```

Nach Einstellung der WINDOW-Variablen mit [◆] [Y=] [◆] [WINDOW] 0 [ENTER] ... ergibt sich mit [◆] [GRAPH] das nachstehende Bild. Durch Abtasten der Funktion mit [F3] (▸) ... bzw. durch Eingabe von 4 [ENTER] erhält man den gesuchten Wert der Temperatur am 4. Juli mit ca. **30°**

```
xc:4.                 yc:29.92
MAIN          RAD AUTO          FUNC
```

WINDOW-Variablen:

```
xmin=0.
xmax=7.
xscl=1.
ymin=0.
ymax=35.
yscl=1.
xres=2.
```

Da die Tipparbeit für die Lösung der Interpolationsaufgabe doch recht beachtlich und die Lösung nicht ganz exakt ist (Wir haben bei der Eingabe des Polynoms gerundet!), soll im folgenden Beispiel die Funktion **polyint** programmiert werden.

Die einzelnen Elemente der **Matrix** m erhält man durch Angabe von Zeilen und Spaltennummer, z. B.:

Define m=[1, 2; 4, 5; 9, 6]

ergibt die Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$$

m[1,1] ergibt 1
m[1,2] ergibt 2
m[2,1] ergibt 4
m[2,2] ergibt 5
m[3,1] ergibt 9
m[3,2] ergibt 6

Beispiel:

Verwenden Sie folgendes Programm zur Lösung der vorigen Aufgabe

Programm	Kommentar
polyint (m,n)	m..... Matrix mit den Punkten
Func	n.....Anzahl der Punkte

```
Local i,k,c,f,a
{} [STO▸] c:   {} [STO▸] a
For i, 1, n
   augment(c,{m[i, 2]}) [STO▸] c
   augment(a,{m[i,1]}) [STO▸] a
EndFor
For k,1,n
   For i, n, k+1, –1
      (c[i]-c[i-1])/(a[i]-a[i-k]) [STO▸] c[i]
   EndFor
EndFor
c[n] [STO▸] f
For k, n-1, 1, –1
   f*(x – m[k,1])+c[k] [STO▸] f
EndFor
f
EndFunc
```

Lösung:

Eingabe der Funktion mit:

APPS 7 3 (▸) 2 (▾) (▾) polyint [ENTER] [ENTER]

(▴) (▴) m,n (▾) (▾)

local ...

...

f

[◆] [HOME]

Aufruf der Funktion und speichern des Ergebnisses auf y1(x) mit:

polyint ([1, 22; 2, 18; 3, 25; 5, 28; 6, 23],5) [ENTER]

[STO▸] y1(x) [ENTER]

[◆] [GRAPH]

[F3] 4 [ENTER]

Wir erhalten für den zu interpolierenden Wert am 4. Juli **29,9°**.

4.5 Numerische Methoden zum Lösen von Gleichungen

Wir haben bisher verschiedene Methoden zum Lösen von Gleichungen kennen gelernt.

Lineare Gleichungen lassen sich durch einfache Umformungen lösen, quadratische Gleichungen durch Anwendung der Lösungsformel.

Gleichungen höheren Grads sind nicht mehr durch Umformung oder Lösungsformel lösbar. Ebenso sind Gleichungen mit anderen Funktionen (als Potenzen in x) oft nicht durch Umformung zu lösen. Hier hilft nur mehr ein Näherungsverfahren.

Am bekanntesten und effizientesten ist das NEWTONsche Näherungsverfahren, das ja schon besprochen wurde. Hier wollen wir zeigen, wie man das **NEWTONsche Näherungsverfahren** mit dem TI-92 verwenden kann.

Beispiel:

Die Lösung der Gleichung $x^3 - x + 5 = 0$ ist mit Hilfe des NEWTONschen Näherungsverfahrens zu bestimmen.

Lösung:

Statt die Gleichung $x^3 - x + 5 = 0$ zu lösen, kann man auch die Nullstelle der Funktion $f(x) = x^3 - x + 5$ bestimmen.

Dazu bilden wir die NEWTONfunktion $newt(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ und starten das Verfahren mit dem Startwert $x_0 = 0$.

Durch Berechnung von $x_1 = newt(x_0)$, $x_2 = newt(x_1)$, $x_3 = newt(x_2)$, … bekommt man eine Zahlenfolge, die sich der gesuchten Nullstelle annähert.

Eingabe:

F6 ENTER <Löschen der einbuchstabigen Variablen>

F4 1 <Define> f(x) = x^3 – x + 5 ENTER

F4 1 <Define> newt(x) = x – f(x) / 2nd d f(x),x) ENTER

newt (0.) ENTER

newt (2nd ANS) ENTER

ENTER

ENTER

…

ENTER

```
F1 F2 Algebra F3 Calc F4 Other F5 PrgmIO F6 Clean Up
■ Define f(x)=x³ - x + 5                     Done
                          f(x)
■ Define newt(x)=x - ─────────────           Done
                      d/dx(f(x))
■ newt(0.)                                     5.
■ newt(5.)                                3.31081
■ newt(3.3108108108108)                   2.11962
■ newt(2.1196160220725)                   1.12562
■ newt(1.1256248919575)                  -.766699
■ newt(-.7666989015921)                  -7.72955
■ newt(-7.729554731433)                     -5.21
■ newt(-5.2099998382779)                 -3.57868
■ newt(-3.5786806264769)                 -2.58316
■ newt(-2.5831579112278)                 -2.07556
■ newt(-2.0755633057302)                 -1.91908
■ newt(-1.9190802424038)                 -1.90429
■ newt(-1.9042880580408)                 -1.90416
■ newt(-1.9041608684911)                 -1.90416
newt(ans(1))
MAIN            DEG AUTO          FUNC 26/30
```

Obwohl das Verfahren rasch konvergieren sollte, mussten wir dennoch 14 Iterationen machen, um zu einer Lösung auf 6 Ziffern genau zu kommen. Bei einem besseren Startwert (z. B. –2) konvergiert das Verfahren rascher.

Das **NEWTONsche Näherungsverfahren** zur Nullstellenbestimmung einer Funktion arbeitet mit der NEWTONfunktion

$newt(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

Nach Wahl eines geeigneten Startwertes x_0 (in der Nähe der gesuchten Nullstelle) werden der Reihe nach die Werte

$x_1 = newt(x_0)$

$x_2 = newt(x_1)$

$x_3 = newt(x_2)$

…

berechnet.

Diese sogenannten „**Iterationen**“ liefern eine Folge von Zahlen, die sich der Nullstelle nähern. Sobald die Differenz zweier aufeinander folgender Zahlen kleiner als eine vorgegebene Schranke ε sind, beendet man das Verfahren.

Um einen geeigneten Startwert für das NEWTONsche Näherungsverfahren zu bekommen, kann man den Funktionsgraphen und die Wertetabelle der Funktion betrachten:

Beispiel:

Zur Bestimmung der bestmöglichen Näherung der Nullstelle der Funktion $f(x) = x^3 - x + 1$ soll die Funktion

a) grafisch dargestellt werden

b) eine Wertetabelle erstellt werden

c) und mit dem damit bestimmten Näherungswert das NEWTONsche Näherungsverfahren durchgeführt werden.

Lösung:

Die Funktion newt(x) muss schon definiert sein – vgl. voriges Beispiel.

a) [◆] [Y=] [F1] 8 [ENTER] <Löschen des Funktionseditors>

x^3 – x + 1 [ENTER] <Funktionseingabe>

[F2] 6 <ZoomStd einschalten>

F1 F2 Zoom F3 Trace F4 ReGraph F5 Math F6 Draw F7

MAIN RAD AUTO FUNC

b) [◆] [TblSet] –5 [▼] 1 [ENTER] [ENTER]

[◆] [TABLE] <Tabelle ansehen>

Offensichtlich ist eine Nullstelle zwischen $x = -2$ und $x = -1$, da dort das Vorzeichen der Funktion wechselt. Wir starten also das NEWTONsche Näherungsverfahren mit $x_0 = -1$.

x	y1
-5.	-119.
-4.	-59.
-3.	-23.
-2.	-5.
-1.	1.
0.	1.
1.	1.
2.	7.

x=-5.

MAIN RAD AUTO

c) [◆] [HOME] y1(x) [STO▸] f(x) [ENTER]

newt(-1.) [ENTER]

newt([2nd] [ANS]) [ENTER]

[ENTER]

...

[ENTER]

Das ergibt die Nullstelle x_n = **–1.32472** auf 6 Ziffern genau.

```
F1 F2 Algebra F3 Calc F4 Other F5 PrgmIO F6 Clear a-z...
■ y1(x) → f(x)                              Done
■ newt(-1.)                                 -1.5
■ newt(-1.5)                            -1.34783
■ newt(-1.3478260869565)                -1.3252
■ newt(-1.3252003989509)                -1.32472
■ newt(-1.3247181739991)                -1.32472
newt(ans(1))
MAIN    RAD AUTO    FUNC 30/30
```

Beispiel:

Für die Berechnung von Nullstellen soll ein Programm **newton** erstellt werden, die mit der Eingabe eines Startwerts x_0 und einer Genauigkeitsschranke eps die Näherungswerte x_i mitsamt den Funktionswerten ausgibt. (Die Funktion f(x) muss bei Ausführung des Programms schon definiert sein!)

Lösung:

Die Erstellung dieses Programms erfolgt im Programm-Editor, den wir mit

[APPS] 7 3 [▼] [▼] newton [ENTER] [ENTER] aufrufen.

Nun schreiben wir das Programm der Außenspalte ab.

Dabei sind in Zeile **(1)** die Eingangsparameter x_0 für den Startwert und eps für die Genauigkeit angegeben.

In Zeile **(3)** ist der Kommentar zu den Eingangsvariablen. Das erste Symbol © erzeugt man mit [F2] [9] .

In Zeile **(4)** erfolgt die Definition der NEWTONfunktion **newt**.

Programm **newton**: Die Eingabe erfolgt ohne die Zeilennummern!

(1) newton(x0, eps)

(2) Prgm

(3) © x0 – Startwert, eps

(4) Define newt(y)=

= y – f(y)/(*d* (f(z),z) | z=y)

In Zeile **(5)** werden die lokalen Parameter x1 und x2 für die x_i-Werte, n für die Iterationszahl angegeben.

In Zeile **(6)** werden die Anfangswerte für die Iteration übergeben: x1 startet mit x_0, n mit 1. Der Pfeil → steht für die STO▸-Taste.

In Zeile **(7)** wird der IO-Bildschirm gelöscht und die Titelzeile „Newton fuer" mit Funktion ausgegeben. " erzeugt man mit 2nd L .

In Zeile **(8)** beginnt die Loop-Schleife.

In Zeile **(9)** wird die Iterationszahl n, die Näherung x1 und deren Funktionswert ausgegeben (mit **string**, um alles in eine Zeile zu bringen). & erzeugt man mit 2nd H.

In Zeile **(10)** wird die neue Näherung auf x2 gespeichert.

In Zeile **(11)** wird abgefragt, ob die Differenz von alter und neuer Näherung schon kleiner als eps ist.

In Zeile **(12)** wird bei Erreichen der Bedingung mit EXIT aus der Schleife gesprungen und zu Zeile **(15)** verzweigt.

In Zeile **(13)** wird bei Nichterreichen der Absprungbedingung die neue Näherung x2 auf die Variable x1 gespeichert und n um 1erhöht.

Nach Erreichen des „EndLoop" – Befehls in Zeile (14) wird wieder bei Zeile **(8)** weiter gemacht.

Bei Zeile **(15)** endet das Programm.

Mit ◆ HOME schaltet man um auf den HOME-Bildschirm.

```
(5)  Local x1, x2, n
(6)  approx(x0) → x1: 1 → n
(7)  ClrIO: Disp
     "Newton fuer", f(x)
(8)  Loop
(9)  Disp string(n)&" "
     &string(x1)&" "
     &string(f(x1))
(10) newt(x1) → x2
(11) If abs(x2 – x1)<eps
(12) Exit
(13) x2 → x1: n + 1 → n
(14) EndLoop
(15) EndPrgm
```

STO▸ & | " d

Beispiel:

Mit dem soeben erstellten Programm **newton** soll die Funktion $f(x) = x^3 - x$ auf Nullstellen untersucht werden. Es sollen die Startwerte 0,4, 0,5 und 0,6 benutzt werden (eps $= 10^{-6}$).

Lösung:

Eingabe der Funktionen:

F6 ENTER F6 <Löschen der einbuchstabigen Variablen>

x^3 – x STO▸ f(x) ENTER

Die NEWTONfunktion wird aufgerufen:

newton (0.4, 1. 2nd EE –6) ENTER

Das ergibt die Nullstelle 0 ($1.84213 \cdot 10^{-12} \approx 0$).

◆ HOME newton (0.5, 1. 2nd EE –6) ENTER

Das ergibt die Nullstelle – 1.

◆ HOME newton (0.6, 1. 2nd EE –6) ENTER

Das ergibt die Nullstelle 1.

Die Nullstellen sind also 0, –1 und 1, allerdings in einer ungewöhnlichen Reihenfolge. Man würde sich erwarten, dass die Nullstellen der Reihe nach erscheinen. Dem ist aber nicht so. Bei den Startwerten 0,44 0,45 und 0,46 passiert wieder das gleiche.

```
F1 F2 Algebra F3 Calc F4 Other F5 PrgmIO F6 Clear a-z...
■ x^3 - x → f(x)                    Done
■ newton(.4, 1.E-6)                 Done
newton(0.4,1.E-6)
MAIN    DEG AUTO    FUNC 24/30
```

```
Newton fuer
x^3 - x
1  .4       -.336
2  -.246154  .231239
3  .036457  -.036408
4  -.000097  .000097
5  1.84213E-12  -1.84213E-12
MAIN    DEG AUTO    FUNC 25/30
```

```
2  -.246154  .231239
3  .036457  -.036408
4  -.000097  .000097
5  1.84213E-12  -1.84213E-12
Newton fuer
x^3 - x
1  .5   -.375
2  -1.   0.
MAIN    DEG AUTO    FUNC 26/30
```

```
2  5.4     152.064
3  3.64163  44.6517
4  2.49035  12.9544
5  1.75453  3.64661
6  1.31173  .945259
7  1.0846   .191281
8  1.00897  .01818
9  1.00012  .000236
10 1.   4.18958E-8
MAIN    DEG AUTO    FUNC 27/30
```

> Ein **„mathematisches CHAOS“** entsteht dann, wenn kleine Änderungen der Eingangsgrößen große und nicht vorhersehbare Änderungen der berechneten Werte ergeben.

Dieses Beispiel zeigt ein sogenanntes **„mathematisches CHAOS“**. Eine kleine Änderung des Startwertes der NEWTONiteration ergibt ganz andere Nullstellen. Das heißt, dass die Kondition des NEWTONschen Näherungsverfahrens in Bezug auf die Eingabe eines Startwertes, der beliebig weit von einer Nullstelle entfernt ist, recht schlecht ist. So schlecht, dass man nicht vorhersagen kann, welche Nullstelle gefunden wird. Lokal gilt allerdings, dass bei Wahl eines geeigneten Startwertes (in der Nähe einer Nullstelle) das NEWTONsche Näherungsverfahren **quadratisch konvergiert**, das heißt, dass die Fehler quadratisch kleiner werden.

$(\frac{1}{10} \to \frac{1}{100} \to \frac{1}{10.000} \to \frac{1}{1.000.000})$

Mit Hilfe des NEWTONschen Näherungsverfahrens kann man eine oder auch mehrere Lösungen der Gleichung bestimmen. Rechnet man händisch, wird man nach Ermittlung einer Lösung mittels Polynomdivision durch (x – Lösung) ein Polynom mit einem kleineren Grad berechnen und dieses weiter auf Nullstellen untersuchen.

Beim TI-92 werden bei Verwendung des **solve**-Befehls meist alle Nullstellen angegeben. (Aber auch hier gibt es Ausnahmen, wie wir später sehen werden.)

[F1] [F2] [|] [←] [<] [e^x] [ESC]

TI-92: solve- und nsolve-Befehl

Beispiel:

Man löse die Gleichung $e^x = 2x+5$ mit dem **solve** und **nsolve**-Befehl und bestimme die Lösungen auch grafisch.

Lösung:

Die Eingabe für die **solve**-Funktion ist:

[F2] [ENTER] [2nd] [e^x] x) = 2x+5,x) [ENTER]

Ergebnis: x = 2,25164 oder x = – 2,45716

Die verkürzte Eingabe für die **nsolve**-Funktion ist:

[◀] n [ENTER]

Ergebnis: 2,25164

Um auch das zweite Ergebnis zu erhalten, muss man den Wertebereich der **nsolve**-Funktion einschränken:

[▶] [2nd] [|] x [2nd] [<] 2.25 [ENTER]

Ergebnis: – 2,45716

Die grafische Lösung erfolgt durch Eingabe der beiden Funktionen e^x und 2x + 5:

[◆] [Y=] [F1] 8 [ENTER] [2nd] [e^x] x) [ENTER] 2x + 5 [ENTER]

Mit [F2] 6 wird die Grafik angezeigt.

Man sieht, dass es nur die zwei angegebenen Lösungen gibt.

```
F1 F2 Algebra F3 Calc F4 Other F5 PrgmIO F6 Clear a-z...
■ solve(e^x = 2·x + 5, x)
                 x = 2.25164 or x = -2.45716
■ nSolve(e^x = 2·x + 5, x)              2.25164
nsolve(e^(x)=2x+5,x)
MAIN        DEG AUTO        FUNC 2/30
```

```
F1 F2 Algebra F3 Calc F4 Other F5 PrgmIO F6 Clear a-z...
■ nSolve(e^x = 2·x + 5, x) | x < 2.25
                                -2.45716
nsolve(e^(x)=2x+5,x)|x<2.25
MAIN        DEG AUTO        FUNC 3/30
```

```
F1 F2 Zoom F3 Edit F4 ✓ F5 All F6 Style
PLOTS
✓y1=e^x
✓y2=2·x + 5
y3=
y4=
y5=
y6=
y7=
y8=
y9=
y10=
y3(x)=
MAIN        DEG AUTO        FUNC
```

```
F1 F2 Zoom F3 Trace F4 ReGraph F5 Math F6 Draw F7
y
x
MAIN        DEG AUTO        FUNC
```

Beispiel:

Man löse die Gleichung $x^{999} - x^{991} + x^{994} - 122 = 0$ mit **solve** und **nsolve** und untersuche die zugehörige Funktion auch grafisch

Lösung:

Die Eingabe für die **solve**-Funktion ist:

[◆] [HOME] [F1] 8 [F2] [ENTER] x^999 – x^991 + x^994 – 122 = 0,x) [ENTER]

Ergebnis: Nach 3 Minuten Wartezeit brechen wir die Berechnung mit [ON] und [ESC] ab. Es gibt also keine Lösung mit **solve**!

Die verkürzte Eingabe für die **nsolve**-Funktion ist:

[◄] n [ENTER]

Ergebnis: 1,00481

Um auch weitere Ergebnisse zu erhalten, muss man den Wertebereich der **nsolve**-Funktion einschränken:

[►] [2nd] [|] x [2nd] [<] 1.00481 [ENTER]

Ergebnis: 1.00481

Wir versuchen es mit :

[►] [←] [←] [ENTER]

Ergebnis: -1.00489

Um weitere Lösungen zu finden, versuchen wir es mit der Grafik:

[◆] [Y=] [F1] 8 [ENTER] x^999 – x^991 + x^994 – 122 [ENTER]

Mit [F2] 6 wird die Grafik angezeigt:

Man sieht, dass es drei Lösungen gibt. Also kehren wir mit [◆] [HOME] zum HOME-Bildschirm zurück und versuchen, die dritte Lösung im negativen Bereich zu finden. Erfolg haben wir mit:

nsolve $(x^{999} - x^{991} + x^{994} - 122 = 0, x) \quad | \; x < -1.1$

Ergebnis: –1.1148

Wann ist welche Methode zur Gleichungslösung sinnvoll?

Das **NEWTONsche Näherungsverfahren** ist bei den meisten Funktionen gut verwendbar. Probleme wird es geben, wenn die Funktion fast senkrecht durch die x-Achse geht, da dann der Startwert sehr nahe sein muss, sonst findet das Verfahren nicht zur Nullstelle. Ebenso gibt es Probleme, wenn bei fast waagrechten Nullstellendurchgängen die erste Ableitung der Funktion sehr klein oder Null wird, da dann die Näherungen schlecht werden. Hier kann man das schon früher beschriebene **„Regula falsi“**-Verfahren einsetzen, da es nicht so sensibel auf die Funktionswerte oder gar Ableitungen reagiert.

Zur Startwertsuche empfiehlt sich die **grafische Darstellung** samt den ZoomIn und ZoomOut-Möglichkeiten.

Am meisten wird man aber den **solve**-Befehl des TI-92 verwenden. Bleibt dieser in einer „ewigen“ Schleife hängen, verwendet man den **nsolve**-Befehl mit Einschränkungen – wie im vorigen Beispiel!

SIMPSONsche Regel:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n}\cdot\left\{\begin{matrix} f(a)+f(b)+ \\ 4\cdot[f(x_1)+f(x_3)+...+f(x_{n-1})]+ \\ 2\cdot[f(x_2)+f(x_4)+...+f(x_{n-2})] \end{matrix}\right\}$$

mit $n \in \mathbb{N}_g$ und $x_i = a + \frac{b-a}{n}\cdot i$

```
simps(a,b,n)                          (1)
Func                                  (2)
© a,b... Intervallgrenzen,
n..Teilungen                          (3)
Local h,s                             (4)
If n/2≠int(n/2) Then                  (5)
 Return "Nur gerade n eingeben!"      (6)
EndIf                                 (7)
(b – a)/n→h                           (8)
f(a)+f(b)→s                           (9)
s+4*sum(seq(f(a+k*h),
k, 1, n-1,2))→s                       (10)
s+2*sum(seq(f(a+k*h),
k,2,n-2,2))→s                         (11)
s*h/3                                 (12)
EndFunc                               (13)
```

Das Zeichen © in Zeile **(3)** ist erreichbar mit [F2] [9]. Das Ungleichheitszeichen in Zeile **(5)** ist erreichbar mit [2nd] [V]. Das Rufzeichen in Zeile **(5)** ist erreichbar mit [2nd] [W].

MODE FLOAT einstellen:

```
MODE
F1 Page 1 | F2 Page 2
Graph.............. FUNCTION→
Current Folder..... main→
Display Digits..... FLOAT→
Angle.............. RADIAN→
Exponential Format  NORMAL→
Complex Format..... REAL→
Vector Format...... RECTANGULAR→
Pretty Print....... ON→
(Enter=SAVE)              (ESC=CANCEL)
USE ← AND → TO OPEN CHOICES
```

```
F1 | F2 Algebra | F3 Calc | F4 Other | F5 PrgmIO | F6 Clear a-z...
■ simps(0,1,1)      "Nur gerade n eingeben"
■ simps(0,1,2)              (e + 4·√e + 1)/6
■ simps(0,1,2)              1.71886115188
■ simps(0,1.,4)             1.71831884192
■ simps(0,1.,6)             1.71828916992
simps(0,1.,6)
MAIN      RAD AUTO      FUNC 5/30
```

4.6 Die SIMPSONsche Regel zur näherungsweisen Integralberechnung

Da die Berechnung des Integrals mit Hilfe der SIMPSONschen Regel oft recht aufwendig ist, soll eine Funktion programmiert werden, die uns die Arbeit erleichtert. Dadurch kann man auch die selbstgeschriebene Funktion simps(a,b,n) mit der Integralfunktion $\int_a^b f(x)\,dx$ des TI-92 vergleichen.

Beispiel:

Die SIMPSONsche Regel soll als Funktion programmiert werden

Lösung:

Die Eingabeparameter dieser Funktion sind die Intervallgrenzen a und b und die Intervallteilungszahl n (Zeile **(1)**). Mit Hilfe der lokalen Parameter h für die Intervalllänge und s für die Integralsumme (Zeile **(4)**) wird das Integral berechnet.

Die Abfrage in Zeile **(5)**, ob n ungerade ist, ergibt in Zeile **(6)** die Ausgabe von „Nur gerade n eingeben!" In Zeile **(8)** wird die Intervalllänge h berechnet, in Zeile **(9)** wird f(a) + f(b) auf der Summenvariablen s gespeichert. In Zeile **(10)** wird die Summe der ungeraden Funktionswerte auf s gespeichert. In Zeile **(11)** wird die Summe der geraden Funktionswerte auf s gespeichert. In Zeile **(12)** wird s mit $\frac{h}{3}$ multipliziert und ausgegeben. (Das funktioniert auch ohne Angabe von „Return".)

Die Eingabe der Funktion erfolgt mit:

[APPS] 7 3 (▶) 2 (▼) (▼) simps [ENTER] [ENTER]

Nun erfolgt die Eingabe der nebenstehenden Funktion.

Zum Schluss kehrt man mit [◆] [HOME] in den HOME-Bildschirm zurück.

Beispiel:

Das Integral $\int_0^1 e^x dx$ $(= e^1 - e^0 = 1{,}71828182846)$ soll mit Hilfe der Funktion simps für n = 1, 2, 4, 6, 10, 100 und mit Hilfe der Integralfunktion des TI-92 berechnet werden.

Lösung:

Zuerst wählen wir für die Anzeige den MODE FLOAT für die Anzeige:

[MODE] (▼) (▼) (▶) E [ENTER]

Dann wird die Funktion eingegeben:

[2nd] [e^x] x) [STO▶] f(x) [ENTER]

Die Berechnung wird gestartet:

simps(0, 1, 1) [ENTER]

simps(0, 1, 2) [ENTER]

[◆] [ENTER]

simps(0,1.,4) [ENTER]

(Die Ausgabe als APPROX-Wert wird nicht nur mit [◆] [ENTER], sondern auch mit Eingabe von Dezimalzahlen erzwungen!)

simps(0,1.,6) [ENTER]

simps(0,1.,10) ENTER

simps(0,1.,100) ENTER

2nd ∫ f(x),x,0,1.) ENTER

Das Ergebnisse sind (fett gedruckt sind die „richtigen" Ziffern):

n = 2	n = 4	n = 6
1.71886115188	**1.718**31884192	**1.71828**916992
n = 10	**n = 100**	**TI-92**
1.71828278192	**1.71828182**855	**1.71828182846**

```
▪ simps(0,1.,10)        1.71828278192
▪ simps(0,1.,100)       1.71828182855
▪ ∫_0^1. f(x)dx         1.71828182846
∫(f(x),x,0,1.)
MAIN    RAD AUTO    FUNC 8/30
```

Wie man sieht, ist auch bei n = 100 das Ergebnis „nur" auf 10 Ziffern genau, hingegen ist das Ergebnis bei n = 2 (= KEPLERsche Fassregel) schon auf 4 Ziffern genau, was für das händische Rechnen ausreichend ist!

Die Berechnung des Integrals mit Hilfe der SIMPSONschen Regel ist ohne Ahnung, wie gut das Ergebnis ist, eine halbe Sache! Daher benutzen wir im nächsten Beispiel die nebenstehende Formel, um den Verfahrensfehler bei der SIMPSONschen Regel abzuschätzen:

Der **maximale Verfahrensfehler ε** der SIMPSONschen Regel beträgt:

$$\varepsilon = |\text{Integral} - \text{SIMPSON}| \leq \frac{M \cdot (b-a)^5}{180 \cdot n^4}$$

mit M = Maximum von $|f^{(4)}(x)|$ für $a \leq x \leq b$.

$f^{(4)}(x)$ ist die vierte Ableitung der Funktion. Das Maximum der vierten Ableitung kann man grafisch oder mittels Differenzialrechnung bestimmen.

Da der Verfahrensfehler von $\left(\frac{1}{n}\right)^4$ abhängig ist, spricht man von einem **Verfahren 4. Ordnung**.

Beispiel:

Der maximale Verfahrensfehler bei Berechnung des Integrals mittels SIMPSONscher Regel für das vorige Beispiel ist mittels nebenstehender Formel anzugeben und mit dem tatsächlichen Fehler zu vergleichen.

Lösung:

Zuerst berechnen wir M. Dazu sehen wir uns die vierte Ableitung der Funktion $f(x) = e^x$ an und bestimmen das Maximum im Intervall $[a,b] = [0,1]$:

MODE ▸ 1 ENTER <MODE Graph... FUNCTION>

2nd eˣ x) STO▸ f(x) ENTER <Funktionseingabe>

◆ Y= F1 8 ENTER <Löschen des Y = Bildschirms>

2nd d f(x),x,4) ENTER <Eingabe der 4.Ableitung>

F2 4 <ZoomDec>

F3 1 ENTER <$f^{(4)}$ (1) ablesen>

ergibt das Maximum M = 2.718...

```
F3     F4       F5▾  F6▾  F7
Trace ReGraph Math Draw ▾
                    yc:2.7182818
RAD AUTO          FUNC
```

Nun können wir den Fehler $\varepsilon = |\text{Integral} - \text{SIMPSON}| \leq \frac{M \cdot (b-a)^5}{180 \cdot n^4}$

für n = 2, 4, 6, 10, 100 berechnen:

◆ HOME 2.72*(1 – 0)^5 / (180n^4) 2nd | n = 2 ENTER

▸ ← 4 ENTER

▸ ← 6 ENTER

▸ ← 10 ENTER

```
F1  F2▾     F3▾  F4▾   F5     F6
    Algebra Calc Other PrgmIO Clear a-z...
▪ eˣ → f(x)                               Done
▪ 2.72·(1-0)^5/(180·n^4) | n = 2    9.44444444444E-4
▪ 2.72·(1-0)^5/(180·n^4) | n = 4    5.90277777778E-5
2.72*(1-0)^5/(180n^4)|n=4
MAIN    RAD AUTO    FUNC 11/30
```

```
F1  F2▾     F3▾  F4▾   F5     F6
    Algebra Calc Other PrgmIO Clear a-z...
▪ 2.72·(1-0)^5/(180·n^4) | n = 6    1.16598079561E-5
▪ 2.72·(1-0)^5/(180·n^4) | n = 10   1.51111111111E-6
2.72*(1-0)^5/(180n^4)|n=10
MAIN    RAD AUTO    FUNC 13/30
```

```
■ 2.72·(1-0)^5/(180·n^4) | n=100
                         1.51111111111E-10
2.72*(1-0)^5/(180n^4)|n=100
MAIN        RAD AUTO        FUNC 14/30
```

```
F1 F2 Algebra F3 Calc F4 Other F5 PrgmIO F6 Clear a-z...
■ simps(0,1.,n) - ∫ f(x)dx | n=2
                         5.793234175E-4
■ simps(0,1.,n) - ∫[0,1.] f(x)dx | n=4
                         3.70134628E-5
■ simps(0,1.,n) - ∫[0,1.] f(x)dx | n=6
                         7.3414619E-6
```

```
■ simps(0,1.,n) - ∫[0,1.] f(x)dx | n=10
                         9.534658E-7
■ simps(0,1.,n) - ∫[0,1.] f(x)dx | n=100
                         9.55E-11
...0,1.,n)-∫(f(x),x,0,1.)|n=100
MAIN        RAD AUTO        FUNC 19/30
```

n	max. Fehler	tats. Fehler
2	$9{,}4\cdot10^{-4}$	$5{,}8\cdot10^{-4}$
4	$5{,}9\cdot10^{-5}$	$3{,}7\cdot10^{-5}$
6	$1{,}2\cdot10^{-5}$	$7{,}3\cdot10^{-6}$
10	$1{,}5\cdot10^{-6}$	$9{,}5\cdot10^{-7}$
100	$1{,}5\cdot10^{-10}$	$9{,}6\cdot10^{-11}$

(▸) 0 [ENTER]

Die realen Fehler ergeben sich aus der Eingabe:

simps(0,1.,n)– [2nd] [∫] f(x),x,0,1.) [2nd] [|] n = 2 [ENTER]

(▸) [←] 4 [ENTER]

(▸) [←] 6 [ENTER]

(▸) [←] 10 [ENTER]

(▸) 0 [ENTER]

Wenn man die maximal möglichen Fehler mit den tatsächlichen Fehlern vergleicht, erkennt man, dass die tatsächlichen Fehler ca. halb so groß wie die maximal möglichen Fehler sind. Die Abschätzung des maximal möglichen Fehlers ist also recht praktisch, um für eine vorgegebene Fehlerschranke ε die Anzahl der Intervallteilungen n für die SIMPSONsche Regel zu erhalten.

Abschätzung für die notwendige Intervallteilungszahl n bei der SIMPSONschen Regel:

$$n \geqslant \sqrt[4]{\frac{M\cdot(b-a)^5}{180\cdot\varepsilon}}$$

mit M = Maximum von $|f^{(4)}(x)|$ für $a \leqslant x \leqslant b$

Beispiel:

Zur Abschätzung der Intervallteilungszahl n der SIMPSONschen Regel bei Berechnung von $\int_2^3 \sqrt{x^3-1}\,dx$ verwende man nebenstehende Formel, berechne das Integral mit Hilfe der simps-Funktion und vergleiche das Ergebnis mit dem TI-92-Integral. Geforderte absolute Genauigkeit: $\varepsilon = 10^{-10}$

Lösung:

Zuerst erfolgt die grafische Darstellung der vierten Ableitung der Funktion:

$f(x) = \sqrt{x^3-1}$ um deren Maximum M zu bestimmen:

[2nd] [√] x^3 – 1) [STO▸] f(x) [ENTER]

[2nd] [d] f(x),x,4) [ENTER]

[STO▸] y1(x) [ENTER]

[◆] [Y=] [F2] 4 <ZoomDec>

[F3] 2 [ENTER]

```
F1 F2 Algebra F3 Calc F4 Other F5 PrgmIO F6 Clear a-z...
■ √(x^3-1) → f(x)                          Done
■ d^4/dx^4 (f(x))
   -9·x^2·(x^3-10)/(4·(x^3-1)^(5/2)) + 45·x^2·(x^6-20·x^3-8)/(16·(x^3-1)^(7/2))
ans(1)→y1(x)
MAIN        RAD AUTO        FUNC 2/30
```

```
F1 F2 Zoom F3 Trace F4 ReGraph F5 Math F6 Draw F7
                                                1
xc:2.              yc:-1.150422
MAIN        RAD AUTO        FUNC
```

Das Maximum des Betrags ergibt sich daher zu ca. 1,15. Damit berechnen wir nun n:

[◆] [HOME] (1.15 * (3 – 2)^5 / (180 * 1 [2nd] [EE] – 10)) ^(1 / 4) [ENTER]

Das n kann nun 90 sein und damit berechnen wir das Integral:

simps(2, 3., 90) [ENTER]

Zum Vergleich die TI-92-Lösung:

[2nd] [∫] f(x),x,2,3) [ENTER], die mit 11 Ziffern identisch ist mit der SIMPSONschen Regel.

```
F1 F2 Algebra F3 Calc F4 Other F5 PrgmIO F6 Clear a-z...
■ (1.15·(3-2)^5/(180·1.E-10))^(1/4)      89.4038731759
■ simps(2,3.,90)                          3.84038707426
■ ∫[2,3] f(x)dx                           3.84038707429
∫(f(x),x,2,3)
MAIN        RAD AUTO        FUNC 6/30
```

Beispiel:

Welche Konditionszahl hat die Berechnung des Integrals mittels SIMPSONscher Regel, wenn die Eingangsgröße a um 10^{-5} vergrößert wird.

Dies soll an Hand des vorigen Integrals $\int_2^3 \sqrt{x^3-1}\,dx$ mit der geforderten absoluten Genauigkeit $\varepsilon = 10^{-10}$ und $n = 90$ berechnet werden.

Lösung:

Dazu berechnen wir einfach:

(simps(2.00001,3.,90) – simps(2.,3.,90)) / simps(2.,3.,90) ENTER

Das Ergebnis ist der relative Fehler. Die Konditionszahl ergibt sich, wenn wir durch die Eingangsveränderung dividieren:

/ 0.00001 ENTER

Das ergibt 0,7 als Konditionszahl. Also gute Kondition! (< 1)

```
■ simps(2.00001,3.,90) - simps(2.,3.,90)
          simps(2.,3.,90)                 -.000007
■ -6.8893124803319E-6
        1.E-5                              -.688931
ans(1)/0.00001
MAIN         RAD AUTO         FUNC 8/30
```

(Die Anzeige erfolgt hier mit MODE Display Digits = K: FLOAT 6.)

Beispiel:

Welche Rechenfehler liefert die Berechnung folgenden Integrals:

$\int_{-1}^{1,01} f(x)dx$ mit der folgenden Funktion:

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{für } x \leqslant 0 \\ 2 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

a) unter Verwendung der SIMPSONschen Regel und $n = 100$

b) unter Verwendung des TI-92-Integrals

Lösung:

Die Eingabe der Funktion erfolgt auf folgende Weise als „Function“:

F4 ENTER <Define> f(x) = func: if x ◆ < 0 then: – 2: else: 2: endif: endfunc ENTER

Danach erfolgt die Eingabe der simps-Funktion:

simps(–1,1.01,100) ENTER

und die Eingabe des TI-92-Integrals:

2nd ∫ f(x), x, –1, 1.01) ENTER

Das richtige Resultat wäre: $\int_{-1}^{1,01} f(x)dx = -2 * 1 + 2 * 1.01 = 0.02$

Die absoluten Fehler sind:

a) 0,0068 **b)** $1,4 \cdot 10^{-9}$

Hier rechnet auch der TI-92 falsch, obwohl das Integral eigentlich ganz einfach zu berechnen wäre!

Schaubild von

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{für } x \leqslant 0 \\ 2 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

mit eingezeichneter Fläche

$$\int_{-1}^{1,01} f(x)dx$$

```
F1  F2 Zoom  F3 Trace  F4 ReGraph  F5 Math  F6 Draw  F7
y   2
          1
    -2                           x
MAIN         RAD AUTO         FUNC
```

```
F1  F2 Algebra  F3 Calc  F4 Other  F5 PrgmIO  F6 Clear a-z...
■ Define f(x)=Func                        Done
■ simps(-1,1.01,100)                      .0268
■ ∫ from -1 to 1.01 f(x)dx       .020000001406
■ .0268 - .02                             .0068
■ .020000001406297 - .02          1.406297E-9
.020000001406297-.02
MAIN         RAD AUTO         FUNC 13/30
```

(Die Anzeige erfolgt hier mit MODE Display Digits= E: FLOAT 6.)

```
■ -x^6 + 20·x^2 + 10·x + 40 → f(x)        Done
-x^6+20*x^2+10*x+40→f(x)
MAIN        RAD AUTO        FUNC 1/30
```

```
xmin=-3.
xmax=3.
xscl=1.
ymin=-20.
ymax=100.
yscl=10.
xres=2.
```

```
■ polyint([-2 f(-2); 0 f(0); 2 f(2)],3)   4·x^2 + 10·x + 40
■ 4·x^2 + 10·x + 40 → y2(x)               Done
ans(1)→y2(x)
MAIN        RAD AUTO        FUNC 6/30
```

Zusammenhang zwischen SIMPSONscher Regel und stückweiser Polynominterpolation:

Die SIMPSONsche Regel entsteht, wenn man die gegebene Funktion stückweise quadratisch interpoliert und danach integriert. Das wollen wir an einem Beispiel nachvollziehen:

Gegeben sei die Funktion $f(x) = -x^6 + 20x^2 + 10x + 40$. Wir stellen sie in dem Intervall –3 bis 3 grafisch dar:

[(-)] x^6 + 20x^2 + 10x + 40 [STO▸] f(x) [ENTER]

[◆] [WINDOW] [(-)] 3 [ENTER] 3 [ENTER] 1 [ENTER] [(-)] 20 [ENTER] 100 [ENTER] 10 [ENTER] 2 [ENTER]

[◆] [Y=] [F1] 8 [ENTER] f(x) [ENTER] [▲] [F6] 4 <Thick>

[◆] [GRAPH] liefert die grafische Darstellung:

```
1:Line
2:Dot
3:Square
✓4:Thick
5:Animate
6:Path
7:Above
8:Below
```

Nun wollen wir die Punkte P (-2,f(-2)) Q (0,f(0)) und R (2,f(2)) quadratisch interpolieren:

[◆] [HOME] polyint([[(-)] 2, f([(-)] 2); 0, f(0); 2, f(2)],3) [ENTER]

[STO▸] y2(x) [ENTER]

Wir sehen uns das an:

[◆] [GRAPH]

```
∫f(x)dx=181.333
```

(Hier wurde auch gleich mit der Funktion [F5] 7 integriert.)

Nun kann man das quadratische Polynom integrieren und mit der SIMPSONschen Regel vergleichen:

[◆] [HOME] [2nd] [∫] y2(x),x,-2,2.) [ENTER]

simps(–2,2.,2) [ENTER]

Beide Ergebnisse sind gleich!

```
■ ∫ from -2 to 2. y2(x)dx          181.333
■ simps(-2,2.,2)                   181.333
simps(-2,2.,2)
MAIN        RAD AUTO        FUNC 11/30
```

Rechenfehler bei der SIMPSONschen Regel können höchstens beim Summieren (Subtrahieren) vieler Einzelterme entstehen. Das kann zur „Subtraktionskatastrophe" führen, wenn das Ergebnis nahe Null ist, die einzelnen Terme aber recht groß sind, wie im vorigen Beispiel.

Schlussbetrachtung über die SIMPSONsche Regel:

Dieses Rechenverfahren ist genauer als das Trapezregelverfahren und andere Näherungen des Integrals, da es mit 4.Ordnung konvergiert. Einziges Problem sind Subtraktionskatastrophen wie beim obigen Beispiel.

Durch die praktische Fehlerabschätzung kann man auch die Intervallteilungszahl n optimal bestimmen.

AUFGABEN

Zahlenfolgen, Grenzwerte

1002. Die ersten 5 Glieder und das 30. Glied der gegebenen Folgen ist zu ermitteln:

a) $a_n = 2 - 4(n-1)$ **b)** $b_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ **c)** $c_n = 3^n - 2^{n-1}$

1003. In der vorigen Aufgabe ist zu bestimmen, welchen Wert die Folge annimmt, wenn n gegen ∞ strebt!

Die nachstehenden Terme sind unter Verwendung des Summenzeichens anzuschreiben:

1004. a) $2^2+4^2+6^2+8^2+\ldots$ **b)** $1+3+5+7+\ldots+99$

1005. a) $2^2+4^2+6^2+8^2+10^2$ **b)** $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}+\ldots$

1006. a) $1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\ldots$ **b)** $\frac{1}{9}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{9^3}+\ldots+\frac{1}{9^9}$

1007. a) $3^4+5^4+7^4+\ldots$ **b)** $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots$ (harmonische Reihe)

Die Summe der gegebenen Folgen ist mit dem TR zu ermitteln:

1008. a) $4^2, 6^2, 8^2, \ldots, 96^2$ **b)** $2, 4, 6, 8, 10, \ldots 1000$

1009. a) $1^2, 3^2, 5^2, 7^2, \ldots 99^2$ **b)** $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots \frac{1}{64}$

1010. a) $1, 2, 3, 4, \ldots 50$ **b)** $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{4^2}, \frac{1}{4^3}, \ldots$

1011. a) $3^2, 5^2, 7^2, \ldots$ **b)** $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^3}, \ldots$

Die folgenden Grenzwerte sind mit dem TR zu bestimmen:

1012. a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-2x+3\right)$ **b)** $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\left(\frac{7}{x^2}-4\right)$

1013. a) $\lim\limits_{x\to 50}\left(\frac{1}{x}-10\right)$ **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}$

1014. a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-2x^2+2x-1\right)$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x^3}{-x^2-2}$

1015. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3}{-x^3-2}$ **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5x^3}{-x^2-2}$

1016. a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x}$

Anleitung: Tastenfolge für die Bogenmaß-Einstellung: [MODE] ▼ ▼ ▼ ▶ [1] [ENTER]

1017. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$

1018. a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\cos x}{x}$

1019. a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{x^2}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x\cdot\tan x}{x}$

Differenzialrechnung

Bei den folgenden Aufgaben ist $f'(x_0)$ mittels TRs zu berechnen:

1020. a) $y = x^{-1} + x,\ x_0 = 2$ **b)** $y = \frac{\sqrt{x}}{x} + 1,\ x_0 = 5$ **c)** $y = 2x^3 + 5\sqrt{2},\ x_0 = 7$ **d)** $y = \sqrt[6]{8x^{11}} + 2\sqrt[3]{x},\ x_0 = \frac{1}{2}$

1021. a) $y = \sqrt[3]{x^2}\,(x-1)^2,\ x_0 = 5$ **b)** $y = \frac{12x^2-2x+1}{2x-50x^2},\ x_0 = \frac{1}{4}$ **c)** $y = \frac{x+\sqrt{x^2+9}}{x-\sqrt{x^2-9}},\ x_0 = 5$ **d)** $y = \sqrt{\frac{x+\sqrt{x+1}}{x-\sqrt{x-2}}},\ x_0 = 3$

Bei den folgenden Aufgaben ist die zweite Ableitung der folgenden durch ihre Funktionsgleichung gegebenen Funktionen mittels TRs zu bestimmen:

1022. a) $y = \ln x^5$ **b)** $y = x^{-\sqrt{x}}$ **c)** $y = \sqrt[x]{\frac{1}{x}}$ **d)** $y = \left(e^{-x} + e^{x}\right)^{x}$

1023. a) $y = \frac{1}{3}\ln\left(5x^2-3\right)^{\frac{3}{4}}$ **b)** $y = 3e^{\sqrt{x}}\ln^2\sqrt{e^{-x}}$ **c)** $y = x^{\cos x}$ **d)** $y = \ln x \cdot x^{\sin x}$

Die relativen Extremwerte (Maxima, Minima) der folgenden durch ihre Gleichung gegebenen Funktionen sind mittels TRs zu ermitteln. Weiters sind die Nullstellen der gegebenen Funktionen mit Hilfe des TRs **(1)** mit solve-Befehl **(2)** ohne solve-Befehl zu berechnen:

1024. a) $y = \frac{x^3}{4} - 2x - 1$ **b)** $y = -\frac{x^4}{2} + 3x^2 + 1$ **c)** $y = \frac{1}{5}\left(x^3 - 3x^2 - 14x\right)$ **d)** $y = \frac{x^4}{24} - x^2 + \frac{17}{3}$

1025. a) $y = \frac{x^2+4}{x+1}$ **b)** $y = \frac{x^4-1}{3x^2}$ **c)** $y = \sqrt{3x^2 - 3x - 1}$ **d)** $y = \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+1}}$

Bestimmen Sie alle Wendepunkte der nachstehenden durch ihre Gleichung gegebenen Funktionen mit Hilfe des TRs:

1026. a) $y = \frac{x^3}{6} + 2x - 1$ **b)** $y = \frac{1}{2}\left(x^4 - 5x^2 + 10\right)$ **c)** $y = \frac{1}{5}\left(x^3 + 3x^2 + 4x + 7\right)$ **d)** $y = \frac{27-x^3}{2x}$

1027. a) $y = \frac{8x}{x^2-1}$ **b)** $y = \sqrt{\frac{x}{x^2-1}}$ **c)** $y = \sqrt{x^2 - 5x + 7}$ **d)** $y = \sqrt[3]{\frac{x^2}{5(x+1)^2}}$

Es folgt ein Auszug aus der Bedienungsanleitung des TRs:

Eine Tangente zeichnen

Tip: Zum Entfernen einer gezeichneten Tangente drücken Sie F4 *(ReGraph).*

1. Drücken Sie im Grafikbildschirm F5 und wählen Sie **A: Tangent**.
2. Verwenden Sie nötigenfalls ⊙ oder ⊙, um die gewünschte Funktion zu wählen.
3. Definieren Sie die den Tangentenpunkt. Setzen Sie den Cursor auf den Punkt oder geben Sie dessen x-Wert ein.
4. Drücken Sie ENTER.

Die Tangente wird gezeichnet und ihre Gleichung angezeigt.

y1(x)=1.25x*cos(x)

y=-2.89768x+4.75991

1028. Verwenden Sie die obige Erklärung, um die Gleichung der **Wendetangente(n)** in den Aufgaben **1026.** und **1027.** zu ermitteln!

Integralrechnung

Die folgenden unbestimmten Integrale sind mit dem TR zu lösen:

1029. a) $\int (4+3x)^5\,dx$ **b)** $\int \sqrt[3]{5+7x}\,dx$ **c)** $\int e^{-4x+2}\,dx$ **d)** $\int \sin 10x\,dx$

1030. a) $\int \frac{x}{x^2+25}\,dx$ **b)** $\int \frac{x+5}{x^2-5x+6}\,dx$ **c)** $\int \frac{x^2-3x+3}{x^3-4x^2-7x+10}\,dx$ **d)** $\int \frac{\ln x}{(x+1)^3}\,dx$

Die folgenden bestimmten Integrale sind mit dem TR zu lösen:

1031. a) $\int_0^1 (3+2x)^5\,dx$ **b)** $\int_{-1}^0 \sqrt[4]{5+3x}\,dx$ **c)** $\int_{-1}^1 e^{-5x+1}\,dx$ **d)** $\int_0^\pi \sin 8x\,dx$

1032. a) $\int_0^2 \frac{x}{x^2+25}\,dx$ **b)** $\int_2^4 \frac{x+5}{x^2-5x+6}\,dx$ **c)** $\int_{-5}^{-3} \frac{x^2-3x+3}{x^3-4x^2-7x+10}\,dx$ **d)** $\int_0^1 \frac{\ln x}{(x+1)^3}\,dx$

Es folgt ein Auszug aus der Bedienungsanleitung des TRs:

Das numerische Integral über einem Intervall ermitteln

1. Drücken Sie im Grafikbildschirm F5 und wählen Sie 7: ∫f(x)dx.
2. Verwenden Sie nötigenfalls ▼ und ▲, um die gewünschte Funktion zu wählen.
3. Definieren Sie die den unteren Grenzwert für x. Setzen Sie den Cursor anhand von ◄ oder ► an den unteren Grenzwert oder geben Sie dessen x-Wert ein.
4. Drücken Sie ENTER. Die Marke ▶ am oberen Bildschirmrand kennzeichnet den unteren Grenzwert.
5. Definieren Sie den oberen Grenzwert und drücken Sie ENTER.

Das Intervall wird schattiert und dessen angenähertes numerisches Integral angezeigt.

y1(x)=1.25x*cos(x)

∫f(x)dx=15.6827

Tip: Grenzwerte können durch die Eingabe der x-Werte schnell bestimmt werden.

Tip: Zum Entfernen einer schattierten Fläche drücken Sie F4 (ReGraph).

1033. Verwenden Sie die obige Erklärung um den **a)** orange **b)** grün **c)** rot gekennzeichneten Flächeninhalt zu bestimmen.

Man berechne den Inhalt der von den gegebenen Kurven begrenzten Fläche A mittels TRs:

1034. a) $y^2=2x,\ y=x$ **b)** $y^2=4x,\ y=\frac{x^2}{4}$

1035. a) $y^2=2x,\ x^2=2y$ **b)** $y^2=4x,\ y-2x=0$

1036. a) $y=1-x^2,\ y=-x+1$ **b)** $y=4-x^2,\ y+4x=4$

1037. a) $y=x^2-x-6,\ y=3$ **b)** $y=x^2-x-6,\ y=0$

Fehlerabschätzung und Fehlerfortpflanzung

1038. Geben Sie den **a)** absoluten **b)** relativen **c)** prozentualen Fehler bei Annäherung von π durch 3 an.

1039. Geben Sie den **a)** absoluten **b)** relativen **c)** prozentualen Fehler bei Annäherung der Dichte von Stahl (= 7850 kg / m^3) durch 8000 kg / m^3 an.

1040. Die Geschwindigkeit eines Flugzeugs beträgt 1000 ± 150 km / h. Berechnen Sie die untere und die obere Schranke der Geschwindigkeit.

1041. Der Weinkonsum lag gestern bei $45 \pm 1{,}5$ l. Kann man sagen, dass mindestens 174 Viertel konsumiert wurden?

1042. Der Bauchumfang von Walter beträgt ungefähr 100 ± 2 cm. Geben Sie den relativen Messfehler an und schreiben Sie den Bauchumfang in Relativfehlerdarstellung an.

1043. Die Höhe eines Hauses wurde mit $h = 24 \pm 0{,}5$ m geschätzt. Geben Sie den relativen Messfehler an und schreiben Sie die Höhe in Relativfehlerdarstellung an.

1044. Der prozentuale Fehler der Temperaturanzeige wird mit 3 % angegeben. Die aktuell angezeigte Körpertemperatur von Claudia beträgt 36,8 °C. Kann man sagen, dass sie möglicherweise schon Fieber hat (= 37 °C)? Geben Sie die obere und die untere Schranke der Körpertemperatur an!

1045. Die Wohnungsfläche wurde mit 100 m^2 gemessen. Der Messfehler ist 2 %. Geben Sie die obere und die untere Schranke der Wohnungsfläche an!

1046. Aus einer Schätzung des Heizenergiebedarfs geht hervor: Die obere Schranke der Energiemenge beträgt 4000 kWh, die untere Schranke ist 3500 kWh. Geben Sie dies in der Form $x \pm \Delta x$ an!

1047. „Der Zug fährt jetzt mindestens 100 km / h und höchstens 120 km / h" sagt Gerhard. Wie kann man dies in der Form $x \pm \Delta x$ angeben?

1048. Berechnen Sie die absoluten Fehler bei der **a)** Addition **b)** Subtraktion der Zahlen $x = 600 \pm 50$ und $y = 800 \pm 100$? Dazu addiere und subtrahiere man die oberen und unteren Schranken der beiden Zahlen auf sinnvolle Art und ermittle daraus die absoluten Fehler!

1049. Berechnen Sie die absoluten Fehler bei der **a)** Addition **b)** Subtraktion der Zahlen $x = 2000 \pm 50$ t und $y = 3200 \pm 80$ t durch sinnvolle Addition und Subtraktion der oberen und unteren Schranken!

Lösen Sie die folgenden Aufgaben mit Hilfe des linearen Fehlerfortpflanzungsgesetzes:

1050. Berechnen Sie in Aufgabe **1048.** den absoluten Fehler mit Hilfe des linearen Fehlerfortpflanzungsgesetzes.

1051. Berechnen Sie in Aufgabe **1049.** den absoluten Fehler mit Hilfe des linearen Fehlerfortpflanzungsgesetzes.

1052. Aus den Angaben der Seiten $a = 12 \pm 1$ cm, $b = 24 \pm 1{,}5$ cm und $c = 30 \pm 1$ cm soll der Umfang des Dreiecks samt absolutem Fehler berechnet werden.

1053. Die Winkel eines Dreiecks sind $\alpha = 20 \pm 0{,}5°$ und $b = 65 \pm 1°$. Berechnen Sie daraus den dritten Winkel γ.
Anleitung: Der absolute Fehler der Differenz $180° - (\alpha + \beta)$ ist derselbe wie von $(\alpha + \beta)$.

1054. Zwei Schüler haben die Körpergrößen $178 \pm 0{,}5$ cm und $181 \pm 0{,}5$ cm. Geben Sie die Differenz in der Absolutfehlerdarstellung an.

1055. Der halbe Umfang eines Rechtecks beträgt 45 ± 1 cm. Die Breite beträgt $12 \pm 0{,}5$ cm. Geben Sie die Länge des Rechtecks in der Absolutfehlerdarstellung an.

1056. Berechnen Sie die Arbeit einer Maschine, die mit der Kraft von 20000 N ein Auto zerdrückt und dabei einen „Weg" von 1 m zurücklegt. Die Zahlenangaben sind auf 5 % genau. Geben Sie die Arbeit in der Relativ- und Absolutfehlerdarstellung an.

1057. Die Maße eines Zimmers sind: $l = 6{,}5$ m, $b = 4$ m und $h = 3$ m. Geben Sie das Volumen des Zimmers in der Relativ- und Absolutfehlerdarstellung an, wenn die Angaben auf 2 % genau sind.

1058. Die Höhe und die Basislänge einer geraden quadratischen Pyramide wird mit $h = 40 \cdot (1 \pm 5\,\%)$ cm und $a = 60 \cdot (1 \pm 2{,}5\,\%)$ cm angegeben. Geben Sie das Volumen V der Pyramide in der Relativ- und Absolutfehlerdarstellung an.

1059. Der Widerstand einer Leitung kann durch Messung von Stromstärke I und Spannung U erfolgen. $U = 22\,000$ V und $I = 100$ A. Der Widerstand ergibt sich aus dem OHMschen Gesetz: $R = \frac{U}{I}$. Die gegebenen Größen sind auf 1 % genau gegeben. Geben Sie den Widerstand in der Relativ- und Absolutfehlerdarstellung an.

1060. Ein zylindrisches Glas soll 250 cm^3 Flüssigkeit aufnehmen können. Die Grundfläche soll 25 cm^2 groß sein. Wie hoch muss das Glas mindestens sein? Die Angaben für Volumen und Grundfläche sind auf 3 % genau. Geben Sie die Höhe in der Relativ- und Absolutfehlerdarstellung an.

Die folgenden Aufgaben sind etwas anspruchsvoller:

1061. An zwei aufeinander folgenden Tagen wird zwischen 8 und 9 Uhr der Zählerstand des „Stromzählers" (eigentlich Energiezählers) abgelesen. Die Werte sind $E_1 = 290 \pm 0{,}2$ kWh und $E_2 = 362 \pm 0{,}2$ kWh. Berechnen Sie daraus die Stundenleistungsabgabe.

Anleitung: Berechnen Sie die Zeitdifferenz mit der Additionsregel der absoluten Fehler und dann die Energiedifferenz ebenso. Der Quotient aus $\frac{\text{Energie}}{\text{Zeit}}$ wird mit der Relativfehlerregel berechnet.

1062. Die Fläche der Nebenräume einer Wohnung beträgt 10 ± 1 m^2. Der Hauptraum wurde ausgemessen. Die Länge beträgt $12 \pm 0{,}2$ m. Die Breite beträgt $3{,}5 \pm 0{,}1$ m. Wie groß ist die Gesamtfläche und wie groß ist der absolute Fehler dabei?

Anleitung: Zuerst berechnet man die Fläche des Hauptraumes mit der Produktregel und der Summe der relativen Fehler, die man dann in den absoluten Fehler umwandelt. Sodann addiert man beide Flächen mit der Additionsregel der absoluten Fehler.

1063. Gegeben ist die Formel zur Berechnung der kinetischen Energie $E_{kin} = \frac{m}{2} \cdot v^2$. Wie wirken sich 5%-ige Angabefehler von m und v auf das Ergebnis aus? Geben sie das Ergebnis in der Relativ- und Absolutfehlerdarstellung an!

Konditionszahlen und Kondition

1064. Berechnen Sie die Konditionszahl K_{10} und die Kondition der zweiten Potenz $y = x^2$ für $x = 10 \pm 1$ unter Anwendung des linearen Fehlerfortpflanzungsgesetze. Stellen Sie das Ergebnis in der Absolutfehlerdarstellung $y \pm \Delta y$ dar!

1065. Berechnen Sie die Konditionszahl K_{10} und die Kondition der fünften Potenz $y = x^5$ für $x = 10 \pm 1$ unter Anwendung des linearen Fehlerfortpflanzungsgesetzes. Stellen Sie das Ergebnis in der Absolutfehlerdarstellung $y \pm \Delta y$ dar!

1066. Berechnen Sie die Konditionszahl K_{20} und die Kondition der Kreisflächenberechnung $A = \pi r^2$ für $r = 20 \pm 1$ cm unter Anwendung des linearen Fehlerfortpflanzungsgesetzes. Stellen Sie das Ergebnis in der Absolutfehlerdarstellung $A \pm \Delta A$ dar!

1067. Berechnen Sie die Konditionszahl K_{20} und die Kondition der Kreisumfangberechnung $u = 2\pi r$ für $r = 20 \pm 1$ cm unter Anwendung des linearen Fehlerfortpflanzungsgesetzes. Stellen Sie das Ergebnis in der Absolutfehlerdarstellung $u \pm \Delta u$ dar!

1068. Berechnen Sie die Konditionszahl K_{20} und die Kondition der Kugelvolumenberechnung $V = \frac{4\pi r^3}{3}$ für $r = 20 \pm 1$ cm unter Anwendung des linearen Fehlerfortpflanzungsgesetzes. Stellen Sie das Ergebnis in der Absolutfehlerdarstellung $V \pm \Delta V$ dar!

1069. Berechnen Sie die Konditionszahl K_{10} und die Kondition der linearen Funktion $y = 2x - 3$ für $x = 10 \pm 1$ unter Verwendung der Fehlerschranken y_o und y_u.

1070. Berechnen Sie die Konditionszahl K_5 und die Kondition der Funktion $y = x^2 - 2x$ für $x = 5 \pm 1$ unter Verwendung der Fehlerschranken y_o und y_u.

1071. Berechnen Sie die Konditionszahl K_{10} und die Kondition der Funktion $y = \frac{1}{1-x}$ für $x = 10 \pm 1$ unter Verwendung der Fehlerschranken y_o und y_u.

1072. Berechnen Sie die Konditionszahl K_x und die Kondition der dritten Potenz $y = x^3$ unter Anwendung der Differenzialrechnung. Berechnen Sie damit $y \pm \Delta y$ für $x = 10 \pm 1$.

1073. Berechnen Sie die Konditionszahl K_x und die Kondition der Funktion $y = \sqrt{x+1}$ unter Anwendung der Differenzialrechnung. Berechnen Sie damit $y \pm \Delta y$ für $x = 15 \pm 1$.

1074. Berechnen Sie die Konditionszahl K_x und die Kondition der Funktion $y = \frac{1}{x^2}$ unter Anwendung der Differenzialrechnung. Berechnen Sie damit $y \pm \Delta y$ für $x = 10 \pm 1$.

1075. Berechnen Sie die Konditionszahl K_x der Funktion $y = x^3 - x$ allgemein und bestimmen Sie den x-Bereich, in dem die Kondition der Funktion kleiner als 1 ist.

Die folgenden Aufgaben sind etwas anspruchsvoller:

1076. Berechnen Sie die Konditionszahl und die Kondition der Funktion $y = x - 4$ für $x = 6 \pm 0{,}6$ **a)** mit den Fehlerschranken **b)** mit Hilfe der Differenzialrechnung und berechnen Sie damit $y \pm \Delta y$.

1077. Welche Konditionszahl hat die kinetische Energie $E = \frac{m}{2} \cdot v^2$ in Bezug auf **a)** m $\left(K_m = \left|\frac{dE}{dm} \cdot \frac{m}{E}\right|\right)$

b) v $\left(K_v = \left|\frac{dE}{dv} \cdot \frac{v}{E}\right|\right)$. Welche Variable hat schlechte Kondition?

Fehler beim Arbeiten mit dem TR

1078. Geben Sie die Zahlen 6500 und 123000111 **a)** als ganze Zahl mit ENTER (EXACT-Mode) **b)** als Kommazahl mit ◆ ENTER **c)** als Kommazahl mit „Kommapunkt“ **d)** in Gleitkommadarstellung mit „Kommapunkt“ und Exponent ein und schreiben Sie das Ergebnis in mathematischer Schreibweise auf.
Anleitung: 1.5_E2 wird ersetzt durch $1{,}5 \cdot 10^2$.

1079. Man zeige, dass der TI-92 bei der Eingabe von **a)** 111222333444999. ENTER abschneidet **b)** 111222333444999 ENTER rundet. Geben Sie jeweils die intern angezeigte Zahl an!

1080. Stellen Sie folgende Zahlen im Zahlensystem $(4_{10}1)$ (mit Abschneiden) dar:

a) 23,4 **b)** 500,35 **c)** $4{,}7 \cdot 10^{-12}$ **d)** $2{,}8 \cdot 10^{12}$ **e)** 0,00032 **f)** 246784

1081. Bestimmen Sie im Zahlensystem $(4_{10}1)$ den absoluten und relativen Eingabefehler durch Abschneiden bei Eingabe der Zahlen 520178, 2000,4 und 0,340217 und stellen Sie die interne Zahl im **Gleitkommaformat** dar! Welche Zahl hat den größten relativen Eingabefehler?

1082. Bestimmen Sie im Zahlensystem $(4_{10}1)$ den absoluten und relativen Eingabefehler durch Abschneiden bei Eingabe der Zahlen 920346, 5,0001 und 0,0220066 und stellen Sie die interne Zahl im **Gleitkommaformat** dar! Welche Zahl hat den größten relativen Eingabefehler?

1083. Bestimmen Sie im Zahlensystem $(8_{10}2)$ (Taschenrechnersystem) die größte und die kleinste darstellbare Zahl!

1084. Bestimmen Sie im Zahlensystem $(14_{10}3)$ (TI-92) die größte und die kleinste darstellbare Zahl!

1085. Ergänzen Sie folgende Tabelle für das Zahlensystem $(4_{10}1)$ und die Addition:

	exakt (x)	interne Darstellung $(\tilde{x})$	absoluter Fehler $(\Delta x = \lvert x - \tilde{x} \rvert)$	relativer Fehler $\left\lvert \frac{\Delta x}{x} \right\rvert$
z. B.	254,67	254,6	0,07	0,000275
a)	2,0943			
b)		4,105	0,0002	
c)		24000		0,0002
d)			0,5	0,0001

Welche Zahl hat den größten relativen Eingabefehler?

Anleitung zu c): $\left(\left\lvert \frac{\Delta x}{x} \right\rvert\right) \cdot \lvert x \rvert = \Delta x$

Anleitung zu d): $\Delta x : \left(\left\lvert \frac{\Delta x}{x} \right\rvert\right) = \lvert x \rvert$

1086. Ergänzen Sie folgende Tabelle für das Zahlensystem $(4_{10}1)$ und die Addition:

	exakt (x)	interne Darstellung $(\tilde{x})$	absoluter Fehler $(\Delta x = \lvert x - \tilde{x} \rvert)$	relativer Fehler $\left\lvert \frac{\Delta x}{x} \right\rvert$
Zahl 1	2045,6			
Zahl 2	+ 36,874	+		
Summe	=	= ≈		

1087. Berechnen Sie 5000,5 + 60,3012 im Zahlensystem $(4_{10}1)$ mit Abschneiden der Eingangszahlen und Runden des Ergebnisses. Bestimmen Sie den absoluten und relativen Fehler der beiden Summanden und der Summe.

1088. Ergänzen Sie folgende Tabelle für das Zahlensystem $(4_{10}1)$ und die Subtraktion:

	exakt (x)	interne Darstellung $(\tilde{x})$	absoluter Fehler $(\Delta x = \lvert x - \tilde{x} \rvert)$	relativer Fehler $\left\lvert \frac{\Delta x}{x} \right\rvert$
Zahl 1	401,57			
Zahl 2	− 400,92	−		
Differenz	=	= ≈		

1089. Berechnen Sie 5000,1 – 4990,9 im Zahlensystem $(4_{10}1)$ mit Abschneiden der Eingangszahlen und Runden des Ergebnisses. Bestimmen Sie den absoluten und relativen Fehler des Minuenden, des Subtrahenden und der Differenz.

1090. Ergänzen Sie folgende Tabelle für das Zahlensystem $(4_{10}1)$ und die Multiplikation:

	exakt (x)	interne Darstellung ($\tilde{x}$)	absoluter Fehler ($\Delta x = \lvert x - \tilde{x} \rvert$)	relativer Fehler $\left\lvert \frac{\Delta x}{x} \right\rvert$
Zahl 1	2500,5			
Zahl 2	*6,0009	*		
Produkt	=	= ≈		

1091. Ergänzen Sie folgende Tabelle für das Zahlensystem $(4_{10}1)$ und die Division:

	exakt (x)	interne Darstellung ($\tilde{x}$)	absoluter Fehler ($\Delta x = \lvert x - \tilde{x} \rvert$)	relativer Fehler $\left\lvert \frac{\Delta x}{x} \right\rvert$
Zahl 1	80,408			
Zahl 2	: 100,01	:		
Quotient	=	= ≈		

1092. Ergänzen Sie folgende Tabelle für das Zahlensystem $(4_{10}1)$ und den Term $a \cdot b - c$:

	exakt (x)	interne Darstellung ($\tilde{x}$)	absoluter Fehler ($\Delta x = \lvert x - \tilde{x} \rvert$)	relativer Fehler $\left\lvert \frac{\Delta x}{x} \right\rvert$
a	2,5005			
b	*120,02			
$a \cdot b$	=	= ≈		
$-c$	– 300,15	–		
$= a \cdot b - c$	=	= ≈		

1093. Berechnen Sie im System $(4_{10}1)$ den folgenden Term $a + b - c$ auf zwei Arten: **a)** $a + b - c$ **b)** $a - c + b$

Vergleichen Sie die Ergebnisse hinsichtlich des relativen Fehlers für die Zahlen $a = 22{,}44$, $b = 0{,}03559$ und $c = 22{,}22$.

1094. Gegeben sind folgende zwei Terme: (1) $\frac{1}{7+4\sqrt{3}}$ (2) $7 - 4\sqrt{3}$

a) Zeigen Sie durch Eingabe im TI-92, dass beide Terme algebraisch äquivalent sind.

b) Welche Termberechnung ist numerisch stabiler und warum? Dazu berechne man beide im Zahlensystem $(4_{10}1)$ (entweder händisch oder mit der Funktion „rd") und mit dem TI-92.

Term (1)	System $(4_{10}1)$	TI-92 (approx) auf 14 Stellen (mit ↑ ENTER)
$\sqrt{3}$	rd($\sqrt{3}$, 4) ≈	$\sqrt{3}$ ≈
$4 \cdot \sqrt{3}$	rd(4 ·ANS(1),4) ≈	4 ·ANS(1) ≈
$7 + 4 \cdot \sqrt{3}$	rd(7+ANS(1),4) ≈	7 + ANS(1) ≈
$1/(7 + 4 \cdot \sqrt{3})$	rd(1 / ANS(1),4) ≈	1 / ANS(1) ≈

Term (2)	System $(4_{10}1)$	TI-92 (approx) auf 14 Stellen (mit ⬆ ENTER)
$\sqrt{3}$	rd($\sqrt{3}$,4) ≈	$\sqrt{3}$ ≈
$4 \cdot \sqrt{3}$	rd(4·ANS(1),4) ≈≈	4·ANS(1) ≈
$7 - 4 \cdot \sqrt{3}$	rd(7–ANS(1),4) ≈	7 – ANS(1) ≈

Anleitung: Man verwende die Funktion **rd** zum Runden einer Zahl z auf n Ziffern.
Eingabe: exp(format(z, "s"&string(n – 1)) STO▸ rd(z,n) ENTER
Aufruf: rd(123456,4) liefert eine Zahl, die auf 4 Ziffern gerundet wurde: 134500

Die folgenden Aufgaben sind etwas anspruchsvoller :

1095. Gegeben sind zwei Terme für die Berechnung des Summenwiderstandes zweier Parallelwiderstände:

(1) $R_g = \dfrac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$ (2) $R_g = \dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$

a) Zeigen Sie, dass beide Terme algebraisch äquivalent sind.

b) Welcher Term ist numerisch stabiler und warum? Dazu berechne man R_g wenn gegeben ist: $R_1 = 12{,}4$ und $R_2 = 49$ im Zahlensystem $(4_{10}1)$ (entweder händisch oder mit der Funktion „**rd**") und mit dem TI-92.

Term (1)	System $(4_{10}1)$	TI-92
R_1	12,4	12,4
$1/R_1$	≈	≈
R_2	49	49,0
$1/R_2$	≈	≈
$1/R_1 + 1/R_2$	≈	≈
$1/(1/R_1 + 1/R_2)$	**≈**	**≈**

Term (2)	System $(4_{10}1)$	TI-92
R_1	12,4	12,4
R_2	49	49,0
$R_1 \cdot R_2$	≈	≈
$R_1 + R_2$	≈	≈
$(R_1 \cdot R_2)/(R_1 + R_2)$	**≈**	**≈**

1096. Gegeben sind folgende Terme: (1) $\cos 2x$ (2) $\cos^2 x - \sin^2 x$

a) Zeigen Sie, dass beide Terme algebraisch äquivalent sind.

b) Welcher Term ist numerisch stabiler und warum? Dazu berechne man beide im Zahlensystem $(4_{10}1)$ (entweder händisch oder mit dem Programm „**rd**") und mit dem **TI-92** für $x = 44{,}999°$ (nicht vergessen: auf MODE Angle = DEGREE schalten!)

c) Gibt es eine weitere Möglichkeit den Term zu berechnen? Ist diese Möglichkeit numerisch stabiler?

1097. Gegeben sind folgende Terme für den Cosinussatz:

(1) $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma}$ (2) $c = \sqrt{(a-b)^2 + 4ab \cdot \sin^2\frac{\gamma}{2}}$

a) Zeigen Sie, dass beide Terme algebraisch äquivalent sind.

b) Welcher Term ist numerisch stabiler wenn $a \sim b$ (a ist fast so groß wie **b)** und $\gamma \sim 0$ (γ ist sehr klein) und warum? Dazu berechne man beide im Zahlensystem $(4_{10}1)$ (entweder händisch oder mit der Funktion „**rd**") und mit dem **TI-92** für a =12 , b = 12,945 und γ = 0,2° (nicht vergessen – auf MODE Angle = DEGREE schalten!) Anhand einer Skizze des Dreiecks entscheide man, welche Lösung genauer ist!

1098. Gegeben sind folgende zwei Möglichkeiten, einen Funktionsterm zu berechnen:

(1) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 8$ (2) $f(x) = ((x-3) \cdot x - 2) \cdot x + 8$ (HORNERschema)

a) Zeigen Sie, dass beide Terme algebraisch äquivalent sind.

b) Welcher Term ist numerisch stabiler und warum? Dazu berechne man beide im Zahlensystem $(4_{10}1)$ (entweder händisch oder mit dem Programm „**rd**") und mit dem **TI-92** für **(1)** x = 2,001 **(2)** x = –1,535 **(3)** x = –2,88.

Interpolation

1099. Die Auflage der Zeitung „Super" stieg von Jänner 2000 bis November 2000 von 14000 Stück auf 27000 Stück. Mittels **linearer Interpolation** ist die Auflage für April 2000 zu schätzen. (Hinweis: Zählen Sie die Monate durch und nehmen Sie dies als x-Werte)

a) mit dem Ansatz: $y = y_1 + (x - x_1)\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

b) mit der Funktion **linint** (xa, xb, ya, yb, x) am TI-92.

1100. Das Monatseinkommen der Schauspielerin Judith Rupert stieg von 20000 Euro im Jahre 1990 auf 65000 Euro im Jahre 1999. Schätzen Sie das Monatseinkommen im Jahre 2000 unter der Verwendung der Regel für die **lineare Interpolation**

a) mit dem Ansatz: $y = y_1 + (x - x_1)\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

b) mit der Funktion **linint** (xa, xb, ya, yb, x) am TI-92.

Bemerkung: Genau genommen ist die lineare Interpolation nur für die Bestimmung von Zwischenwerten zulässig. Eine Projektion über den Beobachtungszeitraum hinaus – also eine sogenannte Extrapolation – geht von der Annahme einer gleich bleibenden Entwicklung aus.

1101. Eine Tabelle der Binomialverteilung ist gegeben:

x	0,10	0,15
B	0,3478	0,1969

a) Berechnen Sie mittels linearer Interpolation den Wert von B für x = 0,12

b) Berechnen Sie mittels linearer Interpolation den Wert von x für B = 0,25 (verkehrter Ansatz!)

1102. Gegeben sind die 4 Punkte A(–10, –4), B(–1, 4), C(8, –4), D(12, 5). Sie sollen durch eine **Polynomfunktion 3. Grads** verbunden werden. Lösen Sie dies

a) mit dem Ansatz $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

b) mit der Funktion **polyint** (m,n).

Näherungsweise Gleichungslösung (Nullstellenbestimmung)

1103. Berechnen Sie die Nullstellen folgender Funktionen:

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5$ **b)** $f(x) = x^4 - x^2 + 5x$

c) $f(x) = x^2 - \ln(x) - 10$ **d)** $f(x) = x^2 - e^x$

(1) mit dem NEWTONschen Näherungsverfahren mit der Funktion $newt(x) = x - f(x)/f'(x)$

(2) mit dem Programm **newton** (x0,eps)

Startwert x_0 soll immer 1 sein, eps soll 10^{-6} sein.

1104. Berechnen Sie die Nullstellen folgender Funktionen:

a) $f(x) = x - \cos(x)$ **b)** $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

(1) mit dem NEWTONschen Näherungsverfahren mit der Funktion $newt(x) = x - f(x)/f'(x)$

(2) mit dem Programm newton (x0,eps)

Startwerte x_0 sollen 1 und 0,1 sein, eps soll 10^{-6} sein. MODE muss auf Angle = RADIAN eingestellt sein!

1105. Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 3$ mit dem NEWTONschen Näherungsverfahren für die Startwerte

a) $x_0 = -1$ **b)** $x_0 = 2{,}870$ **c)** $x_0 = 2{,}871$ **d)** $x_0 = 1$

Welcher Startwert ist der günstigste ? Welche Lösungen gibt es zum jeweiligen Startwert? Bei welchem Startwert konvergiert das Verfahren nicht ?

Die folgenden Aufgaben sind etwas anspruchsvoller :

1106. Machen Sie eine Kurvendiskussion der Funktion $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x - 2$, wobei die Nullstellen mit dem NEWTONschen Näherungsverfahren zu bestimmen sind.

1107. Jemand zahlt jährlich 450 Euro auf ein Sparkonto ein und erhält nach 20 Jahren Sparleistung 14000 Euro ausbezahlt. Wie viel Prozent Zinsen bekam er durchschnittlich?

Anleitung: Die Lösung dieser Aufgabe erfolgt mit der Summenformel der geometrischen Folge:

$s_n = \sum_{n=1}^{20} 450 \cdot x^n = 450 \cdot x \cdot \frac{x^n - 1}{x - 1}$, wobei x der Zinsfaktor $x = 1 + \frac{p}{100}$ ist. Zur Lösung verwenden wir die solve- bzw. nsolve-Funktion:

solve(450 · x · (x^20 – 1) / (x – 1) = 14000,x) bzw. nsolve(450 · x · (x^20 – 1) / (x – 1) = 14000,x)

SIMPSONsche Regel

1108. Folgendes Integral ist zu berechnen: $\int_2^4 \ln(x)\,dx$

a) händisch mit Hilfe der partiellen Integration

b) händisch mit Hilfe der SIMPSONschen Regel und n = 2 (= KEPLERsche Fassregel)

c) mit Hilfe der Funktion **simps**(2,4,20.)

d) mit Hilfe des TI-92 Integrals.

e) Der maximale Verfahrensfehler der Berechnung von **c)** soll mit nebenstehender Formel abgeschätzt werden

Der **maximale Verfahrensfehler** der SIMPSONschen Regel beträgt:

$$\varepsilon = |\text{Integral} - \text{SIMPSON}| \leq \frac{M \cdot (b-a)^5}{180 \cdot n^4}$$

mit M = Maximum von $|f^{(4)}(x)|$ für $a \leq x \leq b$

$f^{(4)}(x)$ ist die vierte Ableitung der Funktion. Das Maximum M der vierten Ableitung kann man grafisch oder mittels Differenzialrechnung bestimmen.

1109. Die Funktion $f(x) = \frac{x^3}{10} + 2$ soll von 2 bis 4 integriert werden

a) händisch

b) händisch mit Hilfe der SIMPSONschen Regel und n = 2 (= KEPLERsche Fassregel)

c) mit Hilfe der Funktion **simps**(2,4,20.)

d) mit Hilfe des TI-92 Integrals.

e) Der maximale Verfahrensfehler der Berechnung von **c)** soll mit der auf Seite 281 angeführten Formel abgeschätzt werden.

f) Wieso ist die Berechnung des SIMPSONschen Integrals exakt? Ist das nur hier so oder bei jeder Integrationsgrenze? (Betrachten Sie hierzu die Verfahrensfehlerabschätzung!)

1110. Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 e^{x^2}dx$$

a) händisch mit Hilfe der KEPLERschen Fassregel (SIMPSONverfahren mit n = 2)

b) mit der Funktion simps auf 5 Kommastellen genau. Zur Berechnung der Teilungszahl n verwende man nebenstehende Formel ($\varepsilon = 5.10^{-6}$)

c) mit dem TI-92 Integral.

Berechnung der **optimalen Intervallteilungszahl n** beim Simpsonverfahren:

$$n \geqslant \sqrt[4]{\frac{M \cdot (b-a)^5}{180 \cdot \varepsilon}}$$

mit M = Maximum von $|f^{(4)}(x)|$ für $a \leqslant x \leqslant b$

(M bestimmt man grafisch.)

1111. Berechnen Sie das Integral der Normalverteilung $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$, das den Wert 1 haben soll

a) näherungsweise mit der Funktion **simps**(–5,5,80.)

b) mit dem TI-92 Integral als $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

c) mit dem TI-92 Integral als $\int_{-10}^{10} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

d) mit dem TI-92 Integral als $\int_{-5}^{5} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

e) Welche Fehler haben die einzelnen Integrale?

1112. Berechnen Sie die Fläche der Viertelellipse mit den Achsen a = 1 und b = 0,6. Verwenden Sie dazu die Funktion $f(x) = \frac{6}{10}\sqrt{1-x^2}$

a) mit der Funktion **simps**(0,1,50.)

b) mit dem TI-92 Integral.

1113. Gegeben sei die Funktion $f(x) = -x^6 - 20x^2 + 10x + 40$. Gesucht ist deren grafische Darstellung und die grafische Darstellung der Näherungspolynome 2. Ordnung, welche die Punkte (–2, f(–2)) (–1, f(–1)) (0, f(0)) einerseits und die Punkte (0, f(0)) (1, f(1)) (2, f(2)) anderseits interpolieren.

ZUSAMMENSTELLUNG WICHTIGER FORMELN

Unter der **ε-Umgebung** der reellen Zahl a (abgekürzt: U(a, ε)) verstehen wir das offene Intervall $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$: $U(a, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid a-\varepsilon < x < a+\varepsilon\}$

Die Zahl α heißt **Grenzwert der Folge $\langle a_n \rangle$**, wenn in jeder ε-Umgebung von α fast alle Glieder der Folge liegen: $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ gilt für fast alle Glieder der Folge $\langle a_n \rangle$.

Zur Wiederholung bringen wir die sogenannten **Grenzwertsätze**:

① $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

② $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

③ $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

④ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}, \left(\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0, b_n \neq 0\right)$

	Berechnung der Ableitungsfunktion		Berechnung einer Stammfunktion
Potenzfunktion	$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$	$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
Konstante	$y = c$	$y' = 0$	$\int c\,dx = cx + C$
Sinusfunktion	$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
Kosinusfunktion	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$
Exponentialfunktion	$y = e^x$ $y = a^x$	$y' = e^x$ $y' = a^x \cdot \ln a$	$\int e^x\,dx = e^x + C$ $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
Logarithmusfunktion	$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	mittels partieller Integration
konstanter Faktor	$y = a \cdot f(x)$	$y' = a \cdot f'(x)$	$\int [a \cdot f(x)]\,dx = a \cdot \int f(x)\,dx$
Summen und Differenzen	$y = u(x) \pm v(x)$	$y' = u'(x) \pm v'(x)$	$\int [u(x) \pm v(x)]dx = \int u(x)dx \pm \int v(x)dx$
Produkte und Quotienten	$y = u \cdot v$ $y = \frac{u}{v}$	$y' = u' \cdot v + u \cdot v'$ $y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$	partielle Integration: $\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du$
Funktion einer Funktion	mit Hilfe der Kettenregel		mittels Integration durch Substitution

Gesucht ist die Nullstelle der Funktion mit der Gleichung $y = f(x)$, also die Lösung der Gleichung $f(x) = 0$. Für einen Näherungswert x_0 erhält man einen verbesserten Näherungswert x_1 durch Einsetzen in

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Das Verfahren ist abzubrechen, sobald die gewünschte Genauigkeit erreicht ist.

Für die innerhalb der Grenzen x_1 und x_2 zwischen der x-Achse und der Funktion f(x) eingeschlossenen Fläche A gilt:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

Es muss gelten: $f(x) > 0$ im Intervall $[x_1,\ x_2]$
Für $f(x) < 0$ sind die Integrationsgrenzen zu vertauschen. Ändert sich für f(x) im Intervall $[x_1,\ x_2]$ das Vorzeichen, ist der Integrationsbereich an der Nullstelle zu unterteilen.

Für die Volumsberechnung gilt bei

Rotation um die x-Achse

$$V_x = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$$

Rotation um die y-Achse

$$V_y = \pi \int_{y1}^{y_2} x^2 dy$$

KEPLERsche Fassregel:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

SIMPSONschen Regel:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{3n}\{f(a) + f(b) + 4[f(x_1) + f(x_3) + \ldots + f(x_{n-1})] + 2[f(x_2) + f(x_4) + \ldots + f(x_{n-2})]\}\ (n \in \mathbb{N}_g \setminus \{0\})$$

$z = f(x,y)$	Funktion in zwei Variablen
$\frac{\partial z}{\partial x}$	partielle Ableitung der Funktion z nach der Variablen x
$\frac{\partial z}{\partial y}$	partielle Ableitung der Funktion z nach der Variable y

Satz von SCHWARZ: $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

Vollständiges Differenzial: $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$

	Lineare Kostenfunktion	Quadratische Kostenfunktion	Kostenfunktion dritten Grads
Gesamtkosten	$K(x) = kx + F$	$K(x) = ax^2 + bx + c$	$K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
variable Kosten	$K_v(x) = kx$	$K_v(x) = ax^2 + bx$	$K_v(x) = ax^3 + bx^2 + cx$
fixe Kosten	$K_f = F$	$K_f = c$	$K_f = d$
Grenzkosten	$K'(x) = k$	$K'(x) = 2ax + b$	$K'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
Kostenverlauf	linear	für $a > 0$ progressiv, für $a < 0$ degressiv	bis zur Kostenkehre ($K''(x) = 0$) degressiv, dann progressiv
Durchschnittskosten je Mengeneinheit (Stückkosten)	$\overline{K}(x) = k + \frac{F}{x}$	$\overline{K}(x) = ax + b + \frac{c}{x}$	$\overline{K}(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x}$
durchschnittliche variable Kosten je Mengeneinheit	$\overline{K_v}(x) = k$	$\overline{K_v}(x) = ax + b$	$\overline{K_v}(x) = ax^2 + bx + c$

Unter dem **Betriebsoptimum** versteht man die Produktionsmenge mit den geringsten Durchschnittskosten pro Stück. Bei ausschließlich linearem oder degressivem Gesamtkostenverlauf liegt das Betriebsoptimum an der Kapazitätsgrenze des Betriebs.

Bei progressivem Kostenverlauf wird das Betriebsoptimum wie folgt bestimmt: $\overline{K}'(x) = 0$, $\overline{K}''(x) > 0$

Weiters gilt: $K' = \overline{K}(x)$ (Grenzkosten = Durchschnittskosten)

Ist der Marktpreis genau so hoch wie die geringsten Durchschnittskosten pro Stück, können bei Produktion des Betriebsoptimums die Produktionskosten gerade noch gedeckt werden, d. h. der Betrieb erzielt dann weder einen Gewinn noch einen Verlust. In diesem Fall spricht man von einem **Grenzbetrieb**.

	Konkurrenzbetrieb	Monopolbetrieb
Verkaufspreis	$p = \text{konstant}$	$p = p(x)$ (Nachfragefunktion)
Erlösfunktion	$E(x) = p \cdot x$ (lineare Funktion)	$E(x) = p(x) \cdot x$
Gewinnfunktion	$G(x) = p \cdot x - K(x)$	$G(x) = E(x) - K(x)$
Gewinnbereich (Gewinnschwelle, Gewinngrenze)	$G(x) = 0$	$G(x) = 0$
Kriterium für Maximalgewinn	$G'(x) = 0 \Rightarrow K'(x) = p$ (Grenzkosten = Preis)	$G'(x) = 0 \Rightarrow K'(x) = E'(x)$ (Grenzkosten = Grenzerlös)
COURNOTscher Punkt $C(x_C, p_C)$	—	jene Preis-Mengen-Kombination auf der Nachfragefunktion, bei der der maximale Gewinn erzielt wird

SACHWORTVERZEICHNIS

A

B

C

D

E

F

G

H

I

W

X

Y

Z

LEHRSTOFFÜBERSICHT

Der folgenden Zusammenstellung ist zu entnehmen, in welchen Jahrgängen der Höheren technischen und gewerblichen bzw. Höheren land- und forstwirtschaftlichen Lehranstalten die betreffenden Abschnitte des Werks lehrplanmäßig vorgesehen sind. Bei im Lehrplan nicht expressis verbis angeführten Themenbereichen, deren Behandlung aber für das Verständnis anderer Abschnitte bzw. zur Erreichung des Bildungsziels vorteilhaft erscheint, findet sich der Jahrgangshinweis in eckiger Klammer.

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
Folgen und Reihen bis Unterabschnitt 3. Geometrische Folgen	3.	3.	3.	3.	3.	3.	2.	2.
Folgen und Reihen Unterabschnitte 4. Monotone und beschränkte Folgen bis 7. Unendliche Reihen	3.	3.	3.	3.	3.	3.	[3.]	[3.]
Folgen und Reihen Unterabschnitt 8. Differenzengleichungen	—	3.	—	4.	4.	4.	2.	2.
Reelle Funktionen Unterabschnitt 1. Polynomfunktionen, Gleichungen höheren Grads	[3.]	[3.]	[3.]	[3.]	[3.]	[3.]	2.	2.
Reelle Funktionen Unterabschnitt 2. Grenzwert und Stetigkeit reeller Funktionen	3.	3.	3.	3.	3.	3.	[3.]	[3.]
Differenzialrechnung	3.	3.	3.	3.	3.	3.	3.	3.
Integralrechnung	3.	3.	3.	3.	3.	3.	4.	3.
Funktionen in mehreren Variablen	—	3.	—	—	3.	—	—	—
Kosten- und Preistheorie	—	—	—	—	[3.]	[3.]	3.	3.
Moderne Hilfsmittel in der Mathematik: der TI-92 bis Unterabschnitt 2. Differenzialrechnung	3.	3.	3.	3.	3.	3.	[3.]	[3.]
Moderne Hilfsmittel in der Mathematik: der TI-92 Unterabschnitt 3. Integralrechnung	3.	3.	3.	3.	3.	3.	[4.]	[3.]
Moderne Hilfsmittel in der Mathematik: der TI-92 Unterabschnitt 4. Numerische Mathematik (mit Ausnahme von 4.4. Interpolation)	3.	3.	3.	3.	3.	3.	—	—
Moderne Hilfsmittel in der Mathematik: der TI-92 Unterabschnitt 4.4. Interpolation	—	3.	3.	3.	3.	3.	—	—

(1) Höhere Lehranstalt für Bautechnik (Anlage 1.1.1)
Höhere Lehranstalt für Innenraumgestaltung und Holztechnik (Anlage 1.1.2)
Höhere Lehranstalt für Werkstoffingenieurwesen (Anlage 1.1.7)
Höhere Lehranstalt für Lebensmitteltechnologie (Anlage 1.2.3)
Höhere Lehranstalt für Kunst und Design (Anlage 1.4.1)

(2) Höhere Lehranstalt für Elektrotechnik (Anlage 1.1.3)
Höhere Lehranstalt für Elektronik (Anlage 1.1.4)

(3) Höhere Lehranstalt für Maschineningenieurwesen (Anlage 1.1.5)
Höhere Lehranstalt für Mechatronik (Anlage 1.1.6)

(4) Höhere Lehranstalt für Chemie (Anlage 1.2.1)
Höhere Lehranstalt für Chemieingenieurwesen (Anlage 1.2.2)

(5) Höhere Lehranstalt für Elektronische Datenverarbeitung und Organisation (Anlage 1.3.1)

(6) Höhere Lehranstalt für Wirtschaftsingenieurwesen (Anlage 1.3.2)
Höhere Lehranstalt für Betriebsmanagement (Anlage 1.3.3)

(7) Höhere Lehranstalt für allgemeine Landwirtschaft (Anlage 1.1)
Höhere Lehranstalt für alpenländische Landwirtschaft (Anlage 1.2)
Höhere Lehranstalt für Wein- und Obstbau (Anlage 1.3)
Höhere Lehranstalt für Gartenbau
- Ausbildungszweig: Garten- und Landschaftsgestaltung (Anlage 1.4)
- Ausbildungszweig: Erwerbsgartenbau (Anlage 1.5)
Höhere Lehranstalt für Land- und Ernährungswirtschaft (Anlage 1.8)
Höhere Lehranstalt für Milchwirtschaft und Lebensmitteltechnologie (Anlage 1.9)

(8) Höhere Lehranstalt für Landtechnik (Anlage 1.6)
Höhere Lehranstalt für Forstwirtschaft (Anlage 1.7)

Anlagenverweise beziehen sich auf die Verordnung des Bundesministers für Unterricht und kulturelle Angelegenheiten über die Lehrpläne für Höhere technische und gewerbliche Lehranstalten, BGBl. Nr. 302/1997, sowie auf die Verordnung des Bundesministers für Unterricht, Kunst und Sport über die Lehrpläne für Höhere land- und forstwirtschaftliche Lehranstalten, BGBl. Nr. 491/1988, jeweils in der geltenden Fassung. In den Lehrplänen 2004 der Höheren land- und forstwirtschaftlichen Lehranstalten ist der Lehrstoff keinen bestimmten Jahrgängen zugeordnet.